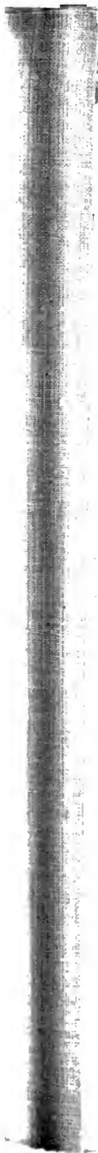
WISKUNDIGE OPGAVEN MET DE OPLOSSINGEN DOOR LEDEN VAN HET WISKUNDIG...

Wiskundig Genootschap Onder de Zinspreuk: "Een...









WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN,

DOOR

LEDEN VAN HET WISKUNDIGE GENOOTSCHAP,

TER SPREUKE VOERENDE:

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."

NIEUWE REEKS.

ZESDE DEEL.

(1894–1896).

AMSTERDAM,
DELSMAN & NOLTHENIUS,
1896.

Het Wiskundig Genootschap is in ruiling met de volgende instellingen en tijdschriften:

Koninklijke Akademie van Wetenschappen, *Amsterdam.*
American Journal of Mathematics, *Baltimore.*
John Hopkins University Circulars, *Baltimore.*
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, *Berlin.*
Journal für die reine und angewandte Mathematik, *Berlin.*
R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di *Bologna.*
Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de *Bordeaux.*
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, *Buda-Pest.*
Philosophical Society of *Cambridge.*
Annals of Mathematics, *Charlotteville (U. S.).*
Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de *Cherbourg.*
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, *Christiania.*
Polytechnische School, *Delft.*
Mathematical Society of *Edinburgh.*
Royal Society of *Edinburgh.*
Mathesis, *Gand.*
Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, *Göttingen.*
Koninklijk Instituut van Ingenieurs, *'sGravenhage.*
Hollandsche Maatschappij van Wetenschappen, *Haarlem.*
Teyler's Genootschap, *Haarlem.*
Kaiserliche Leop. Car. deutsche Akademie der Naturforscher, *Halle a/d S.*
Mathematische Gesellschaft in *Hamburg.*
Société physico-mathématique de *Kasan.*
Société mathématique de *Kharkof.*
Nyt Tidsskrift for Mathematik (A, B), *Kjöbenhavn.*
Archiv der Mathematik und Physik, *Leipzig.*
Königliche Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften, *Leipzig.*
Zeitschrift für Mathematik und Physik, *Leipzig.*
Société Royale des Sciences de *Liége.*
Mathematical Society of *London.*
College of Preceptors, *London.*
Educational Times, *London.*
Mathematical Papers of the Eductional Times (Reprints), *London*
Annuaire de l'Université Royale de *Lund.*
Institut Royal Grand-Ducal de *Luxembourg.*
La Controversia, *Madrid.*

Literary and philosophical Society of *Manchester.*
Faculté des Sciences de *Marseille.*
Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, *Milano.*
Société mathématique de *Moscou.*
Giornale di matematica, *Napoli.*
American mathematical Society, *New York.*
Circolo mathematico di *Parlemo.*
Bulletin des Sciences mathématiques, *Paris.*
Journal de mathématiques pures et appliquées, *Paris.*
Journal de mathématiques élémentaris, *Paris.*
Journal de mathématiques spéciales, *Paris.*
L'Intermédiaire des Mathématiciens, *Paris.*
Nouvelles Annales de mathématiqnes, *Paris.*
Revue de mathématiques spéciales, *Paris.*
Société mathématique de France, *Paris,*
Jornal de Sciencias mathematicas et astronomicas, *Porto.*
Časopis pro pěstováni mathematiky a fysiky, *Prag.*
Königlich boehmische Gesellschaft der Wissenschaften, *Prag.*
Reale Accademia dei Lincei, *Roma.*
Accademia Pontificale dei Lincei, *Roma.*
Società Italiana della Scienze, *Roma.*
Periodico di Mathematica, *Roma.*
Bataafsch Genootschap, *Rotterdam.*
Académie Royale des Sciences de *Stockholm.*
Acta mathematica, *Stockholm.*
Bibliotheca mathematica, *Stockholm.*
Reale Accademia della Scienzo di *Torino.*
Rivista di Mathematica. *Torino.*
Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres. *Toulouse.*
Annales de la Faculté des Sciences de *Toulouse.*
Université d'Upsala.
Journal de l'Université de *Varsovie.*
Travaux mathématiques et physiques, *Varsovie.*
Mathematical Society of *Virginia.*
Smithsonian Institution, *Washington.*
Königlich-Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, *Wien.*
El Progeso matemático, *Zaragosa.*
Deutsche Mathematiker Vereinigung.

NAAMLIJST DER LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven",

TE AMSTERDAM.

1896.

BESTUUR.

a. Schouten (Dr. G.), Leeraar HBS. Amsterdam, *Voorzitter* [1]) 1885.
Versluys (J.), Leeraar te Amsterdam . . . . 1881.
Tesch (J. W.), te 's Gravenhage . . . . 1869.
Godefroy (A. N.), Architect te Amsterdam . . . . . . 1880.
Kluyver (J. C.), Hoogleeraar te Leiden . . . . 1891.
Coelingh (D.), Leeraar a/h. Gymnasium te Amsterdam 1894.
b. . . . . , 1ste *Secretaris* . . . .
c. Paraira (Dr. M. C.), *Wiskundig Adviseur te Amsterdam*, 2de *Secretaris* . . . . 1894.
d. Lennep (Mr. H. S. van), te Amsterdam, *Penningmeester* 1865.
e. Schoute (Dr. P. H.), Hoogleeraar te Groningen, *Redacteur der Wiskundige Opgaven* . . . . 1886.
f. Korteweg (Dr. D. J.), Hoogleeraar te Amsterdam, *Inspecteur der Bibliotheek* . . . . 1883.

---

[1]) Jaartallen van de eerste verkiezing als lid van 't Bestuur.

WETENSCHAPPELIJKE COMMISSIE.

. . . . , *Voorzitter* . . . .
Grinwis (Dr. C. H. C.), Hoogleeraar te Utrecht . . . . 1870.
Schols (Dr. Ch. M.), Hoogleeraar aan de Polytechnische School te Delft . . . . 1881.
Pesch (Dr. A. J. van), Hoogleeraar te Amsterdam . . . 1884.
Korteweg (Dr. D. J.), (z. b.) . . . . 1887.
Schoute (Dr. P. H.), (z. b.) . . . . 1888.

REDACTIE VAN DE „*Revue des publications mathématiques*".

Kapteyn (Dr. W.), Hoogleeraar te Utrecht . . . . 1892.
Kluyver (J. C.), (z. b.) . . . . 1892.
Korteweg (Dr. D. J.), (z. b.) . . . . 1892.
Schoute (Dr. P. H.), (z. b.) *(Hoofdredacteur)* . . . . . 1892.
Zeeman (Dr. P.), Hoogleeraar te Delft . . . . 1892.

HONORAIRE LEDEN.

Janse Bz. (L.), Leeraar te Amsterdam . . . . 1870.
Tesch (J. W.), (z. b.) . . . . 1877.
Godefroy (A. N.), (z. b.) . . . . 1879.

BUITENLANDSCHE HONORAIRE LEDEN.

Mansion (P.), Hoogleeraar te Gent . . . . 1879.
Darboux (G.), Hoogleeraar te Parijs . . . . 1879.
Neuberg (J.), Hoogleeraar te Luik . . . . 1882.
Dewulf (É.), Géneral du Génie, Marseille . . . . 1886.
Le Paige (C.), Hoogleeraar te Luik . . . . 1886.
Longchamps (G. de), te Parijs . . . . 1887.
d'Ocagne (M.), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique, Parijs . . . . 1890.
Lemoine (É.), te Parijs . . . . 1892.
Schubert (H.), te Hamburg . . . . 1894.
Dyck (Dr. W.), Hoogleeraar te Munchen . . . . 1894.

LEDEN VAN VERDIENSTE.

Roeff (F.), Onderwijzer in de Wiskunde te Amsterdam . . 1862.

GEWONE LEDEN [1]).

Aller (C. van), Leeraar aan de Kon. Mil. Acad. te Breda . 1876.
Allersma (T. J.), Leeraar aan de RHBS. te Warfum . . 1875.
Asscher (Dr. E. B.), te Amsterdam . . . . 1843.
Bakker (Dr. G.), Leeraar aan de HBS. te Schiedam . . . 1880.
Beens (M.), te Amsterdam . . . . 1873.
Benthem Gzn. (Dr. A.), Leeraar aan de Industrie- en Handelsschool te Enschedé . . . . 1863.
Berg (Dr. J. C. v. d.), Leeraar aan de HBS. te Gorinchem 1879.
Bergansius (J. W.), te Delft . . . . 1893.
Bes (K.), Leeraar aan de RHBS. te Tilburg . . . . . 1874.
Bierens de Haan (J.), te Amsterdam . . . . 1879.
Bierens de Haan (P.), te Amsterdam . . . . 1879.
Biezeno (G. F.), te Delft . . . . 1894.
Boer (A. F. de), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam . . 1884.
Boer (Dr. F. de), Hoogleeraar te Groningen . . . . . 1871.
Boers (B. H.), te 's Gravenhage . . . . 1890.
Bol (H.), Directeur van de RHBS. te Sappemeer . . . . 1875.
Bolt (J. C.), Phil. Cand. te Utrecht . . . . 1894.
Bos (P. J.), Leeraar aan de RHBS. te 's Bosch . . . . 1875.
Bouman (Z. P.), Phil. Doct^s. te Amsterdam . . . . . . 1892.
Bouwman (W.), Phil. Doct^s. te Beerta . . . . 1893.
Bouwmeester (Mej. S. S.), Leerares aan de HBS. voor meisjes te Haarlem . . . . 1886.
Bouten (A. L.), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam . . 1879.
Boxel (J. van), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam . . 1888.
Brandenburg (F.), te Amsterdam . . . . 1894.
Breen (A. J. van), Redacteur van „de Vriend der Wiskunde" te Arnhem . . . . : . . . . . . 1887.
Brug (P.), Onderw. Wis- en Zeevaartk. te Amsterdam . . 1877.
Bruijn (G. F. G. de), Leeraar aan het Gymnasium te Amersfoort . . . . 1893.
Brutel de la Rivière (J. J.), te Hilversum . . . . . . 1873.
Brutel de la Rivière (Dr. C. J. E.), Leeraar aan de RHBS. te Assen . . . . 1890.
Bückmann (Dr. H. W. C. E.), Leeraar aan het Gymnasium te Amsterdam . . . . 1877.
Burger (Dr. C. P.), Hoogleeraar, Oud-Directeur van de RHBS. te Leeuwarden . . . . 1844.
Cardinaal (J.), Hoogleeraar aan de Polyt. School te Delft . 1881.

---

1) L. L. beteekent lid voor het leven.

Carp (J. A.), te Utrecht . . . . 1893.
Coelingh (D.), (z. b.) . . . . 1887.
Colen (S. H.), te Delft . . . . 1874.
Coolhaas (Dr. G. J. M.), Leeraar aan de HBS. te 's Gravenhage 1886.
Daniëls (Dr. M. F.), te Kerkrade . . . . 1884.
Derksen (H. A.), Leeraar aan de HBS. te Nijmegen . . 1893.
Dibbitz (G. C.), Officier der Mariniers te Dordrecht . . . 1894.
Dojes (Dr. P. H.), Leeraar aan de Kweekschool te Amsterdam 1885.
Dorsten (Dr. R. H. van), Leeraar aan het Gymnasium te Rotterdam . . . . 1881.
Duyfjes (A. J.), Leeraar aan de HBS. te Haarlem . . . 1878.
Eecen (Dr. A.), Leeraar aan het Gymnasium te Assen . . 1884.
Ekema (Dr. H.), Leeraar aan de HBS. te Utrecht . . . 1879.
Elfrinkhof (Dr. L. van), Leeraar aan de HBS. te Assen . 1888.
Enschedé (Dr. W. A.), Oud-Hoogleeraar te Groningen . . 1877.
Escher (Dr. R. J.), te Groningen . . . . 1873.
Feen (Dr. J. van der), Leeraar aan het Gymnasium te Sneek 1884.
Fischer (J. C.), Leeraar aan de HBS. te Middelburg . . 1891.
François (C. J.), Leeraar aan de HBS. te 's Gravenhage . 1887.
Geer (Dr. P. van), Hoogleeraar te Leiden . . . . . . 1877.
Gillet (Dr. Joseph), Prof. à l'école normale de l'État, Verviers 1894.
Godefroy (A. N.), (z. b.) . . . . L. L. 1873.
Goedkoop van Nelle (A. J.), Leeraar aan de HBS. te Delft 1887.
Gonggrijp (B.), Phil. Cand. te Leiden . . . . 1895.
Gravelaar (A. W.), Leeraar aan de HBS. te Zaandam . . 1895.
Grinwis (Dr. C. H. C.), (z. b.) . . . . 1853.
Groot (F. de), Leeraar aan de HBS. te Groningen . . . 1877.
Grosjean (H. C.), Werkt. Ingenieur te 's Gravenhage . . 1893.
Grotendorst (N. C.), Kap. der Artillerie, Hoogleeraar aan de Kon. Mil. Acad. te Breda . . . . 1875.
Haas (Mej. C. H. de), te Rotterdam . . . . 1891.
Harst (Dr. A. D. v. d.), Leeraar aan de RHBS. te Middelburg 1886.
Hartman (Ch. M. A.), Civiel-Ingen. te Leiden . . . . 1893.
Helwig (P. J.), te Nieuwer-Amstel . . . . 1890.
Heringa (Dr. P. M.), Leeraar aan de HBS. te Haarlem . 1870.
Hogewind (G. H. B.), te Utrecht . . . . 1883.
Hollman (Dr. P. J.), te Alkmaar . . . . 1851.
Houba (Dr. M. J. H.), Leeraar aan de HBS. te Nijmegen 1875.
Houwen (F. J.), Leeraar aan de Handelsschool te Amsterdam 1887.
Huisken (H. F.), Phil. Doct^s., Leeraar te Hoorn . . . . 1893.
Huffel (N. G. van), te Utrecht . . . . 1895.
Janse (Dr. J. P.), Leeraar aan de HBS te Amsterdam . . 1877.
Janse Bzn. (L.), (z. b.) . . . . 1863.
Jansen van Raay (W. H. L.), Leeraar HBS. te Haarlem . 1885.

Jensema (E.), Phil. Cand. te Groningen . . . . 1895.
Jong (S. de), te Haastrecht . . . . 1869.
Kamp (H. van der), Leeraar aan de HBS. te Middelburg . 1888.
Kapteyn (Dr. J. C.), Hoogleeraar te Groningen . . . . 1888.
Kapteyn (Dr. N. P.), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam 1874.
Kapteyn (Dr. W.), (z. b.) . . . . 1873.
Kaz (Dr. P. C.), Leeraar aan de Kweekschool voor Machinisten te Amsterdam . . . . 1880.
Kempe (Dr. A.), Leeraar aan het Gymnasium te Rotterdam 1875.
Keppel (Herbert G.), Worcester (U.S.A) . . . . 1893.
Kettner (Dr. A.), Leeraar aan het Gymnasium te Amsterdam 1865.
Keuller (J.), te Venloo . . . . 1874.
Kluyver (J. C.), (z. b.) . . . . 1879.
Knapper Kz. (C.), Leeraar aan de Handelsschool te Amsterdam 1869.
Koldewijn (H.), Leeraar aan de RHBS. te Utrecht . . . 1877.
Koopmans (G. C. A.), Leeraar aan de HBS. te Veendam . 1887.
Kors (Dr. J.), Leeraar aan de RHBS. te Groningen . . . 1864.
Korteweg (Dr. D. J.), (z. b.) . . . . 1865.
Krantz (H. J.), Oud-Kolonel der Artillerie te 's Gravenhage 1875.
Krediet (C.), Leeraar aan de Kon. Milit. Acad. te Breda 1882.
Krüger (S.), Phil. Cand. te Katwijk a/R. . . . . 1895.
Kijlstra (A.), Leeraar aan het Instituut voor de Marine te Nieuwediep . . . . 1890.
Laar (J. J. van), Leeraar aan de HBS. te Utrecht . . . 1889.
Landré (Corneille L.), Wisk. Adviseur te Dordrecht . . . 1875.
Leeuwen (J. H. van), Leeraar aan de HBS. te Brielle . . 1874.
Lem (J. W.), Phil. Doct[s]. te Leiden . . . . 1888.
Lennep (Mr. H. S. van), (z. b.) . . . . 1860.
Leupen (F. F.), Leeraar aan de HBS. te Zierikzee . . . 1874.
Loghem (Dr. W. J. van), Leeraar Gymnasium te 's Gravenhage 1874.
Lorentz (Dr. H. A.), Hoogleeraar te Leiden . . . . . . 1872.
Los (H. C.), te 's Gravenhage . . . . 1882.
Luyten (Dr. L. P. C.), Leeraar aan het Gymnasium te 's Hertogenbosch . . . . 1876.
Mannoury (G.), Bussum . . . . 1895.
Mantel (W.), Privaat Docent te Delft . . . . 1875.
Mars (D.), te Haarlem . . . . 1894.
Marx (J. C.), Phil. Doct[s]. te Utrecht . . . . 1894.
Masier (J. C. de), Opzichter van 's Rijks Waterstaat te Geertruidenberg . . . . 1888.
Massink (W.), Leeraar aan de HBS. te Leiden . . . . . 1883.
Meerburg (Dr. J. H.), te Gorinchem . . . . 1866.
Menges (C. L. R. E.), te 's Gravenhage . . . . 1870.
Mensinga (Dr. O.), Leeraar aan het Gymnasium te Zwolle . 1895,

Meyl (A. J. van der), Oud-Kapit. der Art. te 's Gravenhage 1875.
Michaëlis (N. F.), Directeur van de Spoorw. te 's Gravenhage 1879.
Michaëlis (Dr. G. J.), Leeraar aan de HBS. te Arnhem . . 1876.
Molenbroek Jr. (Dr. P.), Leeraar aan de HBS. te 's Gravenhage 1884.
Mondt (B. W.), Leeraar aan de HBS. te Breda . . . . . 1882.
Mooren (J. H.), Telegr. Directeur te Schiedam . . . . . 1870.
Moors (B. P.), Inspecteur van het IJkwezen te 's Gravenhage 1863.
Mounier (Dr. G. J. D.), Wisk. Adviseur te Utrecht . . . 1872.
Mourik (P. van), Leeraar aan de RHBS. te Utrecht . . . 1878.
Munnik Jr. (F. de), Leeraar in de Wiskunde te Utrecht . 1893.
Nieuwhuis (Dr. W. H.), Leeraar aan het Gymnasium te Doetinchem . . . . 1875.
Ninck Blok (Dr. C. J. J.), Directeur van de HBS. te 's Gravenhage 1872.
Nortier (P.), Onderwijzer in de Wiskunde te Amsterdam . 1892.
Nijland (A. A.), Phil. Cand. te Utrecht . . . . 1890.
Onnen (Dr. H.), Leeraar aan het Gymnasium Willem III te Batavia . . . . 1865.
Oosting (Dr. H. J.), Leeraar aan het Instituut voor de Marine te Nieuwediep . . . . 1890.
Oskamp (Dr. G. A.), Hoogleeraar aan het Instituut voor de Marine te Nieuwediep . . . . 1875.
Oss (Dr. S. L. van), te Zalt-Bommel . . . . 1886.
Overeem Jr. (M. van), te Utrecht . . . . 1895.
Paraira (Dr. M. C.), (z. b.) . . . . 1865.
Pesch (Dr. A. J. van), (z. b.) . . . . 1879.
Ploeg (Dr. B. J. van der), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam 1878.
Poort (W. A.), Phil. Doct[s]., Leeraar aan de HBS. te Middelburg 1894.
Prange (Dr. A. J. A.), Leeraar aan de HBS. te Amersfoort 1889.
Psicha (A.), te Amsterdam . . . . 1859.
Quint (Dr. N.), Leeraar aan de HBS. te 's Hage . . . 1880.
Rahusen (Prof. A. E.), Wisk. Adviseur te 's Hage . . . 1886.
Rank (Ph.), Leeraar aan de Kweekschool te Middelburg . 1870.
Rasch (J. W.), IJker te Nijmegen . . . . 1879.
Ravenek (H. A.), Hoogleeraar aan de Polyt. School te Delft 1879.
Ritter (M.), Leeraar aan de HBS. te Groningen . . . . 1880.
Roeff (F.), (z. b.) . . . . 1854.
Roos (J. D. C. M. de), Ingenieur van het Stoomwezen te 's Gravenhage . . . . 1877.
Roozeboom (A.), Leeraar aan de HBS. te Gouda . . . . 1875.
Rutgers (W.), Civiel-Ingenieur te 's Gravenhage . . . . 1889.
Rijkens (Dr. R.), Directeur der RHBS. te Warfum . . . 1875.
Rijn van Alkemade (Dr. A. C. van), Leeraar aan de HBS. te Apeldoorn . . . . 1877.
Sandick (R. A. van), te Amsterdam 1892

Scheltema (Dr. C. A.), Hoogleeraar aan de Polytechnische School te Delft . . . . 1879.
Schilling (J. P.), Wiskundig Adviseur te Zeist . . . . 1888.
Schols (Dr. Ch. M.), (z. b.) . . . . 1875.
Schoute (Dr. P. H.), (z. b.) . . . . 1875.
Schouten (Dr. G.), (z. b.) . . . . 1871.
Schuh Jr. (Fr.), Phil. Stud., te Amsterdam . . . . . 1895.
Schuitema (H.), te Groningen . . . . 1886.
Siersma (H.), te Leeuwarden . . . . 1890.
Siertsema (Dr. L. H.), te Leiden . . . . 1885.
Sieverdink (F.), Leeraar aan de HBS. te Gouda . . . . 1882.
Sluiter (W.), Hoofd der R. K. School te Enter . . . . 1891.
Snijder (H. J.), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam . . 1871.
Snijders Czn. (J. A.), Hoogleeraar aan de Polytechnische School te Delft . . . . 1890.
Spijker (N. Ch.), te Amsterdam . . . . 1890.
Spruyt (M. H.), Kapitein der Infanterie, Hoofd van de Wisk. Afdeeling der Cadettenschool te Alkmaar . . . 1890.
Steen van Ommeren (F. J. C. van den), te Leiden . . . 1894.
Steenis (J. van), Onderwijzer in de Wiskunde te Noordeloos 1881.
Steinmetz (E. A.), Leeraar aan de HBS. te 's Gravenhage 1892.
Stoel (J. J.), Leeraar aan de HBS. te Zutphen . . . . 1885.
Stoel (Dr. L. M. J.), Leeraar te Tiel . . . . 1882.
Stolp (Dr. C.), Leeraar aan de HBS. te Kampen . . . 1875.
Stoop (Jhr. A. W. P.), Luit.-Ingenieur te 's Hage . . . 1894.
Stouwe (G. J. van der), Leeraar aan de HBS. te Dordrecht 1875.
Suyver (J. J.), Leeraar in de Zeevaartkunde te Amsterdam 1866.
Swart (Dr. A. J.), te Zutphen . . . . 1888.
Tesch (J. W.), (z. b.) . . . . 1863.
Thiel (J. M.), Onderwijzer te Elburg . . . . 1887.
Thijn (Dr. A. van), Leeraar aan het Gymnasium te Winschoten 1892.
Timmer (J.), Phil. Cand. te Leiden . . . . 1890.
Toorenburg (P. van), Leeraar aan de HBS. te Winschoten . 1875.
Turksma (Dr. B.), te Amsterdam . . . . 1894.
Uittien (G. D.), Civiel-Ingenieur te Brummen . . . . . 1884.
Vaes (F. J.), Leeraar aan de HBS. te Gorinchem . . . . . 1893.
Valewink (G.), Phil. Stud. te Amersfoort . . . . 1890.
Vegt (L. van der), Leeraar aan de HBS. te Haarlem . . . 1877.
Verkaart (H.), Onderwijzer te Hontenisse . . . . 1889.
Verrijp (Dr. P. A.), te Deventer. . . . . 1887.
Verschuer (A. D. Baron van), Kap. der Artillerie te Delft . . 1881.
Versluys (J.), (z. b.) . . . . 1865.
Versluys (W. A.), te Amsterdam . . . . 1895.
Vries (Dr. G de , Leeraar te Haarlem . . . . . 1892.

Vries (H. de), te Amsterdam . . . . 1882.
Vries (Dr. J. de), Leeraar aan de Polyt. School te Delft . . 1877.
Waals (Dr. J. D. van der), Hoogleeraar te Amsterdam . . . 1879.
Wafelbakker (C.), 1e Luitenant der Artillerie te Dordrecht . 1890.
Wageningen (Dr. F. van), IJker te 's Gravenhage . . . . 1873.
Was (Dr. E. A. O.), Leeraar aan de HBS. te Leiden . . . . 1875.
Well (G. J. van der), Werktuigkundig Ingenieur, Leeraar aan de HBS. te Delft . . . . 1890.
Weltevreede (P.), Leeraar aan de HBS. te Amsterdam . . . 1879.
Wettum (Dr. T. B. van), Leeraar aan de HBS. te Leiden . 1873.
Wildervanck Jr. (P. de Carpentier), te Tiel . . . . 1889.
Wind (Dr. C. H.), Lector aan de Rijks-Universiteit te Groningen 1889.
Wijs (P. de), te Middelburg . . . . 1894.
Wijthoff (Mej. A. G.), te Amsterdam . . . . 1883.
Zanten (L. van), Leeraar aan de HBS. te Tiel . . . . . 1863.
Zeeman Gz. (Dr. P.), (z. b.) . . . . 1875.
Zoot (H. W. A.), te 's Gravenhage . . . . 1884.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN.

Vraagstuk I.

Uit de hoekpunten A, B, C van een driehoek ABC als middelpunten beschrijft men met een zelfden straal r drie cirkels α, β, γ. Indien nu U_r en U'_r de punten zijn, waarin de uit V als middelpunt beschreven cirkel de zijde UV des driehoeks snijdt, en daarbij U_r en U aan dezelfde zij van V, U'_r en U aan verschillende zijden van V gelegen zijn, vraagt men:

a) Te bewijzen, dat de zes punten U_r en eveneens de zes punten U'_r op een kegelsnee gelegen zijn en deze kegelsneden door de vergelijkingen

$$r\,(ax + by + cz)^2 \mp abc\,\Sigma \frac{ayz}{a \mp r} = 0$$

worden voorgesteld.

b) Te bewijzen, dat bij verandering van r de meetkundige plaats van de middelpunten dezer kegelsneden door de vergelijking

$$\Sigma \frac{a\,(b - c)}{x\,(-\,ax + by + cz)} = 0$$

is voorgesteld.

c) Te onderzoeken in hoever uit de op het punt A toegepaste theorie der doorloopende transformatie (vergelijk de oplossing van Vraagstuk 162 der vorige reeks en o.a. ook *Mathesis*, 1892, bl. 58) af te leiden is, dat de zestallen (B'_c, C'_b, C_a, A_c, A_b, B_a) en (B_c, C_b, C'_a, A'_c, A'_b, B'_a) eveneens op twee kegelsneden liggen en de vergelijkingen van deze en van de meetkundige plaats harer middelpunten onmiddellijk zijn neer te schrijven.

d) Als de lijnen $U_w V_w$ en $U'_w V'_w$ de zijde UV in de punten W_1 en W'_1 snijden, de omhullenden der lijnen $A_1 B_1 C_1$ en $A'_1 B'_1 C'_1$ te bepalen en ook hierop de theorie der doorloopende transformatie toe te passen. (É. LEMOINE.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

I. SYNTHETISCHE OPLOSSING. Met weglating van de vergelijkingen wordt het beweerde aldus bewezen:

a) Ook als men op het teeken let, heeft men (fig. 1)

$$\frac{B_c B}{B_c C} \cdot \frac{C_b B}{C_b C} = 1 \,,\; \frac{C_a C}{C_a A} \cdot \frac{A_c C}{A_c A} = 1 \,,\; \frac{A_b A}{A_b B} \cdot \frac{B_a A}{B_a B} = 1.$$

Wijl het product der drie eerste leden dus eveneens de eenheid is, liggen de zes punten U_v volgens de bekende stelling van CARNOT op een kegelsnee K. En door alle letters te accentueeren vindt men, dat de zes punten U'_v op een kegelsnee K′ liggen.

b) We leiden eerst een constructie af van het middelpunt O der bij een bepaalde waarde van r behoorende kegelsnee K.

De kegelsnee door A, die met K gelijkvormig, gelijkstandig en gelijkmiddelpuntig is, gaat ook door B en C en raakt in A, B, C de lijnen p_a, p_b, p_c (fig. 2) aan, die evenwijdig loopen met de poollijnen q_a, q_b, q_c van A, B, C ten opzichte van K. Dus snijden de lijnen $A''A_m$, $B''B_m$, $C''C_m$ elkaar in O. Hieruit nu volgt een constructie van O. Want als de straal r gegeven is, vindt men de punten F en G door middel van de betrekkingen $B_m F \,.\, B_m A = \overline{B_m A_c}^2$, $C_m G \,.\, C_m A = \overline{C_m A_b}^2$ en hierdoor dus de lijn q_a, enz.

We bepalen nu verder de meetkundige plaatsen der punten A″, B″, C″. Uit de betrekkingen $2/AF = 1/AA_c + 1/AC_a$, $2/AG = 1/AA_b + 1/AB_a$ van harmonische ligging volgt onmiddellijk $b\,(c - r)\, AF = c\,(b - r)\, AG$. Dus behoort bij een gegeven waarde van r één bepaalde lijn p_a en omgekeerd ook bij een gegeven lijn p_a, als men op het teeken let, één bepaalde waarde van r. Dus beschrijven p_a, p_b, p_c bij verandering van r projectivische stralenbundels. Bovendien zijn die stralenbundels niet perspectivisch, als de gegeven driehoek ABC ongelijkbeenig is. Want het samenvallen van p_a met AB eischt

$r = b$, het samenvallen van p_b met BA daarentegen $r = a$. Dus doorloopen A″, B″, C″ kegelsneden, die zooals gemakkelijk blijkt door de drie hoekpunten van driehoek ABC gaan.

Indien B^2 en C^2, de door B″ en C″ doorloopen kegelsneden, gegeven zijn, vindt men een punt O, als men door A een willekeurige lijn p_a trekt, de tweede snijpunten B″ en C″ van p_a en deze kegelsneden met B_m en C_m verbindt en het snijpunt der lijnen $B''B_m$ en $C''C_m$ bepaalt. Dus bestaat er tusschen de stralen B_mO en C_mO een verwantschap (2,2) en is de meetkundige plaats van O een kromme O^4 van den vierden graad, die B_m, C_m en dus ook A_m tot dubbelpunten heeft. De twee raaklijnen in B_m zijn de stralen B_mO, die bij den met C_mB_m samenvallenden straal C_mO behooren, enz.

Daar we in het bovenstaande r laten veranderen van negatief oneindig groot tot positief oneindig groot, is O^4 de meetkundige plaats van de middelpunten O van de beide reeksen K en K′.

c) Als we in de afleiding van K en K′ de punten B_c en C_b door B'_c en C'_b vervangen, doet de stelling van Carnot ons vinden, dat de punten (B'_c, C'_b, C_a, A_c, A_b, B_a) op een kegelsnee K_a en de punten (B_c, C_b, C'_a, A'_c, A'_b, B'_a) op een kegelsnee K'_a gelegen zijn. Deze beide reeksen leveren dan samen weer een enkele middelpuntskromme O^4_a op, die door omkeering van het teeken van r met betrekking tot de stukken op BC verkregen wordt.

d) De zeshoek van Pascal met betrekking tot den in K beschreven zeshoek $B_cC_bC_aA_cA_bB_a$ leert, dat de punten A_1, B_1, C_1 op een rechte lijn liggen.

Zoeken we nu de omhullende van A_1B_1 (fig. 3), dan merken we op, dat de puntenreeksen A_1 en B_1 op BC en CA projectief zijn. Want de bundels (B_aC_a) en (C_bA_b) van evenwijdige stralen zijn dit. Bovendien komt het punt C niet met zich zelf overeen. Want als A_1 in C valt, is de straal r der cirkels gelijk b en als B_1 in C valt is de straal der cirkels gelijk a. Dus omhult $A_1B_1C_1$ een kegelsnee en wel een parabool P, omdat A_1 en B_1 beide in het oneindige vallen als de straal der cirkels oneindig is. Deze kromme is tevens de omhullende van $A'_1B'_1C'_1$. Verder vindt men nog drie andere parabolen P_a, P_b, P_c door verwisseling der paren (B_c, C_b) en (B'_c, C'_b), enz.

II. Bepaling der vergelijkingen. *a*) Uit de figuur vinden we voor de vergelijkingen der lijnen AB_c en AC_b

$$\frac{y}{z} = \frac{cr}{b(a-r)}, \quad \frac{y}{z} = \frac{c(a-r)}{br}.$$

Dus moet de doorsnee van BC met K zich herleiden tot

$$\left(\frac{by}{cz} - \frac{r}{a-r}\right)\left(\frac{by}{cz} - \frac{a-r}{r}\right) = 0,$$

of

$$(by + cz)^2 - \frac{a^2bcyz}{r(a-r)} = 0.$$

Derhave is K voorgesteld door de boven gegeven vergelijking en vindt men de vergelijking van K′ door de omkeering van het teeken van r.

b) De kegelsneden $\phi = 0$ en $\phi - k(ax + by + cz)^2 = 0$ zijn concentrisch, wijl $ax + by + cz = 0$ de lijn in het oneindige voorstelt. Dus is K concentrisch met de kegelsnee $\Sigma \frac{ayz}{a-r} = 0$, die door A, B, C gaat. Het middelpunt dezer kegelsnee is bepaald door de vergelijkingen

$$\frac{\frac{bz}{b-r} + \frac{cy}{c-r}}{a} = \frac{\frac{cx}{c-r} + \frac{az}{a-r}}{b} = \frac{\frac{ay}{a-r} = \frac{bx}{b-r}}{c}$$

of, als men stelt

$$a = \lambda x(a-r),\ b = \mu y(b-r),\ c = \nu z(c-r) \ .\ .\ .\ 1),$$

door

$$\frac{\mu + \nu}{ax} = \frac{\nu + \lambda}{by} = \frac{\lambda + \mu}{cz},$$

d. i. door

$$\frac{\lambda}{by + cz - ax} = \frac{\mu}{cz + ax - by} = \frac{\nu}{ax + by - cz} \ .\ .\ .\ 2).$$

Tellen we nu bovendien de drie vergelijkingen 1) samen, na ze achtereenvolgens met $\frac{b-c}{\lambda x}$, $\frac{c-a}{\mu y}$, $\frac{a-b}{\nu z}$ te hebben vermenigvuldigd, dan vinden we

$$\frac{a(b-c)}{\lambda x} + \frac{b(c-a)}{\mu y} + \frac{c(a-b)}{\nu z} = 0.$$

Dit geeft dan door invoeging der met λ, μ, ν evenredige waarden van 2) de aangewezen uitkomst.

Gemakkelijk vinden we voor de vergelijkingen van p_a, p_b, p_c

$cy(b-r)+bz(c-r)=0$, $az(c-r)+cx(a-r)=0$, $bx(a-r)+ay(b-r)=0$

en dus voor die der meetkundige plaatsen van A″, B″, C″

$$\left.\begin{aligned} -a(b-c)yz+b(c-a)zx+c(a-b)xy&=0\\ a(b-c)yz-b(c-a)zx+c(a-b)xy&=0\\ a(b-c)yz+b(c-a)zx-c(a-b)xy&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Hieruit blijkt dan nog, dat deze kegelsneden elkaar twee aan twee in een der hoekpunten van driehoek ABC aanraken.

c) De kegelsnee K_a moet de zijden van driehoek ABC snijden in puntenparen bepaald door de vergelijkingen

$$(by+cz)^2=-\frac{a^2bcyz}{r(a+r)},\ (cz+ax)^2=\frac{ab^2czx}{r(b-r)},\ (ax+by)^2=\frac{abc^2xy}{r(c-r)}.$$

Dus is haar vergelijking

$$r(ax+by+cz)^2+abc\left\{\frac{ayz}{a+r}-\frac{bzx}{b-r}-\frac{cxy}{c-r}\right\}=0,$$

terwijl die van K'_a door omkeering van het teeken van r hieruit volgt. We hebben dus verder weer de meetkundige plaats te zoeken van de middelpunten der kegelsneden

$$\frac{ayz}{a+r}-\frac{bzx}{b-r}-\frac{cxy}{c-r}=0.$$

Wijl dit door omkeering van het teeken van a, r en x in $\Sigma\frac{ayz}{a+r}=0$ overgaat, is de meetkundige plaats der middelpunten voorgesteld door

$$\frac{a(b-c)}{x(-ax+by+cz)}+\frac{b(c+a)}{y(ax-by+cz)}-\frac{c(a+b)}{z(ax+by-cz)}=0.$$

Hieruit blijkt dus, dat de door den inzender gevondene doorloopende transformatie geheel van toepassing is. Want door omwisseling der teekens van a, r en x gaat O^4 in O^4_a, K in K'_a en K′ in K_a over.

d) De vergelijkingen van B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c zijn

$$bc(y+z)=r\Delta,\ ca(z+x)=r\Delta,\ ab(x+y)=r\Delta,$$

als Δ voor $ax+by+cz$ geschreven wordt. Dus is

$$\frac{ax}{a-r}+\frac{by}{b-r}+\frac{cz}{c-r}=0$$

de vergelijking van $A_1B_1C_1$ en $\Sigma\, au\,(cv - bw) = 0$ de tangentieele vergelijking der omhullende. Wijl $u = a$, $v = b$, $w = c$ hieraan voldoet, is deze omhullende een parabool.

Langs denzelfden weg vindt men voor de vergelijking der lijn, die door verandering van het teeken van r langs BC ontstaat,

$$-\frac{ax}{a+r} + \frac{by}{b-r} + \frac{cz}{c-r} = 0,$$

zoodat op deze de theorie der doorloopende transformatie van toepassing is, enz.

Opmerking. Het vraagstuk kan op de ruimte worden uitgebreid. Zoo vindt men met betrekking tot een viervlak ABCD, waarvan de zijvlakken door α, β, γ, δ, de ribben BC, CA, AB door a, b, c en de tegenoverliggende ribben door a_1, b_1, c_1 zijn voorgesteld, dat de twaalf punten A_b, enz. op het kwadratisch oppervlak

$$r\,(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t) - \Sigma \frac{a^2\beta\gamma yz}{a - r} - \delta t\, \Sigma \frac{a_1{}^2\alpha x}{a_1 - r} = 0$$

gelegen zijn en dit oppervlak weer concentrisch is met

$$\Sigma \frac{a^2\beta\gamma yz}{a - r} + \delta t\, \Sigma \frac{a_1{}^2\alpha x}{a_1 - r} = 0.$$

De bepaling van de ruimtekromme, die de meetkundige plaats der middelpunten is, voert echter tot groote berekeningen.

Vraagstuk II.

Op een vlak staan drie rechthoekige omwentelingskegels, waarvan de hoogten en dus ook de stralen der grondvlakken door l, m, n worden voorgesteld, terwijl A, B, C de middelpunten dier grondvlakken aanduiden. Men vraagt:

a) Te bewijzen, dat de drie kegels elkaar twee aan twee volgens een kegelsnee snijden.

b) Te bewijzen, dat deze drie kegelsneden twee punten gemeen hebben en de verbindingslijn dezer punten P, Q het vlak ABC in het machtpunt der drie grondcirkels der kegels snijdt.

c) Meetkundig de ligging van deze punten P en Q met betrekking tot het vlak ABC te bepalen. (É. Lemoine.)

Opgelost *door* Mej. C. H. de Haas, Mej. A. G. Wijthoff, T. J. Allersma, W. H. L. Janssen van Raay, F. F. Leupen, J. J. Stoel, H. de Vries en Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Wij nemen de lijn AB tot x-as en de loodlijn uit C op AB tot y-as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan. Verder onderstellen we, dat L $(a, 0, l)$, M $(b, 0, m)$, N $(0, c, n)$ de toppen der drie kegels zijn. Dan zijn de vergelijkingen der kegels:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda \equiv (x-a)^2+y^2-(z-l)^2=0, \quad \mu \equiv (x-b)^2+y^2-(z-m)^2=0,\\ \nu \equiv x + (y-c)^2-(z-n)^2=0\end{array}\right\} \ldots 1).$$

Door deze twee aan twee van elkaar af te trekken vinden we

$$\mu - \nu = 0, \; \nu - \lambda = 0, \; \lambda - \mu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2).$$

a) De vergelijkingen 2) zijn van den eersten graad. Dus snijden de kegels elkaar volgens vlakke krommen, d. i twee aan twee volgens drie kegelsneden.

b) Optelling der vergelijkingen 2) voert tot een identeit. Dus gaan de vlakken der drie kegelsneden door een zelfde lijn s en zijn de beide punten, waarin deze lijn een der drie kegels snijdt, aan de drie kegels gemeen.

We vinden het snijpunt S der lijn s met het vlak ABC door z in de vergelijkingen 2) nul te stellen. Dit zelfde resultaat vindt men door z nul te stellen in de drie vergelijkingen 1) en de uitkomsten twee aan twee door gelijkteekens te verbinden. Dus is S het machtpunt der drie grondcirkels.

c) Uit de vergelijkingen 2) blijkt onmiddellijk, dat deze drie vlakken achtereenvolgens in de middens der spiegelbeelden M′N′, N′L′, L′M′ van MN, NL, LM ten opzichte van het vlak ABC op deze spiegelbeelden loodrecht staan. Dus is s de loodlijn uit S neergelaten op het vlak L′M′N′. Dit leidt tot volgende constructie: Bepaal het machtpunt S der drie grondcirkels. Trek door S een lijn s loodrecht op het vlak V, dat symmetrisch ligt met het vlak LMN ten opzichte van het vlak ABC. Breng door s en den top L van een der kegels een vlak W. Bepaal de snijlijnen p en q van W met den kegel (L) en zoek de snijpunten P en Q van s met p en q.

Bedoelde constructie is in fig. 4 uitgevoerd volgens de regelen der beschrijvende meetkunde; het vlak ABC is het horizontale projectievlak, de rechte AB is de as van projectie.

Aanmerkingen. I. De kegels (M) en (N) snijden het vlak in het oneindige volgens denzelfden cirkel. Dus bestaat hun doorsnee uit dezen cirkel en een andere vlakke kromme, gelegen in een vlak loodrecht op het gemeenschappelijk symmetrievlak door de assen b, c (fig. 5). Dus is dit, wijl R en S tot de doorsnee behooren, het vlak, dat volgens RS loodrecht op het symmetrievlak staat. Hieruit volgt dan weer gemakkelijk, dat dit vlak door het midden van MN gaat en loodrecht staat op het spiegelbeeld M′N′ van MN, enz. (P. H. S.)

II. Construeeren we de doorsnee der beide kegels (M) en (N) door middel van hulpvlakken door de verbindingslijn MN der toppen, dan snijden deze hulpvlakken het vlak der grondcirkels (B) en (C) volgens een stralenbundel, die het uitwendig gelijkvormigheidspunt U (fig. 6) van (B en (C) tot top heeft. Daaruit blijkt dan, dat de horizontale projectie der doorsnee de meetkundige plaats is van het punt T, waarvoor TB′ en TC′ gelijk zijn, d. i. de meetkundige plaats van de middelpunten der cirkels, die (B) en (C) op gelijksoortige wijs aanraken. Zoo vindt men, dat de projectie van de gezochte punten P en Q de middelpunten zijn der beide cirkels, die (A), (B), (C) op gelijksoortige wijs aanraken. (H. d. V.)

Tot dit zelfde resultaat komen verschillende oplossers langs eenigzins anderen weg.

III. Door de afmetingen in de richting der z-as een gemeenschappelijke verhoudingsvergrooting te doen ondergaan blijkt gemakkelijk, dat de sub a) en b) genoemde stellingen doorgaan voor gelijkvormige, niet rechthoekige omwentelingskegels en c) daardoor op eenvoudige wijs verandert. (J. v. R., J. J. S.)

IV. Door sommige der kegeltoppen onder het horizontale vlak te onderstellen verkrijgt men de acht oplossingen van het vraagstuk van Apollonius. (H. d. V.)

V. Blijkbaar zijn P en Q toppen van rechthoekige omwentelingskegels, die de bij het vraagstuk van Apollonius voorkomende oplossingen tot grondcirkels hebben. In de cyclographie (vergelijk vraagstuk 169 van deel V) zijn deze grondcirkels de voorstellingen van P en Q. (H d. V., J. d. V)

VI. Is het mogelijk de punten P en Q en dus ook de projecties dier punten langs eenvoudigen weg te construeeren,

dan is tevens een eenvoudige constructie van het probleem van APOLLONIUS genomen. Dit nu was de geheime bedoeling van den inzender. Wij twijfelen er echter aan, of de boven gegeven constructie zijn verlangen naar een eenvoudiger handelwijs bevredigen zal. Aan hem laten wij het over dit punt met behulp van zijn *Géométrographie* (zie *Comptes rendus de l'Association française*, Congrès de Pau) nader te onderzoeken.

Vraagstuk III.

Men vraagt de waarde van

$$\int \mathrm{Tg}\,(x - a_1)\,\mathrm{Tg}\,(x - a_2)\,\mathrm{Tg}\,(x - a_3)\ldots\mathrm{Tg}\,(x - a_n)\,dx.$$

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Stelt men in de vervorming

$$\mathrm{Tg}\,p\,\mathrm{Tg}\,q = \mathrm{Cot}\,(p - q)\,(\mathrm{Tg}\,p - \mathrm{Tg}\,q) - 1$$

van de bekende formule voor $\mathrm{Tg}\,(p - q)$

$$p = x - a_1 \quad , \quad q = x - a_2,$$

dan gaat zij over in

$$\mathrm{Tg}(x-a_1)\mathrm{Tg}(x-a_2)=\mathrm{Cot}(a_2-a_1)\mathrm{Tg}(x-a_1)+\mathrm{Cot}(a_1-a_2)\mathrm{Tg}(x-a_2)-1.$$

Door herhaalde toepassing van deze formule kan een product van tangenten van $(x - a_k)$ herleid worden tot een som, waarin elke term slechts een van x afhangende tangens bevat. Dus is

$$\mathrm{Tg}\,(x - a_1)\,\mathrm{Tg}\,(x - a_2)\ldots\mathrm{Tg}\,(x - a_n) =$$
$$\mathrm{A}_1\mathrm{Tg}\,(x - a_1) + \mathrm{A}_2\,\mathrm{Tg}\,(x - a_2) + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{Tg}\,(x - a_n) + \mathrm{B} \quad \ldots \quad 1)$$

en derhalve de verlangde integraal voorgesteld door

$$\mathrm{A}_1 \log \mathrm{Sec}\,(x - a_1) + \ldots + \mathrm{A}_n \log \mathrm{Sec}\,(x - a_n) + \mathrm{B}x + \mathrm{C}.$$

2. Ter bepaling van de coëfficiënten A stelle men in 1) na vermenigvuldiging met $\mathrm{Cot}\,(x - a_1)$ voor x de waarde $a_1 + \frac{1}{2}\pi$ in de plaats; dit geeft

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{Cot}\,(a_2 - a_1)\,\mathrm{Cot}\,(a_3 - a_1)\ldots\mathrm{Cot}\,(a_n - a_1)$$

en hieruit zijn A_2, $A_3 \ldots A_n$ door verwisseling van indices af te leiden.

Om B te vinden stelle men in 1) voor $\mathrm{Tg}\, x$ de onbestaanbare eenheid $\sqrt{-1}$ in de plaats, waardoor alle uitdrukkingen $\mathrm{Tg}\,(x - a_k)$ deze waarde verkrijgen. Men vindt dan

$$(\sqrt{-1})^n = \sqrt{-1}\ \Sigma A + B$$

Dus is

$$\text{voor } n \text{ even } : \Sigma A = 0 \quad \text{en} \quad B = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{voor } n \text{ oneven} : \Sigma A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{en} \quad B = 0.$$

In het algemeen is dus $B = \mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} n\pi$.

Aanmerking van den Heer Neuberg. Ook met behulp van de theorie der ontbinding van rationale breuken in enkelvoudige breuken komt men tot de vergelijking 1).

Vraagstuk IV.

In een vlak zijn vier lijnen a, b, c, d, een snijlijn l en de punten A, B, C, D, die in een zekere involutie op l met de snijpunten van l en a, b, c, d overeenkomen, gegeven. Door telkens een der vier lijnen u ($u = a, b, c, d$) en het gelijknamige punt U (U = A, B, C, D) weg te laten, verkrijgt men vier malen achtereen een figuur bestaande uit drie lijnen p, q, r met drie op een rechte lijn gelegen punten P, Q, R. Voor elk dezer vier figuren gaan de lijnen ($q{\cdot}r$, P), ($r{\cdot}p$, Q), ($p{\cdot}q$, R) door een zelfde punt S; bovendien liggen de vier punten S op een rechte lijn. Men vraagt dit te bewijzen en merkwaardige bijzondere gevallen dezer stelling aan te geven. (J. Neuberg.)

Opgelost *door* J. J. Stoel *en* H. de Vries.

Oplossing.

1. Zijn A_1, B_1, C_1, D_1 (fig. 7) de snijpunten van a, b, c, d met l en heeft men A en B willekeurig aangenomen, waardoor de involutie bepaald is, dan vindt men het punt C met behulp van de bekende stelling, dat de drie paren overstaande zijden van een volledigen vierhoek een willekeurige rechte in drie puntenparen eener involutie ontmoeten, als volgt. Verbind

het punt A met het punt bc, het punt B met het punt ca en het snijpunt S_1 dezer nieuwe lijnen met het punt ab, dan wordt l door de laatst verkregen lijn in C gesneden. Deze constructie leert dan tevens, dat de drie lijnen (bc, A), (ca, B), (ab, C) door een zelfde punt S_1 gaan. Evenzoo geeft combinatie van d met a en b het punt S_2, van d met c en a het punt S_3 en van d met b en c het punt S_4. In alle drie gevallen vindt men natuurlijk hetzelfde punt D.

Om te bewijzen, dat de vier punten S op een zelfde rechte g liggen, beschouwen we de drie puntenparen (B, B′), (C, C′), (D, D′), die op l en a twee projectieve puntenreeksen bepalen. De perspectief-as dezer reeksen is de verbindingslijn der drie punten

$$(BC', B'C) = S_1,\ (BD', B'D) = S_2,\ (CD', C'D) = S_3.$$

Dus liggen S_1, S_2, S_3 op een zelfde rechte g. Evenzoo volgt uit de beschouwing der door (A, A″), (B, B″), (C, C″) op l en d bepaalde projectieve puntenreeksen, dat S_2, S_3, S_4 op een zelfde rechte liggen. Dus liggen de vier punten S op een zelfde rechte g.

Bijzondere gevallen dezer stelling verkrijgt men, òf door van de involutie bijzondere paren aan te nemen als dubbelpunten, centraalpunt en punt in het oneindige, één dubbelpunt in het oneindige, enz., òf door de gegeven rechten gedeeltelijk evenwijdig aan elkaar aan te nemen, òf met behulp van beide middelen.

Aanmerkingen I. Als l de lijn in het oneindige is en de involutie op l_∞ bepaald wordt door een om zijn hoekpunt draaienden rechten hoek, zijn de vier punten S de hoogtepunten der vier driehoeken, die men uit de vier lijnen a, b, c, d vormen kan en liggen deze punten dus op de richtlijn der parabool, die deze vier lijnen aanraakt. Dit bijzondere geval heeft den inzender tot het bovenstaande vraagstuk geleid.

II. Construeert men bij een willekeurig punt E van l in de beide paren van projectieve puntenreeksen op (a, l) en (d l) met behulp van de gemeenschappelijke perspectief-as g beide overeenkomstige punten E′, E″, dan gaat de lijn E′E″ of e door het in de involutie op l aan E toegevoegde punt E_1. Onder alle lijnen door E_1 komt dan alleen aan e de eigenschap toe, dat de punten S, die men verkrijgt door haar met twee

der vier lijnen a, b, c, d te combineeren, alle op g liggen. Door ieder punt van l gaat steeds een, doch ook slechts een zoodanige lijn. Al deze lijnen omhullen de kegelsnee, die de vijf lijnen a, b, c, d, l aanraakt. Werkelijk bewijst men gemakkelijk, dat in de projectieve puntenreeksen (B'C'E'F'...) en (B"C"E"F"...) de punten A_1 en D_1 met elkaar overeenkomen. (H. D. V.)

Vraagstuk V.

Met betrekking tot een gegeven driehoek ABC beschouwt men twee punten M_1 en M_2, wier voetpuntsdriehoeken $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ en $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ in een zelfde kegelsnee K^2 beschreven zijn. Gevraagd de meetkundige plaats van M_2, als M_1 gegeven is, en het karakter van de reeks der overeenkomstige kegelsneden K^2. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. NEUBERG *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossingen.

I. 1. We nemen driehoek ABC als assendriehoek aan en stellen de normale afstandscoördinaten van M_1 en M_2 door (x_1, y_1, z_1) en (x_2, y_2, z_2) voor. Verder duiden we de kegelsnee K^2 door de vergelijking

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 + 2pyz + 2qzx + 2rxy = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 1)$$

aan, waarbij dan de coördinaten van α_1 en α_2 bepaald worden door de vergelijkingen

$$x = 0, \; Qy^2 + 2pyz + Rz^2 = 0.$$

Zijn nu λ_1 en λ_2 de uit de laatste vergelijking volgende waarden van de verhouding y/z, nemen wij in aanmerking dat de coördinaten van α_1 en α_2 door

$$(0, \; y_i + x_i \text{ Cos C}, \; z_i + x_i \text{ Cos B}) \; . \; . \; . \; (i = 1{,}2)$$

worden voorgesteld en geven we aan μ_1, μ_2, voor z/x en aan ν_1, ν_2 voor x/y de overeenkomstige beteekenis van λ_1, λ_2 voor y/z, dan vinden we de betrekkingen

$$\lambda_i = \frac{y_i + x_i \text{ Cos C}}{z_i + x_i \text{ Cos B}}, \; \mu_i = \frac{z_i + y_i \text{ Cos A}}{x_i + y_i \text{ Cos C}}, \; \nu_i = \frac{x_i + z_i \text{ Cos B}}{y_i + z_i \text{ Cos A}},$$
$$(i = 1{,}2)$$

$$2p = -Q(\lambda_1 + \lambda_2), \; 2q = -R(\mu_1 + \mu_2), \; 2r = -P(\nu_1 + \nu_2),$$
$$R = Q\lambda_1\lambda_2, \quad P = R\mu_1\mu_2, \quad Q = P\nu_1\nu_2.$$

Hieruit volgt dus $\lambda_1\lambda_2 . \mu_1\mu_2 . \nu_1\nu_2 = 1$. Stellen we nu kortheidshalve $\lambda_1\mu_1\nu_1$ door k voor en voegen we in de betrekking $k\lambda_2\mu_2\nu_2 = 1$ voor λ_2, μ_2, ν_2 de boven gegeven waarden in, dan vinden we met weglating der indices voor de vergelijking der meetkundige plaats van M_2

$$k(z + y \text{ Cos A})(x + z \text{ Cos B})(y + x \text{ Cos C}) =$$
$$(y + z \text{ Cos A})(z + x \text{ Cos B})(x + y \text{ Cos C}) \ldots \quad 2).$$

Dus is de meetkundige plaats een door A, B, C gaande kubische kromme.

Ligt M_1 op den omgeschreven cirkel van driehoek ABC, dan is, ten gevolge van de betrekking $ay_1z_1 + bz_1x_1 + cx_1y_1 = 0$, waarin a, b, c als naar gewoonte de zijden van driehoek ABC aanduiden, $k = -1$. Derhalve is M_2 dan ook op den omgeschreven cirkel gelegen. Werkelijk gaat 2) dan na deeling door $ax + by + cz$ in $ayz + bzx + cxy = 0$ over en splitst de kubische kromme zich dus in de lijn l_∞ en den omgeschreven cirkel. Volgens de bekende eigenschap der rechten van SIMSON splitst K^2 zich dan in twee rechte lijnen. (T. J. A.)

2. Tusschen de coëfficiënten van 1) bestaan de betrekkingen

$$Q\lambda_1^2 + 2p\lambda_1 + R = 0,\ R\mu_1^2 + 2q\mu_1 + P = 0,\ P\nu_1^2 + 2r\nu_1 + Q = 0.$$

Dus gaat 1) door eliminatie van p, q, r over in

$$Px\left(x - \nu_1 y - \frac{z}{\mu_1}\right) + Qy\left(y - \lambda_1 z - \frac{x}{\nu_1}\right) + Rz\left(z - \mu_1 x - \frac{y}{\lambda_1}\right) = 0 \ldots 3).$$

Dus zijn de tweede snijpunten van deze kegelsnee met BC, CA, AB bepaald door de betrekkingen

$$\frac{y}{z} = \frac{R}{\lambda_1 Q},\ \frac{z}{x} = \frac{P}{\mu_1 R},\ \frac{x}{y} = \frac{Q}{\nu_1 P}.$$

Verdeelen deze punten α_2, β_2, γ_2 de zijden BC, CA, AB in stukken (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), dan gelden dus de betrekkingen

$$\frac{ca_2}{ba_1} = \frac{R}{\lambda_1 Q},\ \frac{ab_2}{cb_1} = \frac{P}{\mu_1 R},\ \frac{bc_2}{ac_1} = \frac{\nu_1 P}{Q}.$$

Wijl nu

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2,$$

of

$$a(a_1 - a_2) + b(b_1 - b_2) + c(c_1 - c_2) = 0,$$

of

$$a^2\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}+b^2\frac{b_1-b_2}{b_1+b_2}+c^2\frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}=0$$

de voorwaarde uitdrukt, dat $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ een voetpuntsdriehoek is, zijn de coëfficiënten P, Q, R van 3) verbonden door de betrekking

$$a^2\frac{c\lambda_1 Q-bR}{c\lambda_1 Q+bR}+b^2\frac{a\mu_1 R-cP}{a\mu_1 R+cP}+c^2\frac{b\nu_1 P-aQ}{b\nu_1 P+aQ}=0\quad .\ .\ 4).$$

Uit 3) en 4) volgt nu het karakter der reeks van kegelsneden K^2. Is in 3) de substitutie $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ volvoerd, waarbij x', y', z' de coördinaten van een gegeven punt N zijn, dan blijkt uit 3) en 4), dat er door dit punt drie kegelsneden der reeks gaan; want deze vergelijkingen zijn in P, Q, R homogeen van den eersten en den derden graad.

Verder is de tangentiëele vergelijking van 3)

$$\begin{vmatrix} -2P\ , & P\nu_1+\dfrac{Q}{\nu_1}, & R\mu_1+\dfrac{P}{\mu_1}, & u \\ P\nu_1+\dfrac{Q}{\nu_1}, & -2Q\ , & Q\lambda_1+\dfrac{R}{\lambda_1}, & v \\ R\mu_1+\dfrac{P}{\mu_1}, & Q\lambda_1+\dfrac{R}{\lambda_1}, & -2R\ , & w \\ u\ , & v\ , & w\ , & 0 \end{vmatrix}=0$$

en dus homogeen van den tweeden graad in P, Q, R. Wijl ze onafhankelijk is van 4), raken dus zes kegelsneden der reeks een gegeven lijn $(u,\ v,\ w)$ aan.

Deze beide uitkomsten zijn in overeenstemming met de formules van SCHUBERT. Zijn de gezochte getallen p en l en stellen δ en τ het aantal in twee lijnen of in twee punten ontaardende kegelsneden der reeks voor, dan gelden de betrekkingen

$$3p=2\tau+\delta\quad ,\quad 3l=\tau+2\delta.$$

Hierin nu is $\tau=0$ en dus $l=2p$. Werkelijk zijn er in de reeks negen in twee lijnen ontaardende kegelsneden. Snijden de lijnen $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$ de zijden BC, CA, AB in α_3, β_3, γ_3, dan zijn het de drie drietallen van kegelsneden door α_3, door β_3, door γ_3. (P. H. S.)

II. 3. De voorwaarde, die uitdrukt, dat de zes punten α_1, α_2,

β_1, β_2, γ_1, γ_2 op een kegelsnee liggen, is:

$$\frac{B\alpha_1 \cdot B\alpha_2}{C\alpha_1 \cdot C\alpha_2} \cdot \frac{C\beta_1 \cdot C\beta_2}{A\beta_1 \cdot A\beta_2} \cdot \frac{A\gamma_1 \cdot A\gamma_2}{B\gamma_1 \cdot B\gamma_2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Stellen nu $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ (fig. 8) de driehoeken voor, die achtereenvolgens gevormd worden door de loodlijnen in A op AB, B op BC, C op CA en in A op AC, B op BA, C op CB, dan zijn $B\alpha_i$, $C\beta_i$, $A\gamma_i$ en $C\alpha_i$, $A\beta_i$, $B\gamma_i$ ($i = 1, 2$) de afstanden van M_1 en M_2 tot de zijden van de driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$. Duiden we deze grootheden voor M_1 door (x_1, y_1, z_1) en (x_2, y_2, z_2), voor M_2 door (X_1, Y_1, Z_1) en (X_2, Y_2, Z_2) aan, dan gaat 5) over in

$$x_1y_1z_1X_1Y_1Z_1 = x_2y_2z_2X_2Y_2Z_2 \quad \ldots\ldots \quad 6),$$

d. i. in de vergelijking der meetkundige plaats van M_2 met betrekking tot de beide coördinatendriehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$. Zoo als de substitutie

$$X_2 = a - X_1, \; Y_2 = b - Y_1, \; Z_2 = c - Z_1$$

onmiddellijk leert, is deze meetkundige plaats een kubische kromme, gaande door de negen snijpunten van de zijden der driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$. Deze kromme gaat dus door A, B, C. Verder heeft zij de loodlijnen op de zijden van driehoek ABC tot asymptotenrichtingen. Eindelijk gaat zij door de punten A_3, B_3, C_3 op den omgeschreven cirkel diametraal tegenover A, B, C gelegen. En terwijl bij A, B, C werkelijke kegelsneden K^2 behooren, vinden wij bij A_3, B_3, C_3 de drie lijnenparen (BC, $\beta_1\gamma_1$), (CA, $\gamma_1\alpha_1$), (AB, $\alpha_1\beta_1$).

Ter bepaling van de asymptoot loodrecht op BC stellen we in 6)

$$\frac{Y_1}{Y_2} = 1, \qquad \frac{Z_1}{Z_2} = 1,$$

waardoor we vinden

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_2y_2z_2}{x_1y_1z_1}.$$

Hierdoor is het snijpunt van deze asymptoot met BC aangewezen. Is dit α' en hebben β' en γ' de overeenkomstige beteekenis voor de asymptoten loodrecht op CA en AB met betrekking tot deze zijden, dan is dus

$$\frac{B\alpha'}{C\alpha'} = \frac{C\beta'}{A\beta'} = \frac{A\gamma'}{B\gamma'}.$$

Dus deelen de drie asymptoten de zijden van driehoek ABC, op welke ze loodrecht staan, in denzelfden zin rondgaande in dezelfde verhouding.

Ter bepaling van het aantal der door een gegeven punt N gaande kegelsneden der reeks beschouwen we den bundel der door α_1, β_1, γ_1, N gaande kegelsneden, die door de tweede snijpunten α_2, β_2, γ_2 met BC, CA, AB op deze zijden van driehoek ABC drie projectieve puntenreeksen bepalen. De meetkundige plaats van het snijpunt S der loodlijnen α_2S en β_2S in α_2 en β_2 op BC en CA opgericht is een kegelsnee σ^2. Evenzoo is de meetkundige plaats van het snijpunt T der loodlijnen α_2T en γ_2T in α_2 en γ_2 op BC en AB opgericht een kegelsnee τ^2. Behalve het oneindig ver gelegen punt der loodlijn op BC (gemeenschappelijk toppunt van twee der bundels evenwijdige stralen) hebben σ^2 en τ^2 nog drie punten gemeen. Dus is $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ een voetpuntsdriehoek voor drie kegelsneden der bundels en gaan er door N drie kegelsneden van de reeks.

Beschouwen we nu een gegeven lijn n, dan is het duidelijk, dat tusschen de punten N_1, N_2, waarin deze door de kegelsneden der reeks gesneden wordt, een symmetrische verwantschap (3, 3) bestaat. Dus zijn er zes coïncidenties. Wijl er nu geen kegelsneden in de reeks voorkomen, die uit twee samengevallen rechte lijnen bestaan, raken zes kegelsneden uit de reeks de lijn n aan. (J. N.)

4. Aanmerking der redactie. Men zou kunnen meenen, dat het laatste resultaat ook langs den volgenden weg te bereiken is.

De kegelsneden, die door α_1, β_1, γ_1 gaan en een gegeven lijn n aanraken, doen door de tweede snijpunten α_2, β_2, γ_2 met BC, CA, AB op deze zijden puntenreeksen in overeenkomst (2, 2) ontstaan. De meetkundige plaats van het snijpunt S der loodlijnen α_2S en β_2S in overeenkomstige punten α_2 en β_2 op BC en CA opgericht is dus een kromme σ^4. Evenzoo is de meetkundige plaats van het snijpunt T der loodlijnen α_2T en γ_2T in overeenkomstige punten α_2 en γ_2 op BC en AB opgericht een kromme τ^4. Behalve het voor vier snijpunten tellende oneindig ver gelegen punt der loodlijn op BC, dat gemeenschappelijk dubbelpunt der beide krommen is, hebben deze krommen 12 punten met elkaar gemeen. Deze punten behoeven echter niet alle in verband te staan met kegelsneden

uit de reeks. Want de β_2 en γ_2, die bij een snijpunt en dus bij een zelfde α_2 behooren, behoeven niet bij elkaar te behooren. Anders gezegd, de derde kromme, die de meetkundige plaats is van het snijpunt der bij elkaar behoorende lijnen $\beta_2 S$ en $\gamma_2 T$, gaat, zooals uit het voorgaande volgt, slechts door zes der 12 snijpunten van σ^4 en τ^4.

Vraagstuk VI.

In een zelfde vlak zijn twee congruente parabolen $P_1{}^2$ en $P_2{}^2$ met de assen in dezelfde richting langs elkaar geplaatst. Twee koorden A_1B_1 en A_2B_2 van $P_1{}^2$ raken $P_2{}^2$ en snijden elkaar in P, terwijl de rechten A_1A_2 en B_1B_2 het punt Q en de rechten A_1B_2 en A_2B_1 het punt R gemeen hebben. Men vraagt de meetkundige plaats der punten Q en R en die van de middens M_q en M_r van PQ en PR, als P een gegeven kromme beschrijft.

(T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF *en* T. J. ALLERSMA.

Oplossing.

We stellen de parabolen voor door de vergelijkingen

$$P_1{}^2 \equiv y^2 - 2p\,(x + a) = 0\,,\quad P_2{}^2 \equiv y^2 - 2px = 0.$$

Zijn nu $(x_1\,,\ y_1)$ de coördinaten van P, dan zijn de beide raaklijnen uit P begrepen in de vergelijking

$$p\,(x - x_1)^2 - 2y_1\,(x - x_1)\,(y - y_1) + 2x_1\,(y - y_1)^2 = 0.$$

Dus is de vergelijking van alle kegelsneden door A_1, B_1, A_2, B_2

$$p\,(x - x_1)^2 - 2y_1\,(x - x_1)\,(y - y_1) + 2x_1\,(y - y_1)^2 + k\,(y^2 - 2px - 2pa) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Bestaat 1) uit twee rechten, dan is het middelpunt op de kromme gelegen en bestaan dus de drie vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} px - y_1y + y_1{}^2 - px_1 - pk = 0 \\ -y_1x + (2x_1 + k)\,y - x_1y_1 = 0 \\ (y_1{}^2 - px_1 - pk)\,x - x_1y_1y + p\,(x_1{}^2 - 2ak) = 0 \end{array}\right\}$$

naast elkaar. Door eliminatie van k volgt hieruit

$$(y - y_1)\,(px - y_1y + px_1) = 0\,,$$

$$(x - x_1)\,(px - y_1y + px_1 + 2ap) - 2ay_1\,(y - y_1) = 0\,,$$

waaraan voldaan wordt door de drie volgende onderstellingen

$$1^0 \ldots \left.\begin{array}{l} x = x_1 \\ y = y_1 \end{array}\right\}, \quad 2^0 \ldots \left.\begin{array}{r} px - y_1 y + px_1 + 2ap = 0 \\ y = y_1 \end{array}\right\},$$

$$3^0 \ldots \left.\begin{array}{ll} px - y_1 y + y_1^2 - px_1 & = 0 \\ px - y_1 y + px_1 & = 0 \end{array}\right\}.$$

De eerste onderstelling geeft het punt P, de tweede het punt Q, terwijl de derde de evenwijdigheid van A_1B_2 en A_2B_1 bewijst, tenzij $y_1^2 - 2px_1 = 0$ is en P op P_2^2 ligt. Dus liggen R en M_r oneindig ver, terwijl voor de coördinaten van Q en M_q gevonden wordt

$$Q \ldots \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y_1^2 - px_1 - 2ap}{p} \\ y = y_1 \end{array}\right\}, \quad M_q \ldots \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y_1^2 - 2ap}{2p} \\ y = y_1 \end{array}\right\}.$$

Als P de kromme $f(x, y) = 0$ doorloopt, beschrijft Q derhalve de kromme $f\left(\dfrac{y^2 - px - 2ap}{p}, y\right) = 0$, terwijl M_q onafhankelijk van de kromme $f(x, y) = 0$ steeds de parabool P_1^2 doorloopt.

Aanmerkingen van de redactie. I. Als het punt P op de gemeenschappelijke as der parabolen ligt, volgt de evenwijdigheid van A_1B_2 en A_2B_1 uit de symmetrie. Evenzoo blijkt bij willekeurige ligging van P met behulp van de gemeenschappelijke middellijn door P en de aan deze middellijn toegevoegde richting, dat A_1B_2 en A_2B_1 beide deze richting hebben.

II. Als P de rechte lijn AB doorloopt, doorloopt M_q de parabool P_1^2 en Q dus de parabool, die men verkrijgt door de van AB af tot P_1^2 in de richting der middellijnen gemeten segmenten te verdubbelen. Al de op deze wijze bij de verschillende lijnen AB behoorende parabolen hebben dus met P_1^2 en P_2^2 de richting der as gemeen en een dubbel zoo groote parameter. Werkelijk behoort bij de rechte $lx + my + n = 0$ de kromme

$$\left(y + \frac{pm}{2l}\right)^2 = p\left(x + 2a - \frac{n}{l} + \frac{pm^2}{4l^2}\right).$$

En als de rechte draait om het punt (x', y'), doorloopt de top der overeenkomstige parabool de parabool

$$(y - y')^2 = -2a\left\{x - \frac{y'^2 - px' - 2pa}{2a}\right\},$$

enz.

Vraagstuk VII.

Men vraagt de polen en nulpunten der beide functies

$$z = \frac{x^2}{(x-y)(y-1)} \quad , \quad t = \frac{y^2 - y + x}{(x-y)\,x}$$

te bepalen, als tusschen x en y de betrekking

$$y^2 (y-1)^2 + xy(y-1) + x^4 = 0$$

van Vraagstuk 8 van deel IV bestaat. (Dr. F. DE BOER).

Opgelost *door* Dr. F. DE BOER.

Oplossing.

Stellen we in aansluiting aan de notatie van vraagstuk 8 van deel IV de punten $x = 0$, waarvoor y en $\frac{dy}{dx}$ achtereenvolgens de waarden (0, 0), (0, 1), (1, 0) (1, 1) hebben, door O_1, O_2, O_3, O_4 en het punt $x = \frac{1}{2}$ $(y = \frac{1}{2})$ door B voor, dan blijkt vooreerst onmiddellijk, dat de teller van z elk der vier punten O tweemaal tot nulpunt heeft. Verder vindt men uit $x = y$ en de gegeven betrekking driemaal $x = 0$, $y = 0$ en eenmaal $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Van de eerstgenoemde drie punten ligt er één in O, wijl de afgeleide van $x - y$ in dat punt niet nul is, en zijn de beide andere dus in O_2 vereenigd. Van de nulpunten van den tweeden factor des noemers liggen er drie in O_3 en een in O_4. De functie z heeft dus twee nulpunten, nl. O_1 en O_4 en twee polen nl. O_3 en B.

Op dezelfde wijs vindt men, dat de functie t twee in O_4 samenvallende nulpunten en O_1 en B tot polen heeft.

Vraagstuk VIII.

Men vraagt de betrekkingen aan te wijzen, die er tusschen de vier in het voorgaande vraagstuk voorkomende veranderlijken x, y, z, t twee aan twee bestaan. (Dr. F. DE BOER.)

Opgelost *door* Dr. F. DE BOER.

Oplossing.

1. Tusschen x en z moet een betrekking bestaan, die in x van den tweeden en in z van den vierden graad is. Werkelijk geeft eliminatie van y uit

$$y^2(y-1)^2 + xy(y-1) + x^4 = 0 \quad , \quad z = \frac{x^2}{(x-y)(y-1)}$$

dan ook

$$(2z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 1)x^2 - z^2(z^2 - 1)x + z^2(z-1) = 0 \ldots 1).$$

2. Om de betrekking tusschen y en z te vinden kan men op dezelfde wijze x elimineeren. Doch men kan ook als volgt te werk gaan.

Daar de polen van y samenvallen met die van x (in het oneindige), moet de coëfficiënt van y^2 gelijk zijn aan dien van x^2. In de nulpunten van y, waarvan er drie in O_1 samenvallen en het vierde in O_2 ligt (zie het vorige vraagstuk), heeft z driemaal de waarde nul en eenmaal de eenheid. De bekende term moet dus op een constanten factor na gelijk zijn aan $z^3(z-1)$. Dat z in O_2 de eenheid is, vindt men door teller en noemer van de uitdrukking voor z tweemaal te differentieeren; doch het volgt ook wel uit 1), wijl deze vergelijking aantoont, dat in de vier nulpunten van x de z tweemaal nul, eenmaal oneindig en eenmaal de eenheid wordt. Dus moet de betrekking tusschen y en z de gedaante

$$(2z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 1)y^2 + (a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4)y + \\ + a_5 z^3(z-1) = 0$$

aannemen. Rangschikt men nu naar z, dan moet de coëfficiënt van z^4 de vorm $(2y-1)(y-1)$ zijn; want y heeft in de polen van z de waarden $\frac{1}{2}$ en 1. Dus heeft men $a_0 = -3$, $a_5 = 1$. De nieuwe bekende term moet verder door y en $y-1$ deelbaar zijn. Dus is $a_4 = -1$. Van de vier waarden van z voor $y = 1$ moeten er drie oneindig zijn; dus moeten $-4y^2 + a_1 y - 1$ en $2y^2 + a_2 y$ door $y - 1$ deelbaar zijn. Hieruit volgt $a_1 = 5$, $a_2 = -2$. Eindelijk blijkt uit 1), dat het z-vlak een vertakkingspunt heeft in $z = 1$; dus moet de vergelijking in y voor $z = 1$ twee gelijke wortels hebben en derhalve $a_3 = 1$ zijn. Dus is de gezochte betrekking

$$(2z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 1)y^2 + (-3z^4 + 5z^3 - 2z^2 + z - 1)y + z^3(z-1) = 0 \ldots 2).$$

3. Om de betrekking tusschen y en t te vinden merken we op, dat t in de vier polen van y de waarde $\frac{\mu^2}{1-\mu}$ heeft, als μ een der vier vierdemachtswortels uit de negatieve eenheid aanduidt. Dus zijn deze waarden van t de wortels van de vergelijking $2t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1 = 0$. Het eerste lid dezer vergelijking is dus de coëfficiënt van y^2. Van de nulpunten van y liggen er drie in O_1, waar t oneindig is; de bekende term is dus van den eersten graad in t. Derhalve kunnen wij stellen

$$(2t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1)\, y^2 + (b_0 t^4 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4)\, y + b_5 t + b_6 = 0.$$

Voor $t = 0$ moet y tweemaal de eenheid zijn; dus is $b_4 = -2$, $b_6 = 1$. In O_3 is t de negatieve eenheid; voor $y = 1$ heeft t behalve de reeds gebruikte waarde nul dus nog driemaal de waarde -1. Dus vinden we

$$\frac{2 + b_0}{1} = \frac{4 + b_1}{3} = \frac{2 + b_2}{3} = \frac{b_3 + b_5}{1}.$$

Neemt men nu nog in aanmerking, dat de polen van t aan $y = 0$ en $y = \frac{1}{2}$ beantwoorden, dan vindt men $b_0 = b_1 = -1$, $b_2 = b_3 + b_5 = 1$.

Om eindelijk nog een betrekking te vinden, kan men de waarde van t in O_2 bepalen. Dit kan geschieden door teller en noemer van de uitdrukking voor t driemaal te differentieeren en de dan optredende differentiaalquotienten van y te berekenen. Om dit te ontgaan herleiden we de uitdrukking van t eerst tot

$$t = -\frac{x\,(x + y - 1)}{x^2 + y\,(y - 1)}.$$

Hieruit vindt men $t = -1$ door teller en noemer slechts eenmaal te differentieeren. Zoodoende blijkt dat $b_5 = 1$ en $b_3 = 0$ is. Derhalve is de gezochte betrekking

$$(2t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1)\, y^2 - (t^4 + t^3 - t^2 + 2)\, y + t + 1 = 0 \ldots 3).$$

4. Langs denzelfden weg of door rechtstreeksche eliminatie vindt men

$$(2t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 1)\, x^2 - (t^4 + 4t^3 + 5t^2 + 2t)\, x + t\,(t + 1)^2 = 0 \ldots 4).$$

5. De betrekking tusschen z en t moet in beide veranderlijken van den tweeden graad zijn. Door rechtstreeksche eliminatie

vindt men wel een betrekking van hoogeren graad, die de gezochte vergelijking als factor bevat. Merkt men echter op, dat z in de beide nulpunten van t nul is en in de eene pool nul, in de andere oneindig, dan kan men de betrekking reeds in den vorm

$$zt^2 + (c_0z^2 + c_1z + c_2)\, t + c_3z^2 = 0$$

schrijven. In de polen van z is verder $t = \infty$ en $t = -1$. Dus is $c_3 = c_0$. In O_2 is $z = 1$, $t = -1$, dus is $c_1 + c_2 = 1$. En ter bepaling van de nog overschietende constanten kan men nu allerlei wegen inslaan. Men kan bijv. opmerken, dat voor $x = \infty$, $y = \infty$ gevonden wordt

$$t = \frac{\mu^2}{1-\mu} \quad , \quad z = \frac{1}{\mu\,(1-\mu)},$$

waarin μ de boven aangewezen beteekenis heeft; de uitkomst der substitutie in de ondersteide vergelijking moet dan voor alle vier waarden van μ een identiteit zijn. Ook kan men uitgaan van de bewering, dat de oplossing naar x, y of t denzelfden wortelvorm in z moet opleveren. Nu vindt men uit 1) door x op te lossen den wortelvorm $\sqrt{z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 1}$. Dus zal ook in $(c_0z^2 + c_1z + c_2)^2 - 4c_3z^3$ de eerste macht van z moeten ontbreken, zoodat, wijl $c_2 = 0$ de vergelijking door z deelbaar maken zou, $c_1 = 0$ moet zijn. Hieruit volgt $c_0 = 1$ en ook $c_2 = 1$. Dus is de einduitkomst

$$zt^2 + (z^2 + 1)\, t + z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

Vraagstuk IX.

Als x, y, z, t dezelfde beteekenis hebben als in de beide voorgaande vraagstukken, vraagt men een rationale uitdrukking voor x in y en z, voor x in y en t, voor z in x en t, en voor t in x en z.

(Dr. F. de Boer.)

Opgelost *door* Dr. F. de Boer.

Oplossing.

Leiden we de vergelijkingen van het vorige vraagstuk door eliminatie af, dan vinden we in den loop der bewerking de gevraagde uitdrukkingen. Zij zijn

$$x=\frac{(2y-1)z^2-2yz-(y-1)}{yz+y-1}(1-y)z\,..\,1),\quad x=\frac{(t^3+t^2+1)y-1}{(t^2-1)ty-1}y\,..\,2),$$

$$z=\frac{(t-1)x}{(2t+1)x-(t-1)}\,.\,.\,.\,.\,.\,3),\quad t=\frac{-zx+z-1}{(2z-1)x-z}\,.\,.\,.\,4).$$

Men kan deze functies echter ook uit haar polen en nulpunten opbouwen. Voor 3) mag dit hier worden aangewezen.

De dubbelpunten van t op het x-vlak of van x op het t-vlak zijn $x=0$, $t=-1$ (O_2 en O_3) en $x=\frac{2}{3}$, $t=1$. Het differentiaalquotient $\frac{\partial t}{\partial x}$ heeft in O_2 de waarde $+1$, in O_3 de waarde -1, zoo als blijkt bij differentiatie van de vergelijking, die in vraagstuk 7 de t bepaalt.

We kunnen nu voor z een rationale breuk in t en x aannemen, waarvan de noemer de beide dubbelpunten van t op het x-vlak en de in O_3 gelegen pool van z ($x=0$, $t=-1$, $t'=-1$) tot nulpunten heeft. De andere pool van z ($x=\frac{1}{2}$, $t=\infty$) kunnen wij dan op andere wijs in rekening brengen, wijl de noemer $a_0\,tx+a_1\,x+a_2\,t+a_3$ constanten genoeg bevat. Nu verschaft het dubbelpunt $x=0$, $t=-1$ de betrekking $a_2=a_3$. Bovendien moet het punt $x=0$, $t=-1$, $t'=-1$ nog een tweede maal als nulpunt van den noemer fungeeren. Wijl de afgeleide nu ook verdwijnen moet, geeft dit $a_0t'x+a_0t+a_1+a_2t'=0$ en dus voor het bedoelde punt $a_1=a_0+a_2$. Het andere dubbelpunt geeft $\frac{2}{3}(a_0+a_1)+a_2+a_3=0$ en dus, als we $a_2=-1$ stellen, $a_0=2$, $a_1=1$, $a_3=-1$. Dus is de noemer $(2t+1)\,x-(t+1)$.

Een functie van den gevonden vorm heeft in het algemeen $1\,.\,4+1\,.\,2$ of 6 polen en nulpunten. De polen zijn de vier polen van x en de twee polen van t. Van de nulpunten kennen wij er reeds vijf. En brengen wij $x=\frac{t+1}{2t+1}$ in de vergelijking 4) van het vorige vraagstuk over, dan wordt die vergelijking, die naar behooren drie wortels -1 en twee wortels $+1$ heeft, van den vijfden graad. Het zesde nulpunt is dus met een der polen samengevallen en wel met de pool $x=\frac{1}{2}$, $t=\infty$. Dus heeft de functie slechts vijf polen en vijf nulpunten overgehouden.

Nemen we nu ook als teller $b_0\,tx+b_1\,x+b_2\,t+b_3$ en geven wij dezen vorm de beide dubbelpunten tot nulpunten, dan

hebben wij reeds een functie, die de polen van z en geen andere dan deze tot polen heeft, terwijl tusschen de onbepaalde coëfficiënten de betrekkingen $b_2 = b_3$, $\frac{2}{3}(b_0 + b_1) + b_2 + b_3 = 0$ bestaan. Laten wij eindelijk nog een der nulpunten met een der nulpunten van z ($x = 0$, $t = 0$ en $x = 0$, $t = \infty$) samenvallen, dan vinden we $b_0 + b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$. Dus hebben we

$$\frac{b_0 (t - 1) x}{(2t + 1) x - (t + 1)}$$

die nog alleen maar in een constanten factor van z verschillen kan. Ter bepaling van b_0 berekene men nu nog een stel bij elkaar behoorende waarden van t en z, bijv. de waarden voor $x = \infty$. Dan is $z = \frac{1}{\mu(1 - \mu)}$, $t = \frac{\mu^2}{1 - \mu}$ en dus $b_0 = 1$; enz.

Had zich hier niet de toevallige omstandigheid voorgedaan, dat de pool ($x = \frac{1}{2}$, $t = \infty$) uit den noemer wegvalt, dan hadden we den teller ten opzichte van t van den tweeden graad moeten nemen en de twee coëfficiënten, die dan meer beschikbaar zouden geweest zijn, zoo moeten bepalen, dat het zesde nulpunt van den noemer ook in den teller voorkwam en de pool ($x = 0$, $t = \infty$) slechts eenmaal in plaats van tweemaal in den teller werd gevonden.

Vraagstuk X.

Gegeven twee elkaar kruisende rechten a, b en een punt P. Men vraagt de orthogonale hyperboloïde(n) te construeeren, die door a, b en P gaan. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL *en* H. DE VRIES.

Oplossing van H. DE VRIES.

Een orthogonale hyperboloïde heeft de kenmerkende eigenschap, dat op ieder der beide reeksen van vlakken van cirkeldoorsnee twee op het oppervlak gelegen rechten loodrecht staan. Wordt de hyperboloïde voortgebracht door twee projectieve vlakkenbundels, dan treedt deze bijzonderheid in onder twee verschillende omstandigheden. Vooreerst als de overeenkomstige vlakken der beide bundels loodrecht op elkaar staan.

In dit geval blijkt nl. onmiddellijk, dat de doorsnee van het oppervlak met een vlak loodrecht op een der assen *a* en *b* der bundels een cirkel is, en zijn deze dus twee der bedoelde rechten. Ten tweede doet de bedoelde bijzonderheid zich voor, als de beide vlakkenbundels congruent zijn. Verplaatst men alle rechten der figuur evenwijdig naar een zelfde punt O, zoo dat men niet met een hyperboloïde maar met een kegel te doen heeft, dan leert een eenvoudige figuur (zie fig. 4 op blz. 61 van deel III der *Annales de Delft*), dat de beide assen *a* en *b* en de beschrijvende lijnen *c* en *d* loodrecht op de vlakken van cirkeldoorsnee dan een vierribbe vormen, waarvan het vlak *cd* een symmetrievlak is, enz.

Maken we nu ter voortbrenging van het oppervlak van de laatste handelwijs gebruik en beschouwen we de gegeven rechten *a* en *b* als assen van twee congruente vlakkenbundels, dan vormen de vlakken *a*P en *b*P een paar overeenkomstige vlakken. Brengt men nu door *a* een willekeurig ander vlak, dan gaan er door *b* twee vlakken, die met *b*P denzelfden hoek insluiten als het eerstgenoemde met *a*. Anders gezegd bij den vlakkenbundel (*a*) behooren twee congruente vlakkenbundels (*b*), die zich door de bewegingsrichting van elkaar onderscheiden. Dus zijn er in het algemeen twee oplossingen.

Aanmerkingen. I. De hyperboloïden, die de beide oplossingen vormen, hebben vier rechten met elkaar gemeen, nl. *a*, *b*, de snijlijn der vlakken *a*P, *b*P en die der vlakken door *a* en *b* loodrecht op *a*P en *b*P.

II. Ligt P echter zoodanig, dat de vlakken *a*P en *b*P loodrecht op elkaar staan, dan voegt zich bij de boven gevonden oplossingen nog een derde, die op de eerst aangegeven wijs ontstaat. Deze derde hyperboloïde heeft met elk der beide anderen de rechten *a*, *b* en de snijlijn der vlakken *a*P, *b*P gemeen.

III. Eigenlijk is het aantal oplossingen oneindig. Want de kwadratische oppervlakken door *a*, *b*, P vormen een net, terwijl de voorwaarde, dat het oppervlak een orthogonale hyperboloïde zijn moet, een enkelvoudige voorwaarde is Stilzwijgend is in de beide oplossingen aangenomen, dat *a* en *b* de assen der bundels moeten zijn, die het oppervlak voortbrengen. En dan komt men tot twee, hoogstens drie oplossingen. (Red.)

Vraagstuk XI.

Van een vlakke kromme van den vierden graad met keerpunt en dubbelknoop (vereeniging van twee samengevallen dubbelpunten) kent men het keerpunt, de dubbelknoop, de raaklijn in dit punt en vier andere punten. Men vraagt de kromme punt voor punt te construeeren. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL *en* H. DE VRIES.

Oplossingen.

De oplossing van dit vraagstuk kan afgeleid worden uit de voortbrenging van rationale krommen van den vierden graad met behulp van twee projectieve bundels van kegelsneden en uit beschouwingen aan de regelmatige kwadratische involutie (*Nieuw Archief*, deel 12, blz. 10 en *Archives Néerlandaises*, deel 20, blz. 12) ontleend. De eerste weg is door den Heer J. CARDINAAL, de tweede is door den Heer H. DE VRIES ingeslagen. Hun oplossingen zijn als volgt aangevuld.

I. Bestaat er tusschen de twee bundels van kegelsneden K^2 (A, B, C, D) en K^2 (A, B, C, E), die A, B, C, D en A, B, C, E tot basispunten hebben, een projectieve verwantschap, dan is de meetkundige plaats van het vierde snijpunt M der met elkaar overeenkomende kegelsneden dier bundels een kromme K^4, die A, B, C tot dubbelpunten heeft en door D en E gaat. De dubbelpuntsraaklijnen in elk der punten A, B, C zijn de dubbelstralen van de projectieve stralenbundels door de raaklijnen in die punten aan de bundels van kegelsneden gevormd.

Is nu A het keerpunt, B de dubbelknoop en b de raaklijn in dit punt aan de te construeeren kromme K^4, dan moet A een der drie gemeenschappelijke basispunten der beide kegelsneebundels zijn en B de in de richting b samengevallen twee andere gemeenschappelijke basispunten aangeven. Zijn P, Q, R, S de vier verder nog gegeven enkelvoudige punten van K^4, dan zullen P en Q de vierde basispunten der bundels kunnen zijn en deze dus als B′ het op b naast B gelegen punt aanduidt door K^2 (A, B, B′, P) en K^2 (A, B, B′, Q) voor te stellen zijn; in deze bundels komen dan de paren van kegel-

sneden (ABB′PR) en (ABB′QR), (ABB′PS) en (ABB′QS) met elkaar overeen. Zijn r_1 en r_2, s_1 en s_2 de raaklijnen in A aan deze kegelsneden en (r_1, r_2), (s_1, s_2) dus twee paren van de projectieve stralenbundels door de raaklijnen in A aan de kegelsneden der projectieve bundels gevormd, dan moet deze projectieve verwantschap verder bepaald worden door de voorwaarde, dat de beide dubbelstralen samenvallen. Dit voert, zooals reeds uit vraagstuk 3 van deel V volgt, tot twee oplossingen. Neemt men nl. een willekeurige lijn l_1 door A als een der dubbelstralen aan, dan is de projectieve verwantschap bepaald en dus ook de tweede dubbelstraal l_2. Laat men nu l_1 veranderen, dan doorloopen l_1 en l_2 een involutorischen stralenbundel. De dubbelstralen dezer involutie zijn de keerraaklijnen in A, die bij de beide oplossingen behooren.

Is d een dezer beide dubbelstralen, dan bepalen de stralenbundels $(r_1, s_1, d\ldots)$ en $(r_2, s_2, d\ldots)$ der raaklijnen verder de projectieve verwantschap van de kegelsneden der beide bundels en ontstaat de kromme K^4 als meetkundige plaats van het vierde snijpunt M der overeenkomstige kegelsneden.

II. Is M een veranderlijk punt in het vlak van twee kegelsneden ϕ^2 en ψ^2, die ABC tot gemeenschappelijken pooldriehoek hebben, en stelt M′ het met M veranderde snijpunt der poollijnen van M met betrekking tot ϕ^2 en ψ^2 voor, dan bestaat er tusschen M en M′ een regelmatige kwadratische involutie, waarvan A, B, C de fundamentaalpunten zijn. Doorloopt M een willekeurige kegelsnee K^2, dan beschrijft M′ een kromme K^4 met A, B, C tot dubbelpunten. De dubbelpuntsraaklijnen in A gaan door de oneindig dicht bij A liggende punten, die met de snijpunten van K^2 met BC overeenstemmen; zij vallen dus samen, als K^2 de zijde BC aanraakt.

Wil men deze beschouwing tot het oplossen van het vraagstuk gebruiken, dan moet men de fundamentaalpunten B en C laten samenvallen en dus uitgaan van twee kegelsneden ϕ^2 en ψ^2, die in B de lijn AB aanraken en met betrekking tot A een zelfde poollijn b opleveren Bepaalt met daarna de punten P′, Q′, R′, S′, die met de vier gegeven punten P, Q, R, S overeenkomen, en construeert men een kegelsnee, die door P′, Q′, R′, S′ gaat en b aanraakt, dan zal de met deze kegelsnee overeenkomende kromme K^4 aan de vraag voldoen. Wijl

er door vier punten twee kegelsneden te brengen zijn, die een gegeven lijn aanraken, zijn er twee oplossingen.

Opmerking. Om de raaklijn te construeeren in het punt M van K^4 bepale men eerst de raaklijn l' in het met M overeenkomende punt M' van de met K^4 overeenkomende kegelsnee en daarna de kegelsnee door A, die b in B en l' in M' aan raakt. De met deze kegelsnee overeenstemmende rechte is dan de verlangde raaklijn.

Vraagstuk XII.

Gegeven het stelsel vergelijkingen

$$F_k(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0.$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Te bewijzen, dat — zoo hieruit de waarden van $p_1, p_1, \ldots p_n$ als functies van $x_1, x_2, \ldots x_n$ bepaald zijn — de noodzakelijke en voldoende voorwaarden om

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$$

tot een volkomen differentiaal te maken zijn

$$\left(\frac{F_k F_l}{x, p}\right) + \left(\frac{F_k F_l}{z, p}\right) = 0, \ (l = 1, 2, \ldots k;\ k = 2, 3, \ldots n),$$

waarin

$$\left(\frac{F_k F_l}{x, p}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{F_k F_l}{x_i, p_i}\right) \quad , \quad \left(\frac{F_k F_l}{z, p}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ p_i \left(\frac{F_k F_l}{z, p_i}\right) \right\}$$

en

$$\left(\frac{F_k F_l}{u, p_i}\right) = \frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_l}{\partial p_i} - \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial F_l}{\partial u} \quad (u = x_1, x_2, \ldots x_n, z)$$

is. (Dr. A. Eecen.)

Opgelost *door* Dr. A. Eecen *en* W. Mantel.

Oplossing *van* W. Mantel.

We stellen de totale differentiaal van F_k voor door

$$dF_k = X^k_1 dx_1 + X^k_2 dx_2 + \ldots X^k_n dx_n + P^k_1 dp_1 + P^k_2 dp_2 + \ldots P^k_n dp_n,$$

waarin X^k_i dan de beide termen $\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + p\frac{\partial F_k}{\partial z}$ aanduidt. Verder zij

$$dp_i = p_{i1}\, dx_1 + p_{i2}\, dx_2 + \ldots p_{in}\, dx_n.$$

Differentieeren we nu de vergelijkingen $F_k = 0$ en $F_l = 0$ naar x_1 en elimineeren we p_{11} uit de uitkomst, dan vinden we

$$(X^k_1 P^l_1 - X^l_1 P^k_1) + (P^k_2 P^l_1 - P^l_2 P^k_1) + (P^k_3 P^l_1 - P^l_3 P^k_1) + \ldots = 0.$$

Evenzoo verkrijgen we $n - 1$ andere vergelijkingen, waarin de aanwijzer 1 vervangen is door $2, 3, \ldots n$.

Optelling der n vergelijkingen geeft dan

$$\Sigma (X^k_i P^l_i - X^l_i P^k_l) + \Sigma (p_{ji} - p_{ij}) (P^k_j P^l_i - P^l_j P^k_j) = 0 \ldots 1),$$

waarin i en j veranderen van 1 tot n en $j > i$ moge zijn. Is steeds $p_{ji} = p_{ij}$, dan is dus

$$\Sigma (X^k_i P^l_i - X^l_i P^k_i) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

wat bij verandering van k en l een aantal van $\frac{1}{2} n (n - 1)$ voorwaarden oplevert, waarvan de vervulling *noodig* is, als het gegeven stelsel een integraal wil toelaten. Verder vormen de vergelijkingen 1) een even groot aantal van betrekkingen tusschen de verschillen $p_{ji} - p_{ij}$. Dus zijn al deze verschillen nul, tenzij de determinant der vormen $P^k_i P^l_i - P^l_j P^k_i$, met $j > i$ en $l > k$, nul mocht wezen. Deze determinant is de $(n - 1)^{ste}$ macht van den determinant der grootheden P^k_i (BALTZER, *Determinanten*, § 7, 6). Is deze determinant nul, dan kunnen $p_1, p_2, \ldots p_n$ niet uit de gegeven vergelijkingen opgelost worden. Met uitzondering van dit geval zijn dus de voorwaarden 2) *noodzakelijk en voldoende* om dz tot een volledige differentiaal te maken, zoo als boven beweerd wordt.

Vraagstuk XIII.

Met behulp der rekening met residuen (ziet o. a. LAURENT's *Théorie des résidus*) de formule

$$1 - 2 \operatorname{Cos} a + 2 \operatorname{Cos} 2a - \ldots\ldots + 2 \operatorname{Cos} 2na = \frac{\operatorname{Cos} \frac{4n+1}{2} a}{\operatorname{Cos} \frac{a}{2}}$$

te bewijzen. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

Het eerste lid der vergelijking is gelijk aan $\mathcal{E} \dfrac{\operatorname{Cos} \frac{az}{\pi}}{\operatorname{Sin} z}$, als

men het residu neemt ten opzichte van de polen $z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots \pm 2n\pi$. Trekt men nu door de punten $z = \pm (2n + \frac{1}{2}) \pi$ loodlijnen op de bestaanbare as en ter weerszijde op oneindigen afstand lijnen evenwijdig aan deze as, dan ontstaat er een rechthoek, binnen welken geen andere polen liggen dan de genoemde. Dus mag men schrijven

$$\mathcal{E} \frac{\text{Cos}\,\frac{az}{\pi}}{\text{Sin}\,z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\text{Cos}\,\frac{az}{\pi}}{\text{Sin}\,z}\,dz,$$

als de integraal genomen wordt langs den in positieven zin doorloopen omtrek van den rechthoek. Op de oneindig ver verwijderde zijden van den rechthoek is $z = x \pm ik\pi$ $(k = \infty)$. Dus geeft

$$\text{Cos}\,\frac{az}{\pi} = \frac{e^{ka}}{2}\left(\text{Cos}\,\frac{ax}{\pi} \mp i\,\text{Sin}\,\frac{ax}{\pi}\right),\ \text{Sin}\,z = \frac{e^{k\pi}}{2}(\text{Sin}\,x \pm i\,\text{Cos}\,x)$$

op die zijden

$$\frac{\text{Cos}\,\frac{az}{\pi}}{\text{Sin}\,z} = \frac{e^{ka}}{e^{k\pi}} = 0\ (a < \pi).$$

Op de andere zijden is $z = \pm (2n + \frac{1}{2}) \pi + iy$ en dus

$$\frac{\text{Cos}\,\frac{az}{\pi}}{\text{Sin}\,z}\,dz = i\,\frac{\text{Cos}\,\frac{4n+1}{2}\,a\,\text{Cos}\,\frac{iay}{\pi} \mp \text{Sin}\,\frac{4n+1}{2}\,a\,\text{Sin}\,\frac{iay}{2}}{\pm\,\text{Cos}\,iy}\,dy.$$

Derhalve vindt men

$$\mathcal{E} \frac{\text{Cos}\,\frac{az}{\pi}}{\text{Sin}\,z} = \frac{\text{Cos}\,\frac{4n+1}{2}\,a}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos}\,\frac{iay}{\pi}}{\text{Cos}\,iy}\,dy - \frac{\text{Sin}\,\frac{4n+1}{2}\,a}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin}\,\frac{iay}{\pi}}{\text{Cos}\,iy}\,dy +$$

$$+ \frac{\text{Cos}\,\frac{4n+1}{2}\,a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos}\,\frac{iay}{\pi}}{\text{Cos}\,iy}\,dy + \frac{\text{Sin}\,\frac{4n+1}{2}\,a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin}\,\frac{iay}{\pi}}{\text{Cos}\,iy}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\text{Cos}\,\frac{4n+1}{2}\,a \int_0^{\infty} \frac{\text{Cos}\,\frac{iay}{\pi}}{\text{Cos}\,iy}\,dy = \frac{2}{\pi}\,\text{Cos}\,\frac{4n+1}{2}\,a \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{ay}{\pi}} + e^{-\frac{ay}{\pi}}}{e^y + e^{-y}}\,dy,$$

wat voor $a < \pi$ volgens Tafel 38 der Integraaltafels van Dr. BIERENS DE HAAN de in het tweede lid der gegeven vergelijking aangeduide waarde aanneemt.

Voor $a = \pi$ worden beide leden der vergelijking $4n + 1$; dus ook voor deze waarde geldt de vergelijking. Voor alle andere waarden geldt zij natuurlijk eveneens.

Vraagstuk XIV.

Met behulp van residuen de som te vinden van de drie uitdrukkingen, die men verkrijgt, als men in de Abel'sche normaalintegraal

$$\frac{1}{2}\int_v^u \frac{2x - y - \sqrt{3}}{x^2(2x + y + \sqrt{3})}\,dy$$

van de derde soort voor de grenzen u en v achtereenvolgens

$$y_1 \text{ en } \sqrt{3}, \quad y_2 \text{ en } 0, \quad y_3 \text{ en } -\sqrt{3}$$

aanneemt en y_1, y_2, y_3 de met een willekeurige waarde van x overeenkomende wortels der vergelijking $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$ voorstellen. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

Daar de onderste grenzen overeenkomen met de waarde $x = 0$ en uit de vergelijking de betrekking $(y^2 - 1)\,dy + 2x^2\,dx = 0$ volgt, is de som s voorgesteld door

$$-\int_0^x \left[\frac{2x - y_1 - \sqrt{3}}{(2x + y_1 + \sqrt{3})(y_1^2 - 1)} + \frac{2x - y_2 - \sqrt{3}}{(2x + y_2 + \sqrt{3})(y_2^2 - 1)} + \frac{2x - y_3 - \sqrt{3}}{(2x + y_3 + \sqrt{3})(y_3^2 - 1)}\right] dx.$$

Dus geldt de betrekking

$$s = 3\int_0^x \mathcal{E}\frac{2x - y - \sqrt{3}}{(2x + y + \sqrt{3})\,((y^3 - 3y + 2x^3))}\,dx,$$

waarin de residuen op de wortels der vergelijking slaan, wier eerste lid door dubbele haakjes is ingesloten. Nu is

$$\mathcal{E}\frac{2x-y-\sqrt{3}}{(2x+y+\sqrt{3})\,((y^3-3y+2x^3))}=$$

$$=\mathcal{E}\left(\left(\frac{2x-y-\sqrt{3}}{(2x+y+\sqrt{3})\,(y^3-3y+2x^3)}\right)\right)-\mathcal{E}\left(\left(\frac{2x-y-\sqrt{3}}{2x+y+\sqrt{3}}\right)\right)\frac{1}{y^3-3y+2x^3}.$$

Het eerste residu van het tweede lid is nul. Want het is ook voorgesteld door

$$\mathcal{E}\frac{2x-\dfrac{1}{y'}-\sqrt{3}}{\left(2x+\dfrac{1}{y'}+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{y'^3}-\dfrac{3}{y'}+2x^3\right)((y'^2))},$$

wat verdwijnt. Verder is het tweede residu van het tweede lid of

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{2x-y-\sqrt{3}}{2x+y+\sqrt{3}}\right)\right)\frac{1}{y^3-3y+2x^3}=\mathcal{E}\frac{2x-y-\sqrt{3}}{((2x+y+\sqrt{3}))(y^3-3y+2x^3)}=$$

$$=-\frac{2}{3\,(x^2+2x\sqrt{3}+2)}.$$

Dus is ten slotte

$$s=\int_0^x\frac{2dx}{x^2+2x\sqrt{3}+2}=\int_0^x\left(\frac{dx}{x-1+\sqrt{3}}-\frac{dx}{x+1-\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\log\frac{x-1+\sqrt{3}}{x+1-\sqrt{3}}-\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

Vraagstuk XV.

Zijn y_1, y_2, y_3 de wortels van de vergelijking $y^3-3y+2x^3=0$ en is t een willkeurige standvastige, dan heeft het residu van

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left\{\frac{2x-y_i-\sqrt{3}}{2x+y_i+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{y_i-1}\cdot\frac{y_i}{x-y_it}\right\}$$

de waarde nul. Men vraagt dit te bewijzen.

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

I. De functie tusschen accolades kan oneindig worden:

1^0 in twee van de drie snijpunten der kromme $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$ met de rechte $2x + y + \sqrt{3} = 0$, nl. in de punten

$$A \ldots\ldots \left.\begin{aligned} x &= -(1+\sqrt{3}) \\ y &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}\right\}, \quad B \ldots\ldots \left.\begin{aligned} x &= 1-\sqrt{3} \\ y &= -2+\sqrt{3} \end{aligned}\right\};$$

2^0 in de vertakkingspunten $x^6 - 1 = 0$;

3^0 in de punten $x = y_1 t$, $x = y_2 t$, $x = y_3 t$.

We onderzoeken, *hoe* de functie in deze verschillende punten oneindig wordt.

Van het op A volgende punt der kromme $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$ kunnen de coördinaten door $-(1+\sqrt{3}) + x'$, $(2+\sqrt{3}) + y'$ worden voorgesteld. Zoo als differentiaalrekening leert, geldt dan de betrekking $y' = -\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}}x'$. Dus wordt de functie tusschen de accolades in A op dezelfde wijs oneindig als de uitdrukking $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})t\}\,x'}$. En evenzoo vindt men bij B de uitdrukking $\dfrac{-2+\sqrt{3}}{\{(1-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})t\}\,x'}$.

Stelt men $x = \alpha + x'$, waarin α een der derdemachtswortels uit de eenheid is, dan heeft de gegeven vergelijking twee wortels nabij de eenheid. Noemt men deze $1 + y_1'$ en $1 + y_2'$, dan vindt men $y_1' = k\sqrt{x'}$ en $y_2' = -k\sqrt{x'}$, waarin k een zekere standvastige grootheid uitdrukt. In het overeenkomstige vertakkingspunt wordt de functie dus oneindig als

$$\frac{2\alpha-1-\sqrt{3}}{2\alpha+1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2k\,x'^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\alpha-t} - \frac{2\alpha-1-\sqrt{3}}{2\alpha+1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2k\,x'^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\alpha-t},$$

wat tegen elkaar wegvalt; m. a. w. de functie wordt *niet* oneindig in een der zes vertakkingspunten.

De snijpunten van de kromme met de rechte $x = yt$ zijn gekenmerkt door de abscissen $x = 0$ en $x = \dfrac{\pm t\sqrt{3}}{\sqrt{1+2t^3}}$ of $x = \pm at$, waarin a een zekere standvastige voorstelt.

In de nabijheid van het punt $x = 0$, $y = 0$ vindt men

$y' = \frac{4}{3} x'^3$. Derhalve is in dit punt de uitdrukking $\frac{y}{x - yt}$ en bijgevolg ook de bedoelde functie *niet* oneindig.

Stelt men $x = at + x'$, $y = a + y'$, dan vindt men $y' = -\frac{2a^2 t^2}{a^2 - 1} x'$ en dus $\frac{1}{x' - y't} = \frac{a^2 - 1}{2x'}$. Derhalve wordt de functie daar oneindig als de uitdrukking $\frac{a\,(2at - a - \sqrt{3})}{2x'\,(2at + a + \sqrt{3})}$. En op dezelfde wijs vindt men voor het punt $x = -at$, $y = a$ de uitdrukking $\frac{-a\,(2at - a + \sqrt{3})}{2x'\,(2at + a - \sqrt{3})}$. De som der residuen is dus

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})} - \frac{2 - \sqrt{3}}{(1 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})t} + \frac{a\,(2at - a - \sqrt{3})}{2\,(2at + a + \sqrt{3})}$$

$$- \frac{a\,(2at - a + \sqrt{3})}{2\,(2at + a + \sqrt{3})} = -\frac{2\sqrt{3}}{t^2 - 2t + 2} - \frac{4a^2\,t\sqrt{3}}{a^2(2t + 1)^2 - 3}$$

en deze som herleidt zich tot nul, als men a in t uitdrukt.

II. De functie onder het residuteeken is een symmetrische functie van de wortels der vergelijking in y. Noemt men deze kortweg $f(x, t)$, dan is

$$\mathcal{E}\left(\left(f(x, t)\right)\right) = \frac{1}{2\pi i} \int f(x, t)\,dx,$$

waarbij de integraal genomen moet worden langs den omtrek van een cirkel, binnen welken alle discontinuiteitspunten der functie $f(x, t)$ gelegen zijn. Deze integraal behoudt dezelfde waarde, als men den straal des cirkels oneindig groot neemt. Stelt men nu in $x = \mathrm{R}\,(\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta)$ de R oneindig, dan is

$$y_1 = k\mathrm{R}\,(\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta),\quad y_2 = \alpha k\mathrm{R}\,(\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta),$$
$$y_3 = \alpha^2 k\mathrm{R}\,(\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta),$$

als k een constante en α een imaginairen derdemachtswortel uit de eenheid aanduidt. Hieruit volgt gemakkelijk, dat de bedoelde integraal nul wordt, wat een tweede bewijs van de verlangde stelling vormt.

Vraagstuk XVI.

Men vraagt de geheele functie $\varphi_n(x)$ van den n^{den} graad te bepalen door de voorwaarde, dat de integraal

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}x^m\varphi_n(x)\,dx,$$

waarin p en q positieve geheele getallen zijn, voor

$$m = 0,\ 1,\ 2\ldots(n-1)$$

verdwijnt. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF *en* W. MANTEL.

Oplossing van W. MANTEL.

I. Voor het bijzondere geval, waarin $n = 3$ is, nemen we voor de onbekende functie $\phi_3(x)$ den vorm $x^3 - Ax^2 + Bx - C$ met onbepaalde coëfficiënten aan. Ter bepaling van A, B, C vinden we dan de vergelijking

$$\int_0^1 x^{p+2}(1-x)^{q-1}dx - A\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx +$$
$$+ B\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx - C\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 0$$

en wat hieruit volgt, als p door $p+1$ en $p+2$ vervangen wordt.

Door middel van de herleidingsformule

$$\int_0^1 x^a(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{a}{a+q}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

kunnen alle integralen tot een zelfde integraal herleid worden. Deeling der vergelijkingen door deze geeft dan

$$\frac{(p+2)(p+1)p}{(p+q+2)(p+q+1)(p+q)} - \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)}A +$$
$$+\frac{p}{p+q}B - C = 0.$$

en wat hieruit volgt, als p door $p+1$ en $p+2$ vervangen wordt.

Door oplossing van A, B, C uit deze drie vergelijkingen en invoeging der verkregen waarden in $\phi_3(x)$ vinden we dan

$$\phi_3(x) = x^3 - 3\,\frac{p+2}{p+q+4}\,x^2 +$$

$$+ 3\,\frac{(p+2)(p+1)}{(p+q+4)(p+q+3)}\,x - \frac{(p+2)(p+1)\,p}{(p+q+4)(p+q+3)(p+q+2)},$$

wat natuurlijk nog met een standvastige vermenigvuldigd kan worden.

2. Nemen we aan, dat de laatste constante zoo gekozen wordt, dat de bekende term in $\phi_n(x)$ de waarde $(-1)^n$ verkrijgt, dan leert inductie voor de uitkomst de betrekking

$$(-1)^n\,\phi_n(x) = 1 - \frac{n}{1}\,.\,\frac{p+q+n-1}{p}\,x +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{(p+q+n-1)(p+q+n)}{p\,(p+1)}\,x^2 + \ldots .$$

vinden. Met behulp van de bekende notatie

$$F\,(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\,x + \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{\beta\,(\beta+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\,x^2 + \ldots$$

der hypergeometrische reeks wordt dit in den vorm

$$(-1)^n\,\phi_n(x) = F\,(-n\,, p+q+n-1\,, p\,, x)$$

geschreven. Om deze inductie te bevestigen zouden we kunnen aantoonen, dat de voor $n = 3$ ingeslagen weg ook voor willekeurige n tot het doel voert. Men slaagt hierin echter gemakkelijker door de differentiaalvergelijking

$$x\,(1-x)\,\frac{d^2 F}{dx^2} + \{\,\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x\,\}\,\frac{d\,F}{dx} - \alpha\,\beta\,F = 0$$

der hypergeometrische reeks te hulp te roepen. De ondersteld functie moet dus voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$x\,(1-x)\,\frac{d^2\phi}{dx^2} + \{\,p - (p+q)\,x\}\,\frac{d\,\phi}{dx} + n\,(p+q+n-1)\,\phi = 0.$$

Werkelijk is het nu niet moeilijk aan te toonen, dat de integraal van deze vergelijking de voorgeschreven eigenschap bezit. Daartoe schrijven we de vergelijking in den vorm

$$\frac{d}{dx}\left\{x^p\,(1-x)\,\frac{d\phi}{dx}\right\} + n\,(p+q+n-1)\,x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,\phi = 0.$$

Door vermenigvuldiging met x^α en integratie tusschen de grenzen 0 en 1 vinden we dan de betrekking

$$(n - \alpha)(p + q + n + \alpha - 1)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} x^\alpha \phi \, dx +$$
$$+ \alpha(\alpha + p + 1)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} x^{\alpha-1}\phi \, dx = 0.$$

Neemt men hierin $\alpha = n$, dan blijkt, dat de tweede integraal, d. i. de in het vraagstuk gegeven integraal, waarin $m = n - 1$ gesteld is, verdwijnt. Neemt men daarna $\alpha = n - 1$, dan blijkt dit ook met de gegeven integraal voor $m = n - 2$ het geval te zijn, enz. Dus levert de bovenstaande differentiaalvergelijking ook de gewenschte functies op.

Aanmerkingen. I. Voor $p = 1$, $q = 1$ gaat $\phi_n(x)$ in het polynomium van Legendre over. Verandert men dan bovendien de grenzen van 0 tot 1 in van -1 tot 1, dan heeft men met bolfuncties te doen. Zoo is

$$P_n(x) = \phi_n\left(\frac{1+x}{2}\right), \; (p = q = 1).$$

Voor $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ vindt men een goniometrische functie; want dan is $\phi_n\left(\frac{1 + \operatorname{Cos}\theta}{2}\right) = \operatorname{Cos} n\theta.$

II. De vergelijking $\phi_n(x) = 0$ heeft louter bestaanbare wortels, die alle tusschen 0 en 1 inliggen. Uit de differentiaalvergelijking blijkt nl., dat er, zoo lang x tusschen 0 en 1 ligt, in de rij der afgeleide functies geen nul wordt of zij ligt tusschen twee andere met ongelijke teekens in. Dus kunnen deze afgeleiden voor de Sturm'sche resten in de plaats treden en deze vertoonen voor $x = 0$ niets dan variaties, voor $x = 1$ niets dan permanenties.

III. De hypergeometrische reeks laat, zoo als bekend is, velerlei omzetting toe. Wij geven als zoodanig hier slechts deze

$$(-1)^n \phi_n(x) = (1-x)^n - \frac{n}{1} \cdot \frac{q+n-1}{p}(1-x)^{n-1}x +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(q+n-1)(q+n)}{p(p+1)}(1-x)^{n-2}x^2 \ldots,$$

wijl zij geschikt is om den invloed van het verwisselen van p en q te bestudeeren.

Vraagstuk XVII.

De functie $\varphi_n(x)$ van het vorige vraagstuk heeft de eigenschap, dat

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

verdwijnt, als m en n verschillen. Men vraagt dit aan te toonen en te onderzoeken, wat de waarde der integraal is voor $m = n$.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Is $m < n$, dan is de integraal van het vraagstuk nul. Want door $\phi_m(x)$ te vervangen door haar waarde, dat is door een bepaalden stelkundigen vorm van den m^{den} graad in x, zal de integraal in $m+1$ andere integralen worden gesplitst, die op een coëfficient na aangegeven worden door

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}x^k\,\phi_n(x)\,dx,\ (k < n)$$

en dus volgens de bepaling van ϕ_n nul zijn. En is $n < m$, dan kan men hetzelfde resultaat erlangen door omwisseling van m en n in de bovenstaande redeneering.

2. Zooals bekend is, leidt de hypergeometrische reeks tot verschillende lineaire betrekkingen. Een van deze moet op de functie $\phi(x)$ toegepast een lineaire betrekking tusschen $\phi_{n-1}(x)$, $\phi_n(x)$, $\phi_{n+1}(x)$ opleveren. De bekende betrekkingen tusschen drie opvolgende polynomia van LEGENDRE en tusschen de cosinussen van drie opvolgende veelvouden van x wettigen het vermoeden, dat de vorm hier

$$A\,\phi_{n-1}(x) + B\,\phi_n(x) + C\,\phi_{n+1}(x) = Dx\,\phi_n(x)$$

zijn zal. Zal de bekende term uit het eerste lid wegvallen, dan moet $B = A + C$ zijn. Verder leveren de coëfficiënten van x en van x^{n+1} nog twee eenvoudige vergelijkingen ter bepaling van de verhouding der coëfficiënten. Zoo vindt men

$$\frac{n(q+n-1)}{(p+q+2n-1)(p+q+2n-2)}\Big\{\phi_{n-1}(x)+\phi_n(x)\Big\}+$$

$$+\frac{(p+n)(p+q+n-1)}{(p+q+2n)(p+q+2n-1)}\Big\{\phi_n(x)+\phi_{n+1}(x)\Big\}=x\phi_n(x)\,..\,1).$$

Deze recurrente betrekking stelt ons in staat de waarde der integraal voor $m = n$ te berekenen. Vermenigvuldiging van beide leden van 1) met $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\phi_{n-1}(x)\,dx$ en integratie tusschen 0 en 1 geeft nl.

$$\frac{n(q+n-1)}{(p+q+2n-1)(p+q+2n-2)}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\phi_{n-1}(x)\,\phi_{n-1}(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}x\phi_{n-1}(x)\,\phi_n(x)\,dx\,\ldots\ldots\,2).$$

In verband met de bepaling van ϕ_n mag $x\phi_{n-1}$ in het tweede lid door $k_{n-1}x^n$ vervangen worden, als k_{n-1} de coëfficiënt van x^{n-1} in ϕ_{n-1} is. En is k_n op dezelfde wijs de coëfficiënt van x^n in ϕ_n, dan is $k_{n-1}\,x_n$ weer door $\frac{k_{n-1}}{k_n}\phi_n$ te vervangen. Dus gaat 2) over in

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\phi_n(x)\,\phi_n(x)\,dx=$$

$$=\frac{k_n}{k_{n-1}}\cdot\frac{n(q+n-1)}{(p+q+2n-1)(p+q+2n-2)}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\phi_{n-1}(x)\phi_{n-1}(x)dx.$$

Stellen we het eerste lid door U_n voor en voeren we de uit de oplossing van het voorgaande vraagstuk bekend geworden waarde van k_n in, dan gaat deze betrekking over in

$$U_n=\frac{n(p+q+2n-3)(q+n-1)}{(p+q+n-2)(p+q+2n-1)(p+n-1)}\,U_{n-1}\,..\,3).$$

Wijl nu

$$U_0=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

is, vinden we door herhaalde toepassing van 4) de uitkomst

$$U_n=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+q)\,\Gamma(p+q+2n-1)}{\Gamma(p+n)\,\Gamma(p+q+n-1)\,\Gamma(p+q+2n)}.$$

Voorbeelden. Stelt men $p = q = 1$, dan heeft men $U_n = \frac{1}{2n+1}$, in overeenstemming met een bekende formule uit de theorie der bolfuncties. En stelt men $p = q = \frac{1}{2}$, dan vindt men $U_n = \frac{\pi}{2}$, in overeenstemming met de bekende uitkomst $\int_0^\pi \text{Cos}^2 nz\, dz = \frac{\pi}{2}$, waarin de integraal overgaat door $2x = 1 + \text{Cos}\, z$ te stellen.

Vraagstuk XVIII.

Gevraagd de som der reeks

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2+1^2} + \frac{1}{1^2+1^2+2^2} - \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2} + $$
$$+ \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2} - \text{enz.},$$

waarin de getallen 1, 1, 2, 3, 5 ... gevormd worden door telkens twee op elkaar volgende getallen op te tellen (É. Lucas, *Théorie des nombres*, I, blz. 324.) (W. Mantel.)

Opgelost *door* W. Mantel *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* W. Mantel.

1. Stellen we door a_n den algemeenen term der reeks 1, 1, 2, 3, 5 ... voor, dan gelden de betrekkingen

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1, \\ a_3 &= a_2 + a_1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n+1} &= a_n + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen we deze vergelijkingen achtereenvolgens met $a_1, a_2 \dots a_n$, dan geeft optelling

$$a_n a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots\dots a_n^2.$$

Dus kan de gevraagde som in de gedaante

$$\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} - \dots \qquad + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n\, a_{n+1}} \dots\dots 1)$$

geschreven worden.

2) De getallen 1, 1, 2, 3, 5 zijn de tellers a_{k+1} en noemers a_k van de naderende breuken $\frac{a^{k+1}}{a_k}$ der kettingbreuk $1 + 1/1 + 1/1 \ldots.$, die met louter eenen wordt geschreven. Wijl het verschil van twee op elkaar volgende naderende breuken de eenheid tot teller heeft, geldt dan de betrekking

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{a_{k-1}\,a_k}.$$

Door herhaalde toepassing dezer betrekking gaat 1) over in

$$\left(-\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(-\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}\right)+\ldots.+\left(-\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right).$$

Dus is $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_2}{a_1}$ of $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - 1$ of $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ de verlangde uitkomst.

N.B. De waarde van a_n is voor evene en onevene n opgegeven op blz. 100 van deel V der *Wiskundige Opgaven.*

Vraagstuk XIX.

Te bewijzen de betrekking

$$n^s = (n-1)^{s+1} - \frac{n-1}{1\ .\ 2}(n-2)^{s+1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(n-3)^{s+1} \ldots \pm 1,$$

waarin n en s geheele getallen zijn, die aan de voorwaarde $n > s + 1$ voldoen. (A. A. NIJLAND.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, A. A. NIJLAND *en* DR. C. STOLP.

Oplossing *van* DR. C. STOLP.

Als men de beide uitdrukkingen, die men verkrijgt door $e^x(e^x - 1)^{n-1}$ èn naar de afdalende machten van e^x èn naar de opklimmende machten van x te ontwikkelen, aan elkaar gelijk stelt, is de uitkomst een identiteit van den vorm

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} e^{(n-k)x} = x^{n-1} + a_1 x^n + \text{enz.}$$

Door deze identiteit s-maal naar x te differentieeren en vervolgens x nul te stellen vindt men

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)^s = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

en dit is de betrekking van het vraagstuk.

Aanmerkingen. I. Is $n = s + 1$, dan is het tweede lid van 1) niet nul. Men heeft dan

$$\sum_{k=0}^{k=s} (-1)^k \binom{s}{k} (s-k+1)^s = 1^s/_1$$

II. De betrekking van vraagstuk 150 van deel V der *Wiskundige Opgaven* staat met 1) in eenig verband. Voor $i = k$, $p = s = n - 3$ en $q = 3$ geven zij dezelfde uitkomst. En beide zijn weer bijzondere gevallen van de meer algemeene identiteit

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (a-k)^s = 0,$$

die eveneens gemakkelijk wordt bewezen. (A. A. N.)

Vraagstuk XX.

Als een gegeven ellips E zich in een vlak zoodanig verplaatst, dat zij twee gegevene loodrecht op elkaar staande rechten blijft aanraken, beschrijft een willekeurig gekozen punt P van haar oppervlakte een bepaalde kromme, die men een „glissette" noemt. Volgens Prof. Tait kan volkomen dezelfde baan verkregen worden, als men de ellips E door een bepaalde hyperbool H en het punt P door een punt Q van de oppervlakte van H ontvangt. Gevraagd op welke wijze de krommen E en H en de punten P en Q samenhangen. (Dr. P. H. Schoute.)

Oplossing *naar* Prof. Tait.

1. Zijn a en b de halve assen der bewegende ellips E (fig. 9) en stellen θ en ϕ de hoeken voor, die de middelpuntsvoerstraal OM en de groote as MA met de vaste lijn OX

maken, dan volgt uit den rechthoekigen driehoek OMB, waarin $OM^2 = a^2 + b^2$ en $MB^2 = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi$ is,

$$(a^2 + b^2) \sin^2 \theta = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Zijn a_1 en b_1 de halve assen der bewegende hyperbool H (fig. 10) en stellen omgekeerd ϕ_1 en θ_1 de hoeken voor, die de middelpuntsvoerstraal O_1M_1 en de bestaanbare as M_1A_1 met de vaste lijn O_1X_1 maken, dan vindt men op dezelfde wijs

$$(a_1^2 - b_1^2) \sin^2 \phi_1 = a_1^2 \sin^2 \theta_1 - b_1^2 \cos^2 \theta_1 \quad \ldots\ldots \quad 2).$$

Wijl deze vergelijkingen in a, b en a_1, b_1 homogeen zijn en zij bij weglating der indices in elkaar overgaan, blijkt hieruit, dat er onder de voorwaarde $a_1/b_1 = a/b$ bij elk stel waarden (θ, ϕ) van E een stel waarden (ϕ_1, θ_1) van H behoort, waarvoor $\phi_1 = \theta$, $\theta_1 = \phi$ is.

Als het punt P in het vlak der ellips E ten opzichte van de pool M en de poolas MA de poolcoördinaten (r, α) en ten opzichte van de rechthoekige assen OX en OY de cartesische coördinaten (x, y) heeft, gelden de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta + r \cos (\phi + \alpha) \\ y &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta + r \sin (\phi + \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3).$$

Hebben voor het punt Q van het vlak der hyperbool H de grootheden r_1, α_1, x_1, y_1 dezelfde beteekenis met betrekking tot O_1M_1 en M_1A_1 als pool en poolas en tot de assen O_1X_1' en O_1Y_1', die door draaiing van de vaste rechten O_1X_1 en O_1Y_1 over den hoek α_1 ontstaan, dan vindt men eveneens

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \cos (\phi_1 - \alpha_1) + r_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \sin (\phi_1 - \alpha_1) + r_1 \sin \theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

En nu gaan 1) en 2), 3) en 4) in elkaar over, als wij stellen

$$a_1 = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad b_1 = \frac{br}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad r_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha_1 = -\alpha.$$

Dus zijn de meetkundige plaatsen van P en Q onder deze omstandigheden identisch.

Hieruit is de betrekking tusschen E, H, P en Q gegeven. We merken nog op, dat, als we dezelfde krommen gebruiken willen, r en r_1 standvastig moeten zijn en P en Q dan op de met r en r_1 om M en M' beschreven cirkels tegengesteld gelijkhoekige puntenreeksen doorloopen.

Aanmerkingen. I. Legt men de assen O_1X_1' en O_1Y_1' op OX en OY, dan zijn OM en M_1Q ter eene en OM_1 en MP ter andere zij gelijk en evenwijdig. Dus is $OMPM_1 = OMQM_1$ een parallelogram. Zooals Prof. Tait opmerkt, verklaart deze beschouwing, hoe het mogelijk is, dat de ellips die geheele omwentelingen volvoert dezelfde kromme voortbrengt als de hyperbool die oscilleert. In beide gevallen wordt een oscilleerende beweging $OM = M_1Q$ samengesteld met een beweging $MP = OM_1$ van geheele omwentelingen. Onderscheiden we bij de beide gevallen een draaiing *van* het middelpunt en een draaiing *om* het middelpunt, dan is bij de ellips de eerste, bij de hyperbool de tweede een oscilleerende beweging, terwijl de tweede beweging bij de ellips en de eerste beweging bij de hyperbool geheele omwentelingen zijn.

II. Door middel van 1) gaan de vergelijkingen 3) over in

$$x = \sqrt{a^2 \operatorname{Cos}^2 \phi + b^2 \operatorname{Sin}^2 \phi} + r \operatorname{Cos} (\phi + \alpha),$$
$$y = \sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 \phi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \phi} + r \operatorname{Sin} (\phi + \alpha).$$

Invoeging hiervan in de vergelijking $x \operatorname{Cos} \beta + y \operatorname{Sin} \beta - k = 0$ eener willekeurige lijn geeft

$$r \operatorname{Cos} (\phi + \alpha - \beta) - k$$
$$= \operatorname{Cos} \beta \sqrt{a^2 \operatorname{Cos}^2 \phi + b^2 \operatorname{Sin}^2 \phi} + \operatorname{Sin} \beta \sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 \phi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \phi},$$

of na verdrijving der wortelteekens

$$[\{r\operatorname{Cos}(\phi+\alpha-\beta)-k\}^2-(a^2\operatorname{Cos}^2\phi+b^2\operatorname{Sin}^2\phi)\operatorname{Cos}^2\beta-(a^2\operatorname{Sin}^2\phi+b^2\operatorname{Cos}^2\phi)\operatorname{Sin}^2\beta]^2=$$
$$= 4 (a^2 \operatorname{Cos}^2 \phi + b^2 \operatorname{Sin}^2 \phi) (a^2 \operatorname{Sin}^2 \phi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \phi) \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \beta.$$

Ontwikkelt men deze vergelijking naar de goniometrische functies van ϕ, brengt men de termen met evene machten van $\operatorname{Cos} \phi$ in het eerste en die met onevene machten in het tweede lid, verheft men beide leden in het kwadraat en vervangt men $\operatorname{Cos}^2 \phi$ door $1 - \operatorname{Sin}^2 \phi$, dan verkrijgt men een vergelijking van den achtsten graad in $\operatorname{Sin} \phi$. Dus is de meetkundige plaats een kromme van den achtsten graad; zij gaat viermaal door elk der onbestaanbare cirkelpunten.

III. De verschillende vormen der meetkundige plaats zijn door Prof. Tait in teekening gebracht (zie *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, deel XVII, blz. 2). We geven hier alleen

op, dat de kromme een keerpunt vertoont, als het punt P in het vlak der ellips gelegen is op de meetkundige plaats van de onbestendige draaiingsmiddelpunten der bij de punten des orthoptischen cirkels behoorende normaalpolen. Deze kromme, die den vorm heeft van een roset met ongelijke bladen (zie fig. 40 van deel II der *Wiskundige Opgaven*), heeft tot vergelijking

$$(a^2 + b^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2(x^2 + y^2) = (a^2 - b^2)^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2.$$

Wat het overige aangaat, verwijzen we naar de aangehaalde verhandeling.

Vraagstuk XXI.

Van een spherischen slinger is het ophangpunt gelegen in de as van een homogeen omwentelingslichaam, dat met een vlakke doorsnee loodrecht op de omwentelingsas op een horizontaal vlak geplaatst is en over dat vlak schuiven kan. Gevraagd de beweging, als wrijving en weerstand der lucht buiten rekening gelaten worden.

(Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. G. SCHOUTEN.

Oplossing *van* Dr. G. SCHOUTEN.

1. We nemen het horizontale steunvlak tot XOY-vlak van een rechthoekig coördinatenstelsel in de ruimte met naar boven gerichte z-as en onderstellen, dat op een zeker oogenblik t der beweging m en (x, y, z) massa en coördinaten van het slingerende punt P, M en (ξ, η, ζ) de massa van het omwentelingslichaam en de coördinaten van het ophangpunt in dit lichaam voorstellen. Dan gaat de bekende bewegingsvergelijking van D'ALEMBERT over in

$$m\ddot{x}\delta x + M\ddot{\xi}\delta\xi + m\ddot{y}\delta y + M\ddot{\eta}\delta\eta + m(\ddot{z} + g)\delta z = 0 \ldots 1),$$

waarin $\ddot{x}$ enz. tweede differentiaalquotienten aanduiden. De variaties δx, enz. zijn niet onderling onafhankelijk, aangezien de coördinaten (x, y, z) en (ξ, η, ζ) voldoen aan de betrekking

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - l^2 = 0 \ldots\ldots 2).$$

Door variatie van 2) vinden we dus, wijl ζ constant $= h$ is,

$$(x - \xi)(\delta x - \delta\xi) + (y - \eta)(\delta y - \delta\eta) + (z - h)\delta z = 0 \ldots 3).$$

Wordt deze laatste vergelijking met λ vermenigvuldigd en

bij 1) opgesteld, dan vinden we door nulstelling van de coëfficiënten van de variaties de vergelijkingen

$$m\ddot{x} + \lambda(x - \xi) = 0 \quad , \quad M\ddot{\xi} + \lambda(\xi - x) = 0,$$
$$m\ddot{y} + \lambda(y - \eta) = 0 \quad , \quad M\ddot{\eta} + \lambda(\eta - y) = 0,$$
$$m(\ddot{z} + g) + \lambda(z - h) = 0,$$

die met 2) de grootheden x, y, z, ξ, η, λ bepalen.

2. Dit vijftal vergelijkingen schrijven we in de gedaante

$$\left.\begin{array}{lcl} m\ddot{x} + M\ddot{\xi} = 0 & , & \ddot{\xi}(y - \eta) = \ddot{\eta}(x - \xi) \\ m\ddot{y} + M\ddot{\eta} = 0 & , & M\ddot{\xi}(z - h) = m(\ddot{z} + g)(\xi - x) \end{array}\right\} \quad . \quad 4),$$

$$\lambda = m\frac{\ddot{z} + g}{h - z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

Vervangen we in 4) x, y, z door de poolcoördinaten

$x = \xi + l \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\phi$, $y = \eta + l \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi$, $z = h - l \operatorname{Cos}\theta$,

waarin θ en ϕ achtereenvolgens de hoeken tusschen slinger en verticaal, verticaal slingervlak en vlak XOZ voorstellen, dan gaan deze over in vier andere vergelijkingen, die zich na eliminatie van $\ddot{y}$ en $\ddot{\xi}$ laten vervormen tot

$$2 \operatorname{Cos}\theta \,.\, \dot{\theta} \,.\, \dot{\phi} + \operatorname{Sin}\theta\, \ddot{\phi} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

en

$$M \operatorname{Cos}\theta \,[\operatorname{Tg}\theta\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2 \operatorname{Tg}\phi \,.\, \dot{\theta} \,.\, \dot{\phi} - \ddot{\theta} + \operatorname{Tg}\theta \operatorname{Tg}\phi \,.\, \ddot{\phi}] =$$
$$= (M + m) \operatorname{Tg}\theta \left(\frac{g}{l} + \operatorname{Cos}\theta \,.\, \dot{\theta}^2 + \operatorname{Sin}\theta \,.\, \ddot{\theta}\right),$$

of, als men $\frac{m}{M}$ door μ voorstelt en rangschikt,

$$(1 + \mu \operatorname{Sin}^2\theta)\,\ddot{\theta} + \mu \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \,.\, \dot{\theta}^2 + (1 + \mu)\frac{g}{l} \operatorname{Sin}\theta =$$
$$= \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta\,(\dot{\phi}^2 + \operatorname{Tg}\phi \,.\, \ddot{\phi}) + 2 \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Tg}\phi \,.\, \dot{\theta} \,.\, \dot{\phi} \,.\,.\, 7).$$

En nu bepalen 6) en 7) de betrekkelijke beweging des slingers.

3. De eerste integraal van 6) is

$$\operatorname{Sin}^2\theta \,.\, \dot{\phi} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8).$$

Worden de uit 8) en 6) volgende waarden van $\dot{\phi}$ en $\ddot{\phi}$ in 7)

ingevoegd, dan vinden we

$$(1+\mu \operatorname{Sin}^2\theta)\,\ddot\theta + \mu \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \,.\, \dot\theta^2 + (1+\mu)\frac{g}{l}\operatorname{Sin}\theta = \frac{C^2 \operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sin}^3\theta},$$

waarvan de integraal is

$$\tfrac{1}{2}(1+\mu \operatorname{Sin}^2\theta)\,\dot\theta^2 - (1+\mu)\frac{g}{l}\operatorname{Cos}\theta = C_1 - \frac{C^2}{2\operatorname{Sin}^2\theta} \ldots 9).$$

Worden 8) en 9) nu geschreven onder de gedaante

$$\left.\begin{aligned} dt &= \frac{\operatorname{Sin}\theta \sqrt{1+\mu \operatorname{Sin}^2\theta}\, d\theta}{\sqrt{2\operatorname{Sin}^2\theta \left\{(1+\mu)\frac{g}{l}\operatorname{Cos}\theta + C_1\right\} - C^2}} \\ d\phi &= \frac{C\sqrt{1+\mu \operatorname{Sin}^2\theta}\, d\theta}{\operatorname{Sin}\theta \sqrt{2\operatorname{Sin}^2\theta \left\{(1+\mu)\frac{g}{l}\operatorname{Cos}\theta + C_1\right\} - C^2}} \end{aligned}\right\} \ldots 10),$$

dan is hiermee de betrekkelijke beweging des slingers bepaald

4. De beweging van het ophangpunt wordt bepaald door de vergelijkingen

$$\ddot\xi \operatorname{Sin}\phi = \ddot\eta \operatorname{Cos}\phi,$$

$$M\ddot\xi \operatorname{Cos}\theta = ml \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\phi \left(\frac{g}{l} + \operatorname{Cos}\theta \,.\, \dot\theta^2 + \operatorname{Sin}\theta \,.\, \ddot\theta\right),$$

die bij het elimineeren van $\ddot\xi$ en $\ddot\eta$ uit de vergelijkingen 4) gebruikt zijn. Deze geven

$$\left.\begin{aligned} \ddot\xi &= \mu l \operatorname{Tg}\theta \operatorname{Cos}\phi \left[\frac{g}{l} + \frac{d(\dot\theta \operatorname{Sin}\theta)}{dt}\right] \\ \ddot\eta &= \mu l \operatorname{Tg}\theta \operatorname{Sin}\phi \left[\frac{g}{l} + \frac{d(\dot\theta \operatorname{Sin}\theta)}{dt}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 11),$$

terwijl de spanning λl van den draad bepaald wordt door 5) d.i. door

$$\frac{ml}{\operatorname{Cos}\theta}\left(\frac{g}{l} + \operatorname{Cos}\theta \,.\, \dot\theta^2 + \operatorname{Sin}\theta \,.\, \ddot\theta\right) \ldots\ldots 12).$$

Oplossing *van* W. MANTEL.

5. We nemen in plaats van het horizontale steunvlak een vlak met een helling α en van het omwentelingslichaam een

willekeurig lichaam aan. We houden echter vast aan de onderstelling, dat de verbindingslijn van het zwaartepunt G van het lichaam met het ophangpunt Q, die we de as van het lichaam blijven noemen, loodrecht op het steunvlak staat.

Is nu het assenstelsel met de z-as loodrecht op het steunvlak gesteld en voeren we naast de aangegeven notaties nog de coördinaten x_1, y_1 in van de projectie van het gemeenschappelijk zwaartepunt G_1 van het stelsel op het steunvlak en den hoek ψ tusschen het vlak door OX loodrecht op het steunvlak en een door GQ gaand vlak, dat in de beweging van het lichaam deelt, dan kunnen de coördinaten van G en P door

$$\text{G} \ldots \; x_1 - a \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\phi, \; y_1 - a \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi, \; \text{constante}$$

$$\text{P} \ldots \; x_1 + b \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\phi, \; y_1 + b \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi, \; \text{constante} - l \operatorname{Cos}\theta$$

worden aangeduid, als kortheidshalve $\frac{ml}{m+\text{M}} = a$, $\frac{\text{M}l}{m+\text{M}} = b$ gesteld is. Dus wordt de levende kracht T van het stelsel gegeven door de formule

$$\text{T} = \tfrac{1}{2}\text{I}\dot{\psi}^2 + \tfrac{1}{2}(m+\text{M})(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{\text{M}ml^2}{2(m+\text{M})}(\operatorname{Cos}^2\theta.\dot{\theta}^2 + \operatorname{Sin}^2\theta.\dot{\phi}^2) + \tfrac{1}{2}ml^2\operatorname{Sin}^2\theta.\dot{\theta}^2,$$

als I het traagheidsmoment van het lichaam om de as aangeeft.

Eveneens vindt men voor het arbeidsvermogen van plaats H met betrekking tot het vlak door Q evenwijdig aan XOY

$$\text{H} = -(m+\text{M})gy_1\operatorname{Sin}\alpha - mgl\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\alpha.$$

Ter berekening van de totale energie E voeren we de bewegingsmomenten in. In verband met de betrekking $\mu = \frac{m}{\text{M}}$, die boven is ingevoerd, schrijven we ze in den vorm

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{\psi}} = \text{I}\,\dot{\psi}, \qquad p_2 = \frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{x}_1} = (1+\mu)\,\text{M}\,\dot{x}_1, \\ p_3 &= \frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{y}_1} (1+\mu)\,\text{M}\dot{y}_1, \qquad p_4 = \frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\mu}{1+\mu}\,\text{M}\operatorname{Sin}^2\theta.\dot{\phi}, \\ p_5 &= \frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\mu \text{M} l^2}{1+\mu}(1+\mu\operatorname{Sin}^2\theta).\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \ldots 13).$$

En nu is

$$2E = \frac{p_1^2}{I} + \frac{p_2^2 + p_3^2}{(1+\mu) M} + \frac{(1+\mu) p_4^2}{\mu M l^2 \operatorname{Sin}^2 \theta} + \frac{(1+\mu) p_5^2}{\mu M l^2 (1 + \mu \operatorname{Sin}^2 \theta)} \ldots 14).$$

6. De in het *Nieuw Archief*, deel 18, blz. 155 verklaarde methode leert de eerste integralen van 13) en 14) dadelijk neer te schrijven. Ze zijn:

$$p_1 = I\omega = C_1 \ldots 15) \quad , \quad p_2 = (1+\mu) M v_1 = C_2 \ldots . 16).$$

$$\frac{p_3^2}{2(1+\mu)^2 M^2} - g y_1 \operatorname{Sin} \alpha = \tfrac{1}{2}(v_2^2 - 2 g y_0 \operatorname{Sin} \alpha) = C_3 \ldots . 17).$$

$$p_4 = \frac{\mu M l^2}{1+\mu} \operatorname{Sin}^2 \theta_0 \dot{\phi}_0 = C_4 \ldots \ldots \ldots 18).$$

Door invoeging in 14) vinden we p_5 als functie van θ. Brengen we deze uitkomst over in de laatste vergelijking van 13), dan vinden we ten slotte

$$dt = \frac{\operatorname{Sin} \theta \sqrt{1 + \mu \operatorname{Sin}^2 \theta}\, d\theta}{\sqrt{(A + B \operatorname{Cos} \theta) \operatorname{Sin}^2 \theta - C}} \ldots \ldots 19),$$

waarin A, B en C zekere constanten aanduiden.

Voor de bestaanbaarheid is noodig, dat

$$f(\operatorname{Cos} \theta) = A + B \operatorname{Cos} \theta - \frac{C}{1 - \operatorname{Cos}^2 \theta}$$

positief zij. Verder vindt men dat $f''(\operatorname{Cos}\theta)$ negatief is en $f(-1)$ en $f(+1)$ beide minus oneindig zijn. Neemt men $\operatorname{Cos}\theta$ als abscis en $f(\operatorname{Cos}\theta)$ als ordinaat eener kromme, dan verkrijgt men dus een kromme met den bollen kant naar boven gekeerd. Tusschen de abscissen -1 en $+1$ kan deze kromme de as der abscissen in twee punten snijden of haar aanraken; wijl het geval, dat ze tusschen die grenzen geheel onder de as ligt, uitgesloten is. Zijn $\operatorname{Cos}\theta_1$ en $\operatorname{Cos}\theta_2$ de abscissen der snijpunten (raking voor $\theta_1 = \theta_2$), dan is

$$t = D \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sqrt{1 - \frac{\mu}{1+\mu} \operatorname{Cos}^2 \theta}\; d\operatorname{Cos}\theta}{\sqrt{(\operatorname{Cos}\theta_1 - \operatorname{Cos}\theta)(\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\theta_2)(\operatorname{Cos}\theta + \varepsilon)}} \ldots 20),$$

waarin D en ε standvastigen zijn ($\varepsilon^2 > 1$).

7. Van de integralen der vergelijkingen 13) leert 15) dat het lichaam met standvastige hoeksnelheid om zijn as draait, zeggen 16 en 17) dat de projectie van G′ op het steunvlak een parabolische beweging heeft niet van de gewone kogelbaan verschillende en bewijst 18) dat het slingervlak steeds in denzelfden zin ronddraait. De meesten dezer uitkomsten waren gemakkelijk te voorzien.

Hoofduitkomst is 20), waaruit blijkt, dat de beschouwde slinger in zoo verre afwijkt van den gewonen spherischen slinger ($\mu = 0$), dat hyperelliptische integralen in de plaats treden van elliptische.

Vraagstuk XXII.

De slinger van het vorige vraagstuk kan een omwentelingskegel beschrijven, die de verticaal van het ophangpunt tot as heeft. Als het lichaam, dat den slinger draagt, bij het begin der slingerbeweging in rust was, vraagt men te bewijzen,

1°. dat elk punt van het lichaam een cycloïde beschrijft,

2°. dat de beschrijvende cirkel dier cycloïde in de richting van den stoot, die den slinger in beweging bracht, met de draaiingssnelheid van den slinger voortrolt, en

3°. dat de straal van den beschrijvenden cirkel tot dien van de baan van het slingerpunt staat als de massa van dit punt staat tot de massa van het bewegende stelsel.

(Dr. G. Schouten.)

Opgelost *door* Dr. G. Schouten.

Oplossing.

Worden de omstandigheden zoo gekozen, dat θ_1 en θ_2 van vergelijking 20) der tweede oplossing van het vorige vraagstuk gelijk zijn aan de waarde θ_0 van θ in den aanvangstoestand, dan voldoet $\theta = \theta_0$ en beschrijft de slinger een omwentelingskegel. Hiertoe is noodig, dat het slingerpunt een stoot ontvange loodrecht op het vlak door dat punt en de verticaal van het ophangpunt en dat de constanten C en C_1 van de eerste vergelijking 10), die geheel met 19) overeenkomt, behoorlijk worden gekozen.

Stelt men in de eerste vergelijking 10) voor $(1 + \mu) \frac{g}{l}$ een-

voudigheidshalve c in de plaats en brengt men nu de uitdrukking $2 \operatorname{Sin}^2\theta\,(c \operatorname{Cos}\theta + C_1) - C^2$ overeen met den vorm $(\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\theta_c)^2(\operatorname{Cos}\theta + \varepsilon)$ van 20), voor het geval $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ is, dan vindt men

$$C_1 = \frac{1 - 3\operatorname{Cos}^2\theta_0}{2\operatorname{Cos}\theta_0}\,c \quad , \quad C^2 = \frac{\operatorname{Sin}^4\theta_0}{\operatorname{Cos}\theta_0}\,c.$$

De hoeksnelheid $\dot{\phi} = \frac{C}{\operatorname{Sin}^2\theta}$ is dus $\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}$; derhalve wordt de omloopstijd $2\pi\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}\theta_0}{c}}$.

De ontbondenen $\ddot{\xi}$ en $\ddot{\eta}$ van de versnelling van het ophangpunt gaan over in

$$\ddot{\xi} = \mu g \operatorname{Tg}\theta_0 \operatorname{Cos}\left(t\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}\right),\ \ddot{\eta} = \mu g \operatorname{Tg}\theta_0 \operatorname{Sin}\left(t\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}\right)\ldots 21).$$

In de onderstelling dat $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, ξ, η bij het begin der beweging nul zijn, vindt men door integratie

$$\xi = \frac{\mu g}{c}\operatorname{Sin}\theta_0\left\{1 - \operatorname{Cos}\left(t\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}\right)\right\},\ \eta = \frac{\mu g}{c}\operatorname{Sin}\theta_0\left\{t\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}} - \operatorname{Sin}\left(t\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}\right)\right\},$$

of, als men $\frac{\mu g}{c}\operatorname{Sin}\theta_0$ door ρ en $t\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}$ door χ aanduidt,

$$\xi = \rho\,(1 - \operatorname{Cos}\chi) \quad , \quad \eta = \rho\,(\chi - \operatorname{Sin}\chi),$$

welke vergelijkingen een cycloïde voorstellen.

De straal ρ van den voortbrengenden cirkel is $\frac{\mu g}{c}\operatorname{Sin}\theta_0 =$

$$= \frac{\mu g \operatorname{Sin}\theta_0}{(1+\mu)\frac{g}{l}} = \frac{\mu}{1+\mu}$$ maal den straal $l \operatorname{Sin}\theta_0$ des cirkels, dien het slingerpunt beschrijft.

Het middelpunt des voortbrengenden cirkels beweegt zich met een snelheid $\rho\sqrt{\frac{c}{\operatorname{Cos}\theta_0}}$ of $\frac{2\pi\rho}{T}$. Deze is dus gelijk aan de snelheid van het ophangpunt over den door dit punt doorloopen cirkel, zoo als blijkt uit de uitdrukkingen, die men bij het integreeren van de vergelijkingen 21) vindt.

Vraagstuk XXIII.

Men vraagt de omhullende van de krommingskoorden (koorden met de kromtecirkels) eener ellips te bepalen. (J. M. THIEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, F. F. LEUPEN, W. MANTEL, J. W. TESCH, J. M. THIEL *en* H. DE VRIES.

Oplossingen.

1. Het vraagstuk is reeds dikwijls behandeld, o.a. in de *Nouv. Ann.* van 1873, blz. 29, in TISSERAND's *Recueil d'exercices*, 1877, n°. 46, in het derde hoofdstuk van SALMON's *Higher plane curves*, in DE LONGCHAMPS' *Journal de Math. Spéc.*, 1890, blz. 138, enz. In het kort komt het daar beweзene op het volgende neer.

Is M een punt der ellips met de excentrische anomalie ϕ en N het punt met de excentrische anomalie -3ϕ, waar de ellips gesneden wordt door den kromtecirkel in M, dan is

$$ay \operatorname{Sin} \phi - bx \operatorname{Cos} \phi + ab \operatorname{Cos} 2\phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

de vergelijking van MN. Differentiatie naar ϕ geeft

$$ay \operatorname{Cos} \phi + bx \operatorname{Sin} \phi - 2ab \operatorname{Sin} 2\phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Door oplossing van x en y uit 1) en 2) vindt men

$$x = a \operatorname{Cos} \phi\,(1 + 2 \operatorname{Sin}^2 \phi) \quad , \quad y = b \operatorname{Sin} \phi\,(1 + 2 \operatorname{Cos}^2 \phi) \,..\, 3),$$

waarmee de coördinaten van een willekeurig punt der gezochte kromme in functie van den parameter ϕ zijn uitgedrukt (TISSERAND).

Door optelling en aftrekking van de beide vergelijkingen 3) vindt men

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = (\operatorname{Cos} \phi + \operatorname{Sin} \phi)^3 \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = (\operatorname{Cos} \phi - \operatorname{Sin} \phi)^3.$$

Door eliminatie van ϕ volgt hieruit de door SALMON vermelde vergelijking

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Het bovenstaande bewijst, dat de omhullende een rationale

kromme van den zesden graad en van de vierde klasse is, die de gelijke toegevoegde middellijnen der ellips en de lijn in het oneindige tot dubbelkeerraaklijnen heeft. Zij heeft vier bestaanbare keerpunten gelegen op de gelijke toegevoegde middellijnen der ellips en twee onbestaanbare keerpunten, de onbestaanbare cirkelpunten.

De inhoud van de kromme is $\frac{3}{2}\pi ab$ (TISSERAND).

Uit de vergelijkingen 3) volgt $\frac{x}{a \operatorname{Cos} \phi} + \frac{y}{b \operatorname{Sin} \phi} = 4$. Neemt men dus op de assen van den oorsprong af stukken, die het viervoud zijn van de overeenkomstige coördinaten van M, dan zal de lijn, die deze punten verbindt, door haar snijpunt met MN het bij MN behoorende raakpunt met de omhullende doen kennen, waardoor deze dan punt voor punt kan worden geconstrueerd (DE LONGCHAMPS).

2. Beschouwen we de ellips als de projectie van den cirkel, dan kan men met behulp van de opmerking, dat de koorde AS van den cirkel (fig. 11), die de krommingskoorde der ellips tot projectie heeft, antiparallel is met de raaklijn AR ten opzichte van de assen OX en OY der ellips, in het vlak van den cirkel de omhullende zoeken, waarvan de gevraagde omhullende de projectie is. Trekt men nu de deellijnen OX′ en OY′ van den hoek XOY, dan blijkt onmiddellijk door den hoek AOX met ϕ aan te duiden en de andere hoeken der figuur te berekenen, dat A het midden van BC en BC $= 2r$ is. Dus omhult BC de bekende hypocycloïde met vier keerpunten (de snijpunten van de deellijnen met den cirkel, die O tot middelpunt en $2r$ tot straal heeft) en wordt de omhullende in het vlak der ellips gevonden door de ordinaten met b/a te vermenigvuldigen. Dan komen de vier keerpunten op de gelijke toegevoegde middellijnen der ellips op een afstand $\sqrt{2\,(a^2 + b^2)}$ van het middelpunt te liggen. (W. M.)

3. Door een imaginaire affine transformatie kunnen de oneindig ver verwijderde punten der ellips en de onbestaanbare cirkelpunten in twee paar onderling loodrechte richtingen omgevoerd worden. De ellips en de kromtecirkel worden dan gelijkzijdige hyperbolen en de krommingskoorden worden normalen. Want als P, Q, R, S de vier gemeenschappelijke punten zijn van twee gelijkzijdige hyperbolen en P, Q, R

samenvallen, staat PS loodrecht op de raaklijn in P. Dus is de gezochte omhullende affin verwant met de ontwondene eener gelijkzijdige hyperbool. (W. M.)

4. Zijn bij de bepaling van de omhullende in het vlak van den cirkel, waarvan de gegeven ellips de projectie is, M_1R_1 en M_2R_2 (fig, 12) twee opvolgende raaklijnen des cirkels en M_1N_1 en M_2N_2 de twee lijnen antiparallel met M_1R_1 en M_2R_2 ten opzichte van OX, dan is $\angle T = \angle R_2SR_1 = \angle M_1OM_2$ en dus cirkel M_1TM_2 het spiegelbeeld van cirkel M_2OM_1 ten opzichte van M_1M_2. Bij samenvalling van M_1 en M_2 in M is T dus het tweede snijpunt van NM (fig. 13) met den cirkel (O'), die cirkel (O) in M uitwendig aanraakt en met een straal $MO' = \frac{1}{2}OM$ beschreven is. Anders gezegd, T wordt gevonden door NM met de helft te verlengen.

Richt men nu in T de loodlijn op MT op, dan ontmoet deze den cirkel (O') ten tweeden male in het diametraal tegenover M gelegen punt S, waar de cirkel (O') den met $OS = 2OM$ als straal uit O als middelpunt beschreven cirkel $(\bar{O})$ aanraakt. Bij de beweging der krommingskoorde MT verplaatst M zich over (O), terwijl T als raakpunt in de richting der raaklijn MT doorschuift. Dus is S het onbestendige rotatiecentrum. Derhalve beweegt zich de lijn MT, alsof zij bij de rolling van den cirkel (O') over den cirkel $(\bar{O})$ meegenomen werd, en doorloopt T de bekende hypocycloïde met vier keerpunten. (J. M. T.)

Aanmerkingen. I. Gemakkelijk bewijst men, dat de beweging van N langs (O) eenparig is, als die van M langs (O) dit is, en de snelheden van M en N dan tot elkaar staan als 1 tot − 3. Met behulp der algemeene stelling van Eckhardt (zie Schlömilch's *Zeitschrift*, deel 15, blz. 129 of ook *Wiskundige Opgaven*, deel 3, blz. 69) bewijst men hierdoor, dat de koorde MN des cirkels een hypocycloïde omhult.

II. De meetkundige plaats van de middelpunten der gelijkzijdige hyperbolen, die de gegeven ellips in M aanraken en asymptoten hebben evenwijdig aan de assen der ellips, is de krommingskoorde MN van M. Dus is de boven gevondene omhullende der krommingskoorden tevens de meetkundige plaats van de middelpunten der gelijkzijdige hyperbolen, die asymptoten hebben evenwijdig aan de assen der ellips en deze *drie-*

puntig aanraken. Dit wordt gemakkelijk stelkundig bevestigd. Is de gelijkzijdige hyperbool met het middelpunt (x', y') door

$$xy - x'x - y'y + C = 0$$

voorgesteld, dan vindt men, wijl voor de ellips

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \operatorname{Cos} \phi}{a \operatorname{Sin} \phi} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2 \operatorname{Sin}^3 \phi}$$

is,

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{b \operatorname{Cos} \phi}{a \operatorname{Sin} \phi} \quad , \quad \frac{y - y'}{(x - x')^2} = -\frac{b}{2a^2 \operatorname{Sin}^3 \phi} ,$$

wat geheel met de vergelijkingen 3) overeenkomt. (J. W. T.)

III. De hier beschouwde omhullende vormt een bijzonder geval van die uit vraagstuk 163 der vorige reeks (zie vooral blz. 370, Aanm. I).

Vraagstuk XXIV.

Twee lijnen *g* en *g'* zijn elkaars weerkeerige poollijnen met betrekking tot een gegeven bol. Men projecteert deze lijnen uit een willekeurig punt P van den bol als centrum op een vlak loodrecht op de door P gaande middellijn van den bol. Te bewijzen, dat de projecties loodrecht op elkaar staan. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Mej. C. H. DE HAAS, T. J. ALLERSMA, F. F. LEUPEN, J. J. STOEL *en* H. DE VRIES.

Oplossingen *van* T. J. ALLERSMA.

1. MEETKUNDIGE OPLOSSING. De bedoelde projecties zijn de doorsneden van de vlakken (P, *g*) en (P, *g'*) met een vlak loodrecht op de middellijn OP van P. Daar deze doorsneden zich evenwijdig verplaatsen bij evenwijdige verplaatsing van het vlak loodrecht op OP, kiezen we voor dit vlak het raakvlak π in P aan den bol.

Twee weerkeerige poollijnen van den bol kruisen of snijden elkaar loodrecht; bovendien gaat haar lijn van kortsten afstand door het middelpunt. Laat deze lijn OX (fig. 14) de lijnen *g* en *g'* in A en A' snijden en door Q, Q', S de snijpunten van *g*, *g'*, OX met π voorgesteld zijn. Vereenigen we nu P

met Q en Q′, dan zijn PQ en PQ′ de projecties en moet bewezen worden, dat de hoek QPQ′ recht is.

Wijl P de pool is van π, gaat het poolvlak van het punt Q′ van π door P. Wijl Q′ op g' ligt, gaat het poolvlak van dit punt door g. Dus is (P, g) het poolvlak van Q′ en PQ de weerkeerige poollijn van PQ′. Dus is de hoek QPQ′ recht.

2. Stelkundige Oplossing. Als we $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ voor de vergelijking van den bol aannemen en door $x = a, y = 0$ de lijn g voorstellen, dan is de vergelijking van het poolvlak van een punt $(a, 0, z_1)$ van g voorgesteld door $ax + z_1 z - r^2 = 0$ en draait dit vlak dus om de lijn $x = \frac{a^2}{r}$, $z = 0$, als het punt zich langs g verplaatst. Deze uitkomst had ook kunnen volgen uit de bekende betrekking OA . OA′ $= r^2$.

Het raakvlak π in P (x_0, y_0, z_0) heeft $x_0 x + y_0 y + z_0 z - r^2 = 0$ tot vergelijking. Voor de cöordinaten van Q en Q′ vindt men dus

$$Q \ldots \left(a,\ 0,\ \frac{r^2 - ax_0}{z_0}\right) \quad , \quad Q' \ldots \left(\frac{r^2}{a},\ \frac{r^2(a - x_0)}{ay_0},\ 0\right).$$

Dus zijn de richtingscosinussen van PQ en PQ′ bepaald door de vergelijkingen

$$\frac{a - x_0}{\alpha} = \frac{-y_0}{\beta} = \frac{\frac{r^2 - ax_0}{z_0} - z_0}{\gamma} , \quad \frac{\frac{r^2}{a} - x_0}{\alpha'} = \frac{\frac{r^2(a - x_0)}{ay_0} - y_0}{\beta'} = \frac{-z_0}{\gamma'}$$

en hieruit volgt $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$ onder gebruikmaking van de voorwaardevergelijking $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$

Aanmerking. Brengt men het projectievlak door het middelpunt O van den bol aan, dan heeft men met stereographische projecties te doen. Hier is de stelling eigenlijk op haar plaats. Want hier leert zij, dat twee bundels van cirkels op den bol orthogonaal zijn (en dus elke cirkel van den eenen elken cirkel van den anderen loodrecht snijdt), als de assen der bundels van cirkelvlakken weerkeerige poollijnen zijn met betrekking tot den bol. Maakt men gebruik van de bekende eigenschap, dat stereographische projectie de hoeken onveranderd laat, dan is aan bovenstaande beschouwing een ander bewijs der stelling te ontleenen. (H. d. V.)

Vraagstuk XXV.

Gegeven een omwentelingscylinder (A_1), waarvan de as a_1 loodrecht op het horizontale vlak staat en een lijn a_2 in het horizontale vlak gelegen, die men beschouwt als de as van een tweeden omwentelingscylinder (A_2) met nog onbekenden straal. Gevraagd:

1°. het verticale vlak en den straal van den tweeden cylinder zoo aan te nemen, dat de verticale projectie van de doorsnee der beide cylinders een drievoudig punt vertoont, en

2°. voor dit geval een constructie der raaklijnen in het drievoudige punt aan te geven. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* H. DE VRIES.

1. De doorsnee van twee kwadratische oppervlakken projecteert zich uit elk niet op de kromme gelegen punt in het algemeen als een kromme met twee dubbelpunten. Daar een drievoudig punt uit de vereeniging van *drie* dubbelpunten ontstaat, moet de doorsnee der cylinders een werkelijk dubbelpunt bezitten. Dus moeten de cylinders elkaar aanraken. Deze voorwaarde beperkt den straal des tweeden cylinders tot twee waarden. Heeft men een van beiden gekozen, dan is het raakpunt D der beide cylinders het dubbelpunt hunner doorsnee.

De beide „schijnbare" dubbelpunten der vertikale projectie zijn de projecties van de punten E en F der doorsnee, die gelegen zijn op de snijlijn g der poolvlakken van het in de richting loodrecht op het verticale vlak en het oneindige verdwenen punt Y_∞ met betrekking tot de beide cylinders. Deze snijlijn g staat in ons geval loodrecht op het horizontale vlak. Draagt men er nu zorg voor, dat het vlak ($Y_\infty g$) ook het dubbelpunt D opneemt, dan vereenigen zich de drie dubbelpunten tot een drievoudig punt.

Uit het bovenstaande volgt een middel ter bepaling van de richting der in het horizontale vlak gelegen lijn DY_∞. Is nl. (a_1) (fig. 15) de doorsnee van den eersten cylinder met het horizontale vlak en vormen c' en c'' dit voor den tweeden, dan zullen de beide lijnen, die D verbinden met een der twee snijpunten

S′ en S″ van a_2 met den op A_1D als middellijn beschreven cirkel, de met de beide oplossingen in verband staande punten Y_∞ aangeven. Want voor Y'_∞ is S′, voor Y''_∞ is S″ de horizontale projectie van de snijlijn g der beide poolvlakken.

Hieruit volgt, dat er alleen dan een drievoudig punt met drie bestaanbare takken ontstaan kan, als a_2 den cirkel (a_1) snijdt en wel zoo, dat de afstand van A_1 tot a_2 grooter is dan de helft van den straal des eersten cylinders. Bij de oplossing van het tweede gedeelte nemen we dit dus aan.

2. De drie raaklijnen in het drievoudige punt zijn de projecties van de lijn g, die in S loodrecht staat op het horizontale vlak, en de beide dubbelpuntsraaklijnen van de doorsnee, die met betrekking tot de projectie van g symmetrisch liggen. Uit een eenvoudige meetkundige beschouwing (fig. 16) volgt nu

$$\mathrm{Tg}^2\phi = \frac{\overline{PQ_1}^2}{\overline{PQ_2}^2} = \frac{\overline{QQ_2}^2}{\overline{QQ_1}^2} = \frac{DQ \cdot QA_2}{DQ \cdot QA_1}$$

en dus bij de grens $\mathrm{Tg}^2\phi = r_2/r_1$. Hieruit vindt men de dubbelpuntsraaklijnen en uit deze kan men de projectie gemakkelijk afleiden.

Vraagstuk XXVI.

Men vraagt de vergelijkingen

$$x^2 = 2y^2 \pm 1$$

in geheele getallen op te lossen. (É. LEMOINE.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. J. VAN LAAR, F. F. LEUPEN, A. A. NIJLAND, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, Dr. C. STOLP *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA *en* W. H. L. JANSSEN VAN RAAY.

Als we in $x^2 = 2y^2 + 1$ de substituties $x = y + y_1$, $y = y_1 + x_1$ doen, vinden we $x_1^2 = 2y_1^2 - 1$. Substitueeren we hierin $x_1 = y_1 + y_2$, $y_1 = y_2 + x_2$, dan vinden we $x_2^2 = 2y_2^2 + 1$. Wijl deze laatste vergelijking van denzelfden vorm is als de eerste en we door met behulp van beide substituties van $x^2 = 2y^2 + 1$ tot $x_2^2 = 2y_2^2 + 1$ te komen tevens de andere vergelijking

$x_1{}^2 = 2y_1{}^2 - 1$ voorbijgaan, zijn we in staat gesteld van de oplossing $x = 1$, $y = 0$ der vergelijking $x^2 = 2y^2 + 1$ uitgaande alle oplossingen der beide vergelijkingen te vinden. De uitkomst is

$$\begin{array}{llllllll}
x_2 = & & 1, & 3, & 17, & 99, & 577, & \ldots \\
y_2 = & & 0, & 2, & 12, & 70, & 408, & \ldots \\
x_1 = & & 1, & 7, & 41, & 239, & 1393, & \ldots \\
y_1 = & & 1, & 5, & 29, & 169, & 985, & \ldots \\
x = 1, & 3, & 17, & 99, & 577, & 3363, & \ldots \\
y = 0, & 2, & 12, & 70, & 408, & 2378, & \ldots
\end{array}$$

AANMERKINGEN. I. Men voldoet aan de vergelijkingen door te stellen

$$x = \tfrac{1}{2}(p^m \pm p^{-m}) \quad , \quad y = \tfrac{1}{4}(p^m \mp p^{-m}) \sqrt{2}.$$

Dus vindt men *geheele* waarden voor x en y door $p = 1 + \sqrt{2}$ te stellen. Dan wordt

$$x = 1 + \binom{n}{2} 2 + \binom{n}{4} 2^2 + \ldots, \; y = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} 2 + \binom{n}{5} 2^2 + \ldots 1),$$

waarbij de waarden voor even n bij $x^2 = 2y^2 + 1$, de waarden voor oneven n bij $x^2 = 2y^2 - 1$ behooren. (J. J. v. L.)

II. Uit bovenstaande substituties volgt $x = 2x_1 + x_2$, $y = 2y_1 + y_2$. Dus zijn de waarden van x en y de coëfficiënten van de wederkeerige reeksen ontstaan door ontwikkeling van de breuken $\frac{1+z}{1-2z-z^2}$ en $\frac{z}{1-2z-z^2}$. Hieruit vinden we de vergelijkingen 1) terug. (T. J. A.)

III. Uit $x^2 = 2y^2 \pm 1$ volgt Gr. $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$, voor $x = \infty$, $y = \infty$. Ontwikkelen we nu $\sqrt{2}$ in een kettingbreuk, dan is $\{1, 2, 2 \ldots\}$ de betrekkingswijzer en vinden we in de naderende breuken $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, enz. de waarden van x en y terug. (T. J. A.)

IV. Het vraagstuk is niet nieuw. Het is reeds opgelost door EULER (*Algebra*, § 98 in verband met § 44) en door LEGENDRE (*Théorie des nombres*, deel I, blz. 56 en 57). Bo-

vendien kan men raadplegen

Nouv. Ann. de Math., 1872 blz. 173, 1881 blz. 373.

Nouv. Corr. Math., 1877 blz. 194, 1878 blz. 166, 1879 blz. 285.

Journ. de Math. Élém., 1884, blz. 15.

Journ. de Math. Spéc., 1893, blz 23 en blz. 117.

Mathesis, 1886, blz. 162

Onbepaalde vergelijkingen van EGER (vergelijkingen van PELL en van LESLIE).

Op de laatste na zijn deze bronnen opgegeven door de LONGCHAMPS.

Vraagstuk XXVII.

De door het punt A eener gegeven ellips gaande middellijn staat loodrecht op een der gelijke toegevoegde middellijnen. Te bewijzen, dat het vraagstuk, de drie door A gaande en bij een van A verschillend punt behoorende normalen te bepalen, een kwadratisch vraagstuk is en dit dus met behulp van lineaal en passer kan worden opgelost. (G. DE LONGCHAMPS).

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, J. CARDINAAL, G. DE LONGCHAMPS, W. MANTEL, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

1. Zooals men weet, zijn de voetpunten der normalen uit een willekeurig punt A op de ellips neergelaten de snijpunten van deze met de bij A behoorende hyperbool van APOLLONIUS en is deze te beschouwen als de meetkundige plaats van het snijpunt P der middellijn OQ_1 van de ellips met de loodlijn uit A op de toegevoegde middellijn OQ_2 van OQ_1, als OQ_1 en OQ_2 veranderen. Deze hyperbool wordt gemakkelijk bepaald door de twee punten A, O, de oneindig ver gelegen punten van de assen der ellips en de raaklijn in O. Deze raaklijn nl. is de middellijn van de ellips, die toegevoegd is aan de middellijn, op welke AO loodrecht staat.

2. Passen we dit toe op het geval, dat A de in het vraagstuk aangewezen ligging heeft, dan is die diagonaal CD (fig. 17) van den rechthoek op de assen, waarop AO niet

loodrecht staat, de raaklijn in O aan de hyperbool. Wijl twee toegevoegde middellijnen van de gelijkzijdige hyperbool een hoek vormen, die door de asymptoten middendoorgedeeld wordt, gaat EF dus door het midden van de koorde door de lijn door A evenwijdig aan CD in de hyperbool bepaald. Dus gaat de hyperbool door B en is AB een der drie door A gaande normalen, die elders loodrecht staan op de ellips. Dus is de bepaling der beide andere normalen een kwadratisch vraagstuk.

AANMERKINGEN. I. De vierhoek AOBG is een koordenvierhoek, want de hoeken AOG en ABG zijn recht. (G. D. L.)

II. De verbindingslijn van de voetpunten der beide andere normalen kan nu met behulp van de bekende constructie van JOACHIMSTHAL gevonden worden. Deze constructie is in de figuur uitgevoerd; de bedoelde lijn MN is door haar snijpunten M en N met de assen bepaald.

III. De vermelde eigenschap is bekend. In de *Sitzungsberichte* van Weenen (deel 98, blz. 1519) heeft Dr. SCHOUTE met behulp van beschouwingen aan het oppervlak van den derden graad ontleend bewezen, dat de meetkundige plaats der punten, waarvoor het vraagstuk, de vier door een punt gaande normalen eener ellips te bepalen, tot twee kwadratische vraagstukken kan teruggebracht worden, bestaat uit:

1°. de assen en de lijn in het oneindige,

2°. de middellijnen $ax = by$, gevonden door MANTEL, *Wiskundige Opgaven*, deel 2, blz. 120), TESCH en PELZ,

3°. de cirkels $\left(x \pm \frac{bc}{a}\right)^2 + y^2 = c^2$, gevonden door LAUERMANN.

(J. D. V.)

OPMERKING VAN Dr. J. DE VRIES. Door ECKARDT (SCHLÖMILCH's *Zeitschrift* deel 18, blz. 107) werd aangetoond, dat voor elk punt der beide cirkels $x^2 + y^2 = (a \pm b)^2$ één normaal aan de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ gemakkelijk kan aangewezen worden. Uit het volgende blijkt, dat er een ellips is, waarvan hetzelfde geldt.

De snijpunten der hyperbool van APOLLONIUS

$$a^2x_1y - b^2y_1x = c^2xy$$

van het punt (x_1, y_1) met de ellips $x = a \operatorname{Cos} \phi$, $y = b \operatorname{Sin} \phi$

zijn bepaald door de vergelijking

$$2ax_1 \text{ Sin } \phi - 2by_1 \text{ Cos } \phi = c^2 \text{Sin } 2\phi.$$

Stelt men nu $2ax_1 = c^2 \text{ Cos } \omega$ en $2by_1 = c^2 \text{ Sin } \omega$, dan gaat deze vergelijking over in $\text{Sin } (\phi - \omega) = \text{Sin } 2\phi$, of in $\text{Sin } \frac{1}{2} (\phi + \omega) \text{ Cos } \frac{1}{2} (3\phi - \omega) = 0$. Dus zijn de voetpunten der vier normalen bepaald door

$$\phi_1 = 2\pi - \omega, \ \phi_2 = \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\omega, \ \phi_3 = \pi + \tfrac{1}{3}\omega, \ \phi_4 = \tfrac{5}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\omega,$$

zoodat de eerste geconstrueerd kan worden.

De meetkundige plaats van het punt $2ax_1 = c^2\text{Cos}\omega$, $2by_1 = c^2\text{Sin}\omega$ is blijkbaar de ellips $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = c^4$.

Vraagstuk XXVIII.

Op een gegeven middellijn AB van een gegeven cirkel neemt men de punten P en P′ symmetrisch aan met betrekking tot het middelpunt. Gevraagd door P en P′ twee koorden CD en C′D′ te construeeren, waarvoor CC′ een gegeven lengte heeft en DD′ door een gegeven punt Q van AB gaat. (G. DE LONGCHAMPS).

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, G. DE LONGCHAMPS, W. MANTEL *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* W. MANTEL.

De kegelsneden door C, D, C′, D′ snijden de middellijn AB volgens een involutie, die bepaald is door de twee paren AB en PP′. Deze paren liggen ter weerszijden even ver van het middelpunt; dus is dit zoo met alle paren. Dus snijdt CC′ de middellijn AB in het punt, dat aan den anderen kant even ver ligt van het middelpunt als Q. Hierna is de constructie dadelijk aan te geven.

AANMERKINGEN VAN DEN HEER ALLERSMA. I. Aldus vindt men dezelfde uitkomst zonder van de wetten der kwadratische involutie gebruik te maken.

Zij M (fig. 18) het middelpunt van den cirkel, S het snijpunt van CD en C′D′, Q′ dat van AB en CC′. Stel $MP' = PM = p$ en beschouw QD′D en Q′CC′ als transversalen van driehoek SPP′.

Dan is

$$SD' \,.\, PD \,.\, P'Q = SD \,.\, PQ \,.\, P'D',$$
$$SC' \,.\, PC \,.\, P'Q' = SC \,.\, PQ' \,.\, P'C'.$$

Verder is

$$\begin{aligned} SD \cdot SC &= SC' \cdot SD', \\ PA \cdot PB &= PD \cdot PC, \\ P'D' \cdot P'C' &= P'A \cdot P'B, \\ P'A \cdot P'B &= PA \cdot PB. \end{aligned}$$

Door deze vergelijkingen met elkander te vermenigvuldigen vinden wij

$$P'Q' \cdot P'Q = PQ' \cdot PQ,$$

of

$$(MQ' + p)(MQ - p) = (MQ' - p)(MQ + p),$$

waaruit de gelijkheid van MQ en MQ′ volgt, zoodat Q en Q′ weder symmetrisch liggen ten opzichte van M, enz.

II. De boven gevonden eigenschap is gemakkelijk analytisch te bewijzen. Stellen wij nl. de vergelijkingen van CD, C′D′, DQ, CQ′ door

$$x + my - p = 0\ ,\ x + m'y + p = 0\ ,\ x + ny + q = 0\ ,\ x + n'y + q' = 0$$

voor, dan is de algemeene vergelijking der krommen van den tweeden graad, die door C, C′, D, D′ gaan,

$$k\,(x + my - p)\,(x + m'y + p) + (x + ny + q)\,(x + n'y + q') = 0.$$

Nu moet deze vergelijking met die van cirkel M, d.i. met $x^2 + y^2 = a^2$ kunnen overeenstemmen. Hiertoe is o.a. de voorwaarde $q + q' = 0$ noodig, zoodat Q en Q′ symmetrisch moeten liggen ten opzichte van M, enz.

Vraagstuk XXIX.

De beide hyperbolen

$$xy = py + qx\,,\ x^2 - y^2 = (p + q \operatorname{Cos} \theta)\,x - (q + p \operatorname{Cos} \theta)\,y$$

snijden elkaar behalve in den oorsprong nog in drie punten. Gevraagd de vergelijking van den cirkel, die door deze drie snijpunten gaat, als θ de hoek is, dien de coördinaatassen met elkaar vormen.

(T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, J. CARDINAAL, W. MANTEL *en* A. A. NIJLAND.

Oplossing *van* W. MANTEL.

De algemeene vergelijking der kubische krommen, die door de vier snijpunten der gegeven hyperbolen gaan, is

$$(Ax + By + C)(xy - py - qx) +$$
$$+ (Dx + Ey + F)[x^2 - y^2 - (p + q \operatorname{Cos} \theta) x + (q + p \operatorname{Cos} \theta) y] = 0.$$

Hierin nu kan men over de vijf verhoudingen der nieuwe coëfficiënten zoo beschikken, dat de termen zonder y (hier alleen x^3, x^2, x) verdwijnen en de termen met yx^2, y^2x, y^3 samen genomen in den vorm $Gy(x^2 + 2xy \operatorname{Cos} \theta + y^2)$ verschijnen. Stelt men dan $A = 2$, zoo vindt men

$$x^2 + 2xy \operatorname{Cos} \theta + y^2 - 3x(p + q \operatorname{Cos} \theta) - 3y(q + p \operatorname{Cos} \theta) +$$
$$+ 2(p^2 + q^2 + 2pq \operatorname{Cos} \theta) = 0.$$

AANMERKINGEN. I. Bovenstaande handelwijs is reeds gevolgd bij de oplossing van vraagstuk 120 van deel I der *Wiskundige Opgaven.*

II. De tweede hyperbool snijdt de eerste in de voetpunten der normalen uit O op de eerste neergelaten. De gevonden cirkel is dus de cirkel van JOACHIMSTHAL. Naar behooren gaat deze cirkel door het punt $(2p, 2q)$, dat op de eerste hyperbool diametraal tegenover O ligt.

Vraagstuk XXX.

Als de snijpunten van twee parabolen P_1 en P_2 op een gegeven middelpuntskegelsnee K liggen en r_1 en r_2 de richtlijnen dezer parabolen zijn, dan zijn er een oneindig aantal paren P_1 en P_2 van parabolen met r_1 en r_2 tot richtlijnen, wier snijpunten op K liggen. Men vraagt:

a) een constructie van de brandpunten F_1 en F_2 van twee overeenkomstige parabolen,

b) de meetkundige plaatsen van die brandpunten F_1 en F_2,

c) de omhullende van F_1F_2. (T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing.

De drie oplossingen verschillen alleen in vorm. Uit deze is de volgende afgeleid.

1. Drie kegelsneden van een zelfden bundel snijden een rechte volgens drie puntenparen in involutie. Past men deze stelling voor de beide parabolen P_1 en P_2 en de middelpuntskegelsnee K op de lijn in het oneindige toe, dan blijkt, dat de assen van P_1 en P_2 deze lijn snijden in twee punten, die harmonisch liggen met de oneindig ver verwijderde punten van K. Dus zijn de assen van P_1 en P_2 evenwijdig met een paar toegevoegde middellijnen van K en staan de richtlijnen van P_1 en P_2 loodrecht op een paar toegevoegde middellijnen van K. (RED.)

2. We nemen de toegevoegde middellijnen van K, die loodrecht staan op de richtlijnen der parabolen tot assen aan en stellen de lengte OA, OB der halve middellijnen door a, b, den hoek AOB door ω, de langs OA en OB vallende afstanden OC en OD van O tot de richtlijnen CH en DH door p en q en de coördinaten van de brandpunten F_1 en F_2 door (x_1, y_1) en (x_2, y_2) voor.

Dan zijn de vergelijkingen van P_1, P_2 en K

$$P_1 \equiv (x-x_1)^2+2(x-x_1)(y-y_1)\operatorname{Cos}\omega+(y-y_1)^2-(x+y\operatorname{Cos}\omega-p)^2=0,$$

$$P_2 \equiv (x-x_2)^2+2(x-x_2)(y-y_2)\operatorname{Cos}\omega+(y-y_2)^2-(x\operatorname{Cos}\omega+y-q)^2=0,$$

$$K \equiv b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

en geeft de vergelijking der coëfficiënten van x^2 en y^2 aan, dat het verband tusschen de vergelijkingen van de tot een bundel behoorende drie krommen den vorm $b^2P_2+a^2P_1=K\operatorname{Sin}^2\omega$ moet aannemen.

Hieruit volgt dan door gelijkstelling der overige coëfficiënten

$$b^2\{x_2+(y_2-q)\operatorname{Cos}\omega\}+a^2\{x_1-p+y_1\operatorname{Cos}\omega\}=0,$$

$$b^2\{y_2-q+x_2\operatorname{Cos}\omega\}+a^2\{y_1+(x_1-p)\operatorname{Cos}\omega\}=0,$$

$$b^2(x_2{}^2+2x_2y_2\operatorname{Cos}\omega+y_2{}^2-q)+a^2(x_1{}^2+2x_1y_1\operatorname{Cos}\omega+y_1{}^2-p^2)=-a^2b^2\operatorname{Sin}^2\omega.$$

Uit de eerste en tweede volgt

$$a^2x_1+b^2x_2=(a^2+b^2)\frac{a^2p}{a^2+b^2},\quad a^2y_1+b^2y_2=(a^2+b^2)\frac{b^2q}{a^2+b^2}.$$

Hieruit volgt, dat F_1F_2 het punt $\left(\frac{a^2p}{a^2+b^2}, \frac{b^2q}{a^2+b^2}\right)$ omhult

en dit punt M steeds zoo op F_1F_2 ligt, dat aan de betrekking

$$F_1M : F_2M = - b^2 : a^2$$

voldaan is. Dus verdeelt M den afstand F_1F_2 inwendig in dezelfde reden b^2/a^2.

3. Door eliminatie van x_2 en y_2 vinden we voor de meetkundige plaats van F_1 den cirkel

$$(a^2+b^2)(x^2+2xy \operatorname{Cos}\omega+y^2)-2(a^2p+b^2q\operatorname{Cos}\omega)x -$$
$$-2(a^2p\operatorname{Cos}\omega+b^2q)y+(a^2-b^2)p^2+2b^2pq\operatorname{Cos}\theta-b^4\operatorname{Sin}^2\omega=0,$$

waarvan M en $\frac{b^2}{a^2+b^2}\sqrt{p^2-2pq\operatorname{Cos}\omega+q^2-(a^2+b^2)\operatorname{Sin}^2\omega}$ middelpunt en straal zijn. Evenzoo vindt men voor de meetkundige plaats van F_1 een cirkel met M tot middelpunt en $\frac{a^2}{a^2+b^2}\sqrt{p^2-2pq\operatorname{Cos}\omega+q^2-(a^2+b^2)\operatorname{Sin}^2\omega}$ tot straal. Wijl het punt M en de stralen der beide cirkels gemakkelijk te construeeren zijn, is hiermee het vraagstuk opgelost.

(T. J. A. en W. M.)

Aanmerkingen. I. Als men het teeken van b^2 omkeert, vindt men de oplossing voor het geval, dat K een hyperbool is; dan verdeelt M den afstand F_1F_2 uitwendig in de standvastige verhouding b^2/a^2.

II. Is $(a^2+b^2)\operatorname{Sin}^2\omega$ grooter dan $p^2-2pq\operatorname{Cos}\omega+q^2$, d. i. het vierkant van CD, dan zijn de stralen der beide cirkels onbestaanbaar.

III. Is $a^2+b^2=0$ en K dus een gelijkzijdige hyperbool, dan zijn de meetkundige plaatsen van F_1 en F_2 twee lijnen loodrecht op CD.

Vraagstuk XXXI.

Gegeven twee kwadratische oppervlakken A^2 en B^2 en een vlak γ. Gevraagd :

a) de meetkundige plaats der in γ gelegen punten, waarvoor de aan A^2 en B^2 aangebrachte omhullingskegels elkaar aanraken,

b) het aantal der in γ gelegen punten, waarvoor de omhullingskegels dubbele aanraking hebben,

c) het aantal der in γ gelegen punten, waarvoor de omhullingskegels elkaar osculeeren. (J. Cardinaal.)

Opgelost *door* J. Cardinaal *en* H. de Vries.

Oplossing.

Zullen de beide omhullingskegels van een punt P elkaar aanraken, d.w.z. langs een van hun gemeenschappelijke beschrijvende lijnen r ook hetzelfde raakvlak ρ hebben, dan moet ρ een gemeenschappelijk raakvlak van A^2 en B^2 en r de verbindingslijn der beide raakpunten zijn. Het punt P moet dus gelegen zijn op het ontwikkelbaar oppervlak O, dat omhuld wordt door alle gemeenschappelijke raakvlakken ρ van A^2 en B^2.

Het oppervlak O is van de vierde klasse en den achtsten graad. Zijn keerkromme is van den twaalfden graad en zijn dubbelkromme bestaat uit vier kegelsneden, gelegen in de vier vlakken van het gemeenschappelijk pooltetraëder van A^2 en B^2. Bovendien liggen in ieder plat vlak twee rechte lijnen door welke twee raakvlakken van O gaan en die dus voor de vlakke doorsnede van het vlak met O dubbelraaklijnen zijn.

Terwijl nu O de meetkundige plaats is van alle punten, waarvoor de omhullingskegels elkaar aanraken, vormen de vier dubbelkegelsneden de meetkundige plaats der punten, voor welke deze kegels elkaar dubbel aanraken, terwijl op de keerkromme alle punten liggen, waarvoor de kegels elkaar osculeeren.

De doorsnede van O met het gegeven vlak γ is een vlakke kromme van den achtsten graad en de vierde klasse, die acht dubbelpunten heeft (de snijpunten van γ met de vier dubbelkegelsneden) en twaalf keerpunten (de snijpunten van γ met de keerkromme). Zij bezit bovendien twee dubbelraaklijnen.

Voor een willekeurig punt dezer kromme zullen de beide omhullingskegels elkaar aanraken; voor elk der acht dubbelpunten zullen zij elkaar dubbel aanraken en voor elk der twaalf keerpunten zullen zij elkaar osculeeren.

Vraagstuk XXXII.

Stellen $\varphi(x, y) = 0$ en $\psi(x, y) = 0$ twee krommen van de graden m en n voor en is $U(x, y)$ een vorm van den $m + n - 3^{\text{den}}$ graad, dan heeft volgens Jacobi de uitdrukking

$$\sum_1^{mn} \frac{U(x, y)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}},$$

uitgestrekt over de mn snijpunten (x, y) der beide krommen, de

waarde nul. Men vraagt dit met residuen aan te toonen, in de onderstelling dat de kromme $\psi = o$ geen andere bijzonderheden dan dubbelpunten en keerpunten bezit en de vorm ψ in ieder der veranderlijken van den n^{den} graad is. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

Is (ξ, η) een snijpunt der krommen $\phi(x, y) = 0$ en $\psi(x, y) = 0$ en stelt $x = \xi + x'$, $y = \eta + y'$ het op dit snijpunt volgende punt van $\psi(x, y)$ voor, dan is

$$\psi(x, y) = \psi(\xi + x', \eta + y') = x' \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + y' \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \ldots = 0$$

en dus bij de grens

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \psi}{\partial \eta}}.$$

Voor dit zelfde punt is

$$\phi(x, y) = \phi(\xi + x', \eta + y') = x' \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + y' \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \ldots = \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial \eta}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right).$$

De te bewijzen betrekking is dus $\mathcal{E} \dfrac{U(x, y)}{\frac{\partial \psi}{\partial y}((\phi(x, y)))} = 0.$

2. In een vertakkingspunt, een dubbelpunt en een keerpunt van $\psi(x, y) = 0$ zijn twee waarden van $\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ oneindig klein en wel achtereenvolgens als $kx'^{\frac{1}{2}}$, kx' en $kx'^{\frac{3}{2}}$, waarin k telkens een constante aanduidt. Derhalve is $\mathcal{E} \dfrac{U(x, y)}{\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right) \phi(x, y)} = 0$. En dus wordt

$$\mathcal{E} \frac{U(x, y)}{\frac{\partial \psi}{\partial y}((\phi(x, y)))} = \mathcal{E}\left(\left(\frac{U(x, y)}{\frac{\partial \psi}{\partial y} \phi(x, y)}\right)\right) - \mathcal{E} \frac{U(x, y)}{\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right) \phi(x, y)} = \mathcal{E}\left(\left(\frac{U(x, y)}{\frac{\partial \psi}{\partial y} \phi(x, y)}\right)\right).$$

Stelt men nu $x = \infty$, dan is de functie onder het residuteeken oneindig klein als $\dfrac{k}{x^2}$ en dus het residu nul.

Vraagstuk XXXIII.[1])

De integraal $\int_{\infty}^{\lambda} e^{-r\lambda} \operatorname{Sin} p\lambda d\lambda$, waarin p een bestaanbaar getal voorstelt, is eindig en doorloopend, als het bestaanbare deel van r positief is. Bepaalt men nu een functie $f(r)$, die voor alle waarden van r uniform is en met de integraal samenvalt, als het bestaanbare deel van r positief is, dan zal deze functie in twee punten oneindig worden. Neemt men dan de som der residuen van $e^{rz} f(r)$ ten opzichte van deze polen, dan vindt men — Sin pz. Men vraagt dit te bewijzen. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

Uit de bekende vergelijking

$$\int e^{-r\lambda} \operatorname{Sin} p\lambda d\lambda = - e^{-r\lambda} \frac{r \operatorname{Sin} p\lambda + p \operatorname{Cos} p\lambda}{r^2 + p^2} + C$$

volgt door invoering der grenzen en der voorwaarde voor r

$$\int_{\infty}^{\lambda} e^{-r\lambda} \operatorname{Sin} p\lambda d\lambda = - e^{-r\lambda} \frac{r \operatorname{Sin} p\lambda + p \operatorname{Cos} p\lambda}{r^2 + p^2}.$$

De functie $f(r) = - e^{-r\lambda} \frac{r \operatorname{Sin} p\lambda + p \operatorname{Cos} p\lambda}{r^2 + p^2}$ is uniform in het geheele vlak en stemt in de rechterhelft er van met de waarde van de integraal overeen. Schrijven we nu

$$f(r) = - e^{-r\lambda} \frac{r \operatorname{Sin} p\lambda + p \operatorname{Cos} p\lambda}{r^2 + p^2} = \frac{e^{-(r+ip)\lambda}}{2i(r+ip)} - \frac{e^{-(r-ip)\lambda}}{2i(r-ip)},$$

dan blijkt terstond, dat de som der verlangde residuen ten opzichte van de beide polen $r = \mp ip$ is

$$-\frac{1}{2i}(e^{ipz} - e^{-ipz}) = - \operatorname{Sin} pz.$$

Vraagstuk XXXIV.

Van welke soort zijn de Abel'sche integralen

$$A = \int \frac{16(x+1)+y}{9(2x+3y+4)(y^2-1)} dx, \quad B = \int \frac{6x}{(y-2x\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(y^2-1)} dx$$

[1]) Dit vraagstuk heeft een beperking ondergaan, wijl het in den oorspronkelijken algemeenen vorm niet geheel juist was.

behoorende bij de kromme $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$ en welke zijn de sommen dier integralen genomen tusschen de snijpunten der lijnen $x = 0$ en $x = p$ met de kromme. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

1. De raaklijn in het punt $(1, -2)$ aan de kromme is $2x + 3y + 4 = 0$; zij snijdt deze nog in het punt $(-\frac{22}{23}, -\frac{16}{23})$, dat op de rechte $16(x + 1) + y = 0$ ligt. Dus is A een integraal van de tweede soort, die alleen oneindig wordt in het punt $(1, -2)$.

Evenzoo is $y - 2x\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} = 0$ de raaklijn aan de kromme in het punt $(\frac{1}{3}\sqrt[6]{432}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$, die door het punt $(0, -\sqrt{3})$ gaat, dat op de rechte $x = 0$ ligt. Dus is B ook een integraal van de tweede soort, die alleen oneindig wordt in het punt $(\frac{1}{3}\sqrt[6]{432}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

2. Om te zien, hoe A oneindig wordt, stellen we $x = 1 + x'$, $y = -2 + y'$. Dan volgt uit de vergelijking der kromme de betrekking $6x' + 9y' = -\frac{10}{3}x'^2$. Dus is de vorm onder het integraalteeken oneindig als $-\frac{1}{x'^2}$ en de integraal zelve als $\frac{1}{x'}$. Evenzoo stellen we voor B in de vergelijking der kromme $x = \frac{1}{3}\sqrt[6]{432} + x'$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} + y'$. Dit geeft ons $y' - 2x'\sqrt[3]{2} = 3x'^2\sqrt[6]{432}$, enz.

3. De integralen A en B zijn dus beide normaalintegralen van de tweede soort. Volgens het theorema van ABEL is de waarde van elk der integralen tusschen de gegeven grenzen dus

$$\frac{d\left(lg\,\dfrac{\xi}{\xi - p}\right)}{d\xi} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - p}$$

waarin voor ξ achtereenvolgens de waarden 1 en $\frac{1}{3}\sqrt[6]{432}$ gesubstitueerd moeten worden.

Vraagstuk XXXV.

Als 2ω een periode is van de eenwaardige dubbelperiodieke functie $f(u)$ en deze functie aan de voorwaarde $f(u + \omega) = -f(u)$

voldoet, is de integraal van $f(u)\,du$ pseudo-elliptisch (*Cours de* M. HERMITE, 4ième édition, blz. 25). Men vraagt dit te bewijzen.

(J. C. KLUYVER).

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

1. Een eenwaardige dubbelperiodieke functie $f(u)$ is een rationale uitdrukking van de functie $\wp(u)$ van WEIERSTRASS en haar afgeleide $\wp'(u)$. Uit de voorwaarde $f(u+\omega) = -f(u)$ volgt, dat naast elke pool v er ook een pool $v+\omega$ moet zijn. In de ontwikkeling van $f(u)$ geven deze beide polen aanleiding tot de onderstaande groep van termen:

$$c + m_s \wp^{(s)}(u-v) + m_{s-1}\wp^{(s-1)}(u-v) + \ldots m_0 \wp(u-v) + l\xi(u-v) +$$
$$+ M^s \wp^{(s)}(u-v-\omega) + M_{s-1}\wp^{(s-1)}(u-v-\omega) + \ldots$$
$$+ M_0 \wp(u-v-\omega) + L\xi(u-v-\omega).$$

In de ontwikkeling van $f(u+\omega)$ treft men dus de volgende termen aan:

$$c + m_s \wp^{(s)}(u-v+\omega) + m_{s-1}\wp^{(s-1)}(u-v+\omega) + \ldots$$
$$m_0 \wp(u-v+\omega) + l\xi(u-v-\omega) + 2l\eta +$$
$$M_s \wp^{(s)}(u-v) + M_{s-1}\wp^{(s-1)}(u-v) + \ldots M_0 \wp(u-v) + L\xi(u-v).$$

Daaruit volgt, omdat steeds $f(u+\omega) = -f(u)$ is,

$c = -c + 2l\eta$, $m_s = -M_s$, $m_{s-1} = -M_{s-1}$, $\ldots m_0 = -M_0$, $l = -L$.

Dus vindt men

$$f(u) = \sum\Big[m_s\{\wp^{(s)}(u-v) - \wp^{(s)}(u-v-\omega)\} + m_{s-1}\{\wp^{(s-1)}(u-v) - \wp^{(s-1)}(u-v-\omega)\} + \ldots$$
$$+ m_0\{\wp(u-v) - \wp(u-v-\omega)\} + l\{\xi(u-v) - \xi(u-v-\omega) - \eta\}\Big].$$

Het Σ-teeken drukt hier uit, dat elk paar polen v, $v+\omega$ een groep van termen geeft.

Uit het optellingstheorema der ξ-functies volgt

$$\xi(u-v-\omega) = \xi(u-v) - \xi(\omega) + \tfrac{1}{2}\frac{\wp'(u-v)}{\wp(u-v) - \wp(\omega)},$$

$$\xi(u-v) - \xi(u-v-\omega) - \eta = -\tfrac{1}{2}\frac{\wp'(u-v)}{\wp(u-v) - \wp(\omega)}.$$

De integratie van $f(u)$ levert nu behalve eene rationale functie van $\wp(u)$ en $\wp'(u)$, die door $F(u)$ zal worden voorgesteld, nog termen, die ξ-functies bevatten.

Men heeft nl.

$$\int f(u)du = F(u) - \sum\Big[m_0\{\xi(u-v)-\xi(u-v-\omega)\}\Big] - \tfrac{1}{2}\sum\Big[l\log\{p(u-v)-p(\omega)\}\Big] + c_1,$$

of

$$\int f(u)du = F(u) + \tfrac{1}{2}\sum\left[\frac{m_0 p'(u-v)}{p(u-v)-p(\omega)}\right] - \tfrac{1}{2}\sum\Big[l\log\{p(u-v)-p(\omega)\}\Big] + c'_1.$$

Daar $p'(u-v)$ en $p(u-v)$ rationaal in $p(u)$ en $p'(u)$ zijn uit te drukken, bevat de integraal ten slotte alleen rationale functies van $p(u)$ en $p'(u)$, benevens logarithmen van zulke vormen. Die integraal is derhalve pseudo-elliptisch.

2. Om een voorbeeld te nemen, kiezen wij de integraal

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}},$$

die door de substitutie $x^2 = p(u)$ overgaat in $I = \int \frac{p(u)}{p^2(u)-1}\,du$, waarbij $p'^2(u) = \sqrt{4p^3(u)+4p(u)}$ is.

We hebben hier dus met een negatieven discriminant te doen. Verder zijn $e_1 = i$, $e_2 = o$, $e_3 = -i$ en is er een bestaanbare periode $2\omega_2$, waarvoor $p(\omega_2) = 0$ is, zoodat de betrekking $p(u+\omega_2) - e_2 = \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{p(u)-e_2}$ hier in $p(u+\omega_2) = \frac{1}{p(u)}$ overgaat.

Inderdaad is hier dus $f(u+\omega_2) = -\frac{1}{f(u)}$ en de integraal pseudo-elliptisch.

De functie $f(u)$ heeft vier enkele polen $\pm v$ en $\pm w$ bepaald door $p(v) = 1$, $p(w) = -1$.

Men heeft

$$\frac{p(u)}{p^2(u)-1} = c + A\Big[\xi(u-v) - \xi(u+v)\Big] + B\Big[\xi(u-w) - \xi(u+w)\Big]$$

en vindt oogenblikkelijk op de gewone wijze

$$A = \frac{1}{2p'(v)} \quad , \quad B = \frac{1}{2p'(w)}.$$

Voor men c bepaalt, is het van belang op de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{\omega_2}{2}\right) &= e_2 + p^2 + q^2 \\ p\left(\frac{\omega_2'}{2}\right) &= e_2 - p^2 - q^2 \end{aligned}\right\} \sqrt{e_2 - e_3} = p + qi$$

(zie HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques I*, blz. 75) te letten. Zij geven hier

$$p = q = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad , \quad \begin{array}{l} \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \wp(v) = 1 \quad , \quad \wp'(v) = -2\sqrt{2}, \\ \wp\left(\frac{\omega_2'}{2}\right) = \wp(w) = -1, \quad \wp'(w) = -2i\sqrt{2}. \end{array}$$

Het optellingstheorema der ξ-functies geeft dus

$$\xi\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right) = \xi\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right) + \eta_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)}{\wp\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)-e_2};$$

dus is hier

$$\frac{\wp(u)}{\wp^2(u)-1} = c_1 - \frac{1}{4\wp'\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}\cdot\frac{\wp'\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)}{\wp\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)} - \frac{1}{4\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2}\right)}\cdot\frac{\wp'\left(u-\frac{\omega'_2}{2}\right)}{\wp\left(u-\frac{\omega'_2}{2}\right)}.$$

Voor $u = 0$ vindt men

$$c_1 - \frac{1}{4\wp\frac{\omega_2}{2}} - \frac{1}{4\wp\frac{\omega'}{2}} = c_1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 0, \text{ of } c_1 = 0.$$

Dus is

$$1 = \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\wp\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{1}{8i\sqrt{2}}\log\wp\left(u-\frac{\omega'_2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{(1+x^2)^2+2x\sqrt{2(1+x^4)}}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{8i\sqrt{2}}\log\frac{-(1-x^2)^2+2x\sqrt{-2(1+x^4)}}{(1+x^2)^2} + c =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{1-x^2} + \frac{1}{4i\sqrt{2}}\log\frac{-x\sqrt{-2}+\sqrt{1+x^4}}{1+x^2} + c' =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{Bg}\sin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + c''.$$

Men vergelijke FRENET, *Recueil d'exercices*, Calcul Int. N°. 404.

Vraagstuk XXXVI.

De functie $\wp(u)$ ontstaan door de omkeering van de integraal

$$u = \int_{\wp(u)}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-4}}$$

heeft de bestaanbare periode $2\omega_2$, de onbestaanbare periode $2\omega'_2$ en de complexe periode $\omega_2 \pm \omega_2'$. Te bewijzen, dat de functie P (u) ontstaan door de omkeering van de integraal

$$u = \int_{P(u)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 60x - 88}}$$

de perioden ω_2, ω'_2 en $\omega_2 \pm \omega'_2$ bezit. (J. C. KLUYVER).

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

1. In fig. 19 is op de gebruikelijke wijze het perioden-parallelogram ABGH der gegeven p-functie afgebeeld. Men heeft

$$AB = 2\omega_2 \quad , \quad p(\omega_2) = e_2 = 1 ,$$
$$AD = 2\omega'_2 , \quad , \quad p(\omega'_2) = e_2 = 1 ,$$
$$AH = 2\omega_3 = \omega_2 + \omega'_2 \quad , \quad p(\omega_3) = e_3 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Verder is

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2 \quad , \quad p(\omega_1) = e_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Een functie P(u) met de perioden AE $= \omega_2$ en AH $= 2\omega_3$ heeft AEFH tot primitief perioden-parallelogram en is dus dubbel-periodiek van de vierde orde in ABGH. Men kan dus stellen $P(u) = C + Ap(u) + Bp(u - \omega_2)$, omdat P($u$) en ABGH alleen de dubbele polen 0 en ω_2 bezit. Onmiddellijk toont men aan, dat $A = 1$, $B = 1$ is. Achtereenvolgens vindt men door te stellen $u = \frac{\omega_2}{2}$, ω_3, ω_3, $\frac{\omega_2}{2} + \omega_3$, welke grootheden de halve perioden van P(u) zullen zijn, nl.

$$\left.\begin{aligned} P\left(\frac{\omega_2}{2}\right) &= \varepsilon_1 = C + 2p\left(\frac{\omega_2}{2}\right) &&= C + 2e_2 + 2(p^2 + q^2) \\ P(\omega_3) &= \varepsilon_2 = C + p(\omega_3) + p(\omega_1) &&= C + e_1 + e_3 \\ P\left(\frac{\omega_2}{2} + \omega_3\right) &= \varepsilon_3 = C + 2p\left(\frac{\omega_2'}{2}\right) &&= C + 2e_2 - 2(p^2 + q^2) \end{aligned}\right\}, \text{ als } \sqrt{e_2 - e_3} = p + iq \text{ is.}$$

Optelling geeft $3C + 3e_2 = 0$, of $C = -e_2$ en uit de boven reeds genoemde waarden van e_1, e_2, e_3 volgt dan $p^2 + q^2 = \sqrt{3}$ en $\varepsilon_1 = 1 + 2\sqrt{3}$, $\varepsilon_2 = -2$, $\varepsilon_3 = 1 - 2\sqrt{3}$.

De functie P(u) ontstaat door de omkeering van de integraal

$$u = \int_{P(u)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_3)}} = \int_{P(u)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x_3 - 60x - 88}}.$$

De functie $P(u)$ heeft zooals uit het bovenstaande blijkt de perioden ω_2, $2\omega_3$, $\omega_2 + 2\omega_3$ dus ook $2\omega_3 - \omega_2 = \omega'_2$ en daarmede is het gestelde bewezen. In overeenstemming met den positieven discriminant kan men ook AEHK als primitief perioden-parallelogram nemen. Men heeft dan

$$AE = \Omega \quad , \quad P(\Omega) = \varepsilon_1 ,$$
$$AK = \Omega' \quad , \quad P(\Omega') = \varepsilon_3 ,$$
$$AH = \Omega'' \quad , \quad R(\Omega'') = \varepsilon_2 .$$

2. Ter controle kan men nog voor beide functies benaderen $q' = e^{\frac{i\pi\omega'_2}{\omega_2}}$ en $q = e^{\frac{i\pi\Omega'}{\Omega}}$. Men moet dan, zooals bekend is, $q' = e^{-\pi\sqrt{3}}$ vinden (zie HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, I, blz. 83). Berekent men dus alleen q volgens de formule

$$q = \frac{l}{2} + l\,(q^4 + q^{16} + \dots\dots) - \dots\dots$$

$$\tfrac{1}{2}l = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - \sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}{\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} + \sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}},\ \text{(HALPHEN, I, blz.270)}$$

en gebruikt men de eerste benadering, dan komt er

$$q = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{3}}} = 0.004333 ,$$

terwijl men heeft $e^{-\pi\sqrt{3}} = 0.0043336$.

Vraagstuk XXXVII.

De functie $\wp(u)$ ontstaan door de omkeering van de integraal

$$u = \int_{\wp(u)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4x}}$$

heeft de bestaanbare periode 2ω, de onbestaanbare periode $2\omega'$ en de complexe periode $2\omega + 2\omega'$. Men vraagt een elliptische functie te construeeren met de perioden 2ω, $2\omega'$ en $\omega \pm \omega'$.

(J. C. KLUYVER).

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

1. In fig. 20 is het perioden-parallelogram der gegeven $\wp$-functie voorgesteld. Het is, omdat de invariant g_2 nul is,

een vierkant $\omega = \text{mod. } \omega'$. Men zal aan het gevraagde kunnen voldoen, als men het vierkant om A een hoek van 45° laat draaien en tegelijk de perioden door $\sqrt{2}$ deelt. Immers dan komt het in den stand A′B′C′D′ (fig. 21). Men heeft dan als nieuwe perioden der P-functie

$$A'C' = 2\omega, \text{ bestaanbare periode},$$

$$\left.\begin{array}{l} A'D' = \omega + \omega' \\ A'B' = \omega - \omega' \end{array}\right\} \text{complexe perioden},$$

$$A'F' = 2\omega', \text{ onbestaanbare periode.}$$

De bedoelde transformatie vereischt derhalve het deelen van de perioden der p-functie door $\sqrt{2e^{\frac{i\pi}{2}}} = \sqrt{\mu}$. Deelt men echter de perioden door $\sqrt{\mu}$ dan worden tegelijk van wege de eigenschap der homogeniteit de wortels e_1, e_2, e_3 met μ vermenigvuldigd. Men heeft dus voor de P-functie

$$\varepsilon_1 = 2ie_1 = 2i \times 1 = \quad 2i,$$

$$\varepsilon_2 = 2ie_2 = 2i \times 0 = \quad 0,$$

$$\varepsilon_3 = 2ie_3 = 2i \times 1 = -\,2i,$$

zoodat de bedoelde functie door de integraal

$$u = \int_{P(u)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 + 16x}}$$

bepaald is.

2. Men kan zich gemakkelijk door berekening overtuigen, dat beide functies de gemeenschappelijke periode 2ω hebben.

Voor de functie $p(u)$ is:

$$e_1 = 1,\ e_2 = 0,\ e_3 = -\,1$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2q + 2q^4 \dots$$

$$q = e^{-\pi}.$$

Men vindt

$$\omega = 1{,}311028.$$

Voor de P-functie is:

$$e_1 = 2i,\ e_2 = 0,\ e_3 = -\,2i$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{(e_3 - e_1)i} = 2\sqrt[8]{q'}(1 - q' - q'^3 + \dots)$$

$$q' = e^{-\pi}.$$

Men vindt

$$\omega = 1{,}311028.$$

Dit is de constante van Stirling:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1{,}8540747.$$

Vraagstuk XXXVIII.

Om een hoek bij benadering in drie gelijke deelen te verdeelen, beschrijft men om zijn hoekpunt O een cirkel, die de beenen in A en B, hun verlengden in C en D snijdt. Uit het midden E van AB beschrijft men een cirkel, die den voorgaanden raakt. Men trekt CE en DE, waarvan de verlengden den tweeden cirkel in F en G ontmoeten. Men trekt OF en OG.

Te bewijzen, dat het middelste deel hierbij altijd te groot wordt.

(W. MANTEL).

Opgelost *door* Mej. C. H. DE HAAS, Mej. A. G. WIJTHOFF, W. MANTEL, A. A. NIJLAND, Dr. N. QUINT *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing.

Stellen we (fig. 22) $\angle AOB = \phi$ en $\angle FOE = \alpha$, dan is $\angle EFO$ door $\frac{1}{4}\phi - \alpha$ voorgesteld. Uit de betrekking

$$\text{Sin}\,\alpha : \text{Sin}\,(\tfrac{1}{4}\phi - \alpha) = EF : OE = 2 : 1$$

volgt dan

$$2\,\text{Sin}\,(\tfrac{1}{4}\phi - \alpha) = \text{Sin}\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

en dus, wijl de hoeken scherp zijn, steeds

$$2\,(\tfrac{1}{4}\phi - \alpha) < \alpha,$$

of $\alpha > \frac{1}{6}\phi$, wat de stelling bewijst.

AANMERKINGEN. I. Om na te gaan, hoever de benadering gaat, schrijven wij 1) in den vorm $\text{Ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\text{Cosec}\frac{1}{4}\phi + \text{Ctg}\,\frac{1}{4}\phi$ en hebben nu

$$\tfrac{1}{2}\text{Cosec}\tfrac{1}{4}\phi = \frac{2}{\phi} + \frac{2-1}{2!}B_2\frac{\phi}{4} + \frac{2^3-1}{4!}B_4\frac{\phi^3}{64} + \frac{2^5-1}{6!}B_6\frac{\phi^5}{1024} + \ldots$$

$$\text{Ctg}\,\tfrac{1}{4}\phi = \frac{4}{\phi} - \frac{2^2}{2!}B_2\frac{\phi}{4} - \frac{2^4}{4!}B_4\frac{\phi_3}{64} - \frac{2^6}{6!}B_6\frac{\phi^5}{1024} - \ldots$$

$$\text{Ctg}\,\alpha = \frac{6}{\phi} - \frac{3}{2!}B_2\frac{\phi}{4} - \frac{9}{4!}B_4\frac{\phi^3}{64} - \frac{33}{6!}B_6\frac{\phi^5}{1024} - \ldots$$

$$\text{Ctg}\,\tfrac{1}{6}\phi = \frac{6}{\phi} - \frac{2^2}{2!}B_2\frac{\phi}{6} - \frac{2^4}{4!}B_4\frac{\phi^3}{216} - \frac{2^6}{6!}B_6\frac{\phi^5}{7776} - \ldots$$

$$-\,\text{Ctg}\,\alpha + \text{Ctg}\,\tfrac{1}{6}\phi = \frac{1}{24}B_2\phi + \frac{115}{20736}B_4\phi^3 + \frac{5971}{179159040}B_6\phi^5 + \ldots$$

Voor $\phi = 1$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$ is dus het verschil der cotangenten 0,007130.... (N. Q.)

II. Deze eenvoudige constructie is voor scherpe hoeken voldoende nauwkeurig. In *The Mechanical World*, March 4, 1892, is zij meegedeeld door SIMPSON SHEPPARD; deze toont geen wiskunde te verstaan, waardoor het twijfelachtig wordt, of hij de uitvinder is. Is de constructie misschien oud en bekend? (W. M.)

Vraagstuk XXXIX.

Men vraagt het aantal oplossingen van de vergelijking $2x+3y+5z=n$, als n een gegeven getal is en de onbekenden geheele positieve waarden moeten hebben. (W. MANTEL).

Opgelost *door* W. MANTEL, A. A. NIJLAND *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Een practische oplossing wordt gegeven door onderstaande tabel.

N	x	y	z	N	x	y	z
1	0	0	0	11	0	2	0
2	1	0	0	12	1	1	1
3	0	0	0	13	0	2	1
4	1	0	0	14	1	2	1
5	0	1	0	15	0	2	2
6	1	0	0	16	1	2	2
7	0	1	0	17	0	3	2
8	1	1	0	18	1	2	3
9	0	1	0	19	0	3	3
10	1	1	1	20	1	3	4

In de eerste kolom is het getal n opgeschreven. In de tweede kolom wordt het aantal oplossingen van de vergelijking $2x = n$ vermeld. De derde kolom bevat het aantal oplossingen van de vergelijking $2x + 3y = n$; de vierde kolom doet dat van de vergelijking $2x + 3y + 5z = n$ kennen.

2. Het opstellen van de tweede kolom is van zelf duidelijk. In de derde kolom is het getal voor n de som der getallen in de tweede en derde kolom, die bij $n - 3$ behooren. In de vierde kolom is het getal voor n gelijk aan de som der bij $n - 5$ behoorende getallen der derde en vierde kolom. De verklaring van deze berekening is zeer eenvoudig. De oplossingen van $2n + 3y + 5z = n$ zijn te onderscheiden in die, waarbij $z = 1$ is, en die, waarbij $z > 1$ is. Het aantal der eerste staat natuurlijk in de derde kolom bij $n - 5$, dat der overige in de vierde kolom bij $n - 5$.

Uit deze wet van vorming blijkt, dat elk getal in de derde kolom de som der getallen van de tweede kolom is, behoorende bij $n - 3$, $n - 6$, $n - 9$, enz. De getallen van de derde kolom vormen *twee* rijen gelijke getallen, die van de derde kolom dus *zes* rekenkundige reeksen. De getallen van de vierde kolom zijn de sommen der getallen van de derde kolom voor $n - 5$, $n - 10$, $n - 15$, enz. en vormen zoodoende *dertig* rekenkundige reeksen van de tweede orde. De algemeene termen van deze reeksen kan men o.a. vinden, door van elk drie termen te bepalen, waartoe noodig is de bovenstaande tafel tot $n = 90$ voort te zetten. Men vindt zoodoende, dat het gevraagde aantal wordt uitgedrukt door de formule

$$\tfrac{1}{60}(n^2 - 10n + a),$$

waarin a afhangt van de rest der deeling van n door 30. Men vindt nl. voor

rest =	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
$a =$	+ 9,	+ 16,	+ 21,	+ 24,	+ 25,	+ 24,	+ 21,	+ 16,	+ 9,	+ 60,
rest =	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,
$a =$	− 11,	+ 36,	+ 21,	+ 4,	+ 45,	+ 24,	+ 1,	+ 36,	+ 9,	+ 40,
rest =	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30,
$a =$	+ 9,	+ 36,	+ 1,	+ 24,	+ 45,	+ 4,	+ 21,	+ 36,	− 11,	+ 60.

Men heeft dus in 't algemeen het aantal *geheelen* te nemen van $\tfrac{1}{60}(n^2 - 10n + 60)$, behalve als $n = 30m + 11$ of $30m + 29$ is. Dan is het gezochte getal één minder.

AANMERKINGEN. I. Langs den aangegeven weg kan men het aantal oplossingen bepalen van elke onbepaalde vergelijking van den eersten graad. Men vindt dan zooveel rekenkundige reeksen van hooger orde als het kleinste gemeene veelvoud

van de coëfficiënten der onbekenden bedraagt en de orde dezer reeksen is één minder dan het aantal onbekenden.

Waarom of de repetent der getallen a hier in twee andere, symmetrieke vervalt, die met elkander niet schijnen samen te hangen, is mij niet gebleken. Noemt men p de rest der deeling van n door 30 (hierbij ook 30 als rest toelatende), dan kan men $a = -p^2 + 10p$ stellen. Doch dan is nog het getal der vierde kolom bij $n = p$ behoorende bij te tellen. Het gevraagde getal $f(n)$ noemende is dus

$$f(n) = \tfrac{1}{60}[n^2 - p^2 - 10(n - p)] + f(p),$$
$$n \equiv p \pmod{30},$$
$$0 < p < 31.$$

Door deze formule wordt dus ook niet vermeden, dat een rij van dertig getallen empirisch moet worden vastgesteld.

Oplossing *van* A. A. NIJLAND.

Beschouwen we eerst de vergelijking

$$2x + 3y = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

dan blijkt al spoedig, dat het aantal oplossingen K voorgesteld wordt door het geheele getal $\phi(k)$, dat aanwijst, hoe dikwijls men k met zes verminderen kan zonder dat we een negatieve uitkomst verkrijgen, als men twee uitzonderingsgevallen toelaat. Is nl. $k = 6m$ en $k = 6m + 5$, dan moeten $\phi(k) - 1$ en $\phi(k) + 1$ iu de plaats treden van $\phi(k)$.

4. Gaan we thans over tot de in het vraagstuk gegevene vergelijking, dan vindt men door aan z achtereenvolgens de waarden 1, 2, 3 .... te geven, dat het aantal oplossingen N bepaald wordt door de formule

$$N = \phi(n - 5) + \phi(n - 10) + \phi(n - 15) + \text{enz.} \; . \; . \; . \; 2),$$

welke reeks in het tweede lid zoo ver moet worden voortgezet, totdat het argument van ϕ kleiner wordt dan 5. Hierbij treden ook weer twee uitzonderingsgevallen op. Is $n = 6m + 5$, dan is $n - 5$ een zesvoud en moet de verkregen N met een verminderd worden. Is $n = 5m$, dan eindigt de reeks met $\phi(5)$ en moet N met een vermeerderd worden. Voor een geval als $n = 35$ heffen deze beide bewerkingen elkaar op.

5. We hebben nu nog de reeks 2) te sommeeren.

Is $\phi(m) = \alpha$, dan is $\phi(m + 5) = \alpha + 1$; behalve als m een zesvoud is, want dan blijft $\phi(m + 5) = \alpha$. De reeks voor N

is dus de rij der natuurlijke getallen in afdalenden zin, waarbij om de vijf cijfers een cijfer herhaald wordt.

Voor $n = 1278$ is

$$N = \phi(1273) + \phi(1268) + \phi(1263) + \text{ enz.}$$

Dit geeft

$$N = 212 + 211 + 210 + 209 + 208 + 208 + \ldots,$$

Men daalt dus zoolang af, totdat $n - 5i$ een zesvoud is; dan is $\phi(n - 5i)$ het eerste dubbel voorkomende getal.

Voor $n = 1278$ is dus $N = (212 + 211 + \ldots . 2 + 1) +$

$$(208 + 203 \ldots . + 8 + 3) = \frac{213}{2} . 212 + \frac{208 + 3}{2} . 42 = 27009.$$

AANMERKING. 1. Uit de oplossing van den heer MANTEL volgt voor $n = 1278$ eveneens $N = \frac{1}{60}(n^2 - 10n + 36) = 27009.$

Vraagstuk XL.

Als $E(x)$ het grootste geheele positieve getal beteekent, dat niet meer dan x bedraagt, dan geldt voor geheele positieve a de formule

$$E\left(\frac{a}{2}\right) + E\left(\frac{a-3}{2}\right) + E\left(\frac{a-6}{2}\right) + \ldots . = E\left(\frac{a^2 + 2a + 4}{12}\right).$$

Men vraagt dit te bewijzen. (W. MANTEL).

Opgelost *door* W. MANTEL, A. A. NIJLAND *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Wij onderscheiden de gevallen: $a = 6n$, $a = 6n + 1$, $a = 6n + 2$, $a = 6n + 3$, $a = 6n + 4$ en $a = 6n + 5$.

Geval $a = 6n$. Het eerste lid der voorgestelde formule is

$$3n + (3n - 2) + (3n - 3) + (3n - 5) + (3n - 6) + \ldots + 3 + 1.$$

De termen twee aan twee samen nemende vinden we

$$(6n - 2) + (6n - 8) + (6n - 14) + \ldots + 4.$$

Wij hebben nu een rekenkundige reeks van n termen verkregen en vinden daaruit de som

$$3n^2 + n = \frac{a^2 + 2a}{12}.$$

Geval $a = 6n + 1$. Het eerste lid der voorgestelde formule is

$$3n + (3n - 1) + (3n - 3) + (3n - 4) + \ldots + 3 + 2.$$

De termen twee aan twee samen nemende vinden we

$$(6n - 1) + (6n - 7) + \dots + 5.$$

Wij hebben nu een rekenkundige reeks van n termen verkregen en vinden daaruit de som

$$3n^2 + 2n = \frac{a^2 + 2a - 3}{12}.$$

In de volgende gevallen vinden wij achtereenvolgens voor de som

$$\frac{a^2 + 2a + 4}{12}, \quad \frac{a^2 + 2a - 3}{12}, \quad \frac{a^2 + 2a}{12}, \quad \frac{a^2 + 2a + 1}{12}.$$

Neemt men in alle gevallen de formule aan, die de grootste waarde oplevert, namelijk $\frac{a^2 + 2a + 4}{12}$, dan heeft men de grootste fout in het tweede en vierde geval en deze fout is $\frac{7}{12}$, dus minder dan de eenheid; door voorvoeging van het teeken E wordt dus de fout verwijderd.

Vraagstuk XLI.

Op een vlakke kromme, die haar holle zijde voortdurend naar een zelfde punt P gekeerd houdt, beweegt zich aan de andere zijde een stoffelijk punt onder invloed van een willekeurige kracht, alleen afhangende van de plaats van het bewegende punt. De wrijvingscoëfficiënt f tusschen het punt en de kromme is gegeven. Gevraagd de punten te bepalen, waar het bewegende punt geen drukking op de kromme uitoefent, en de voorwaarde, waaronder het punt aldaar de kromme verlaten zal.

In het bijzonder neme men aan, dat de genoemde kracht de zwaartekracht is en dat de kromme een boog van een cirkel of van een cycloïde met horizontale basis is, beide met de holle zijde naar de aarde gekeerd. (Dr. P. MOLENBROEK).

Opgelost *door* Dr. P. MOLENBROEK *en* M. H. SPRUYT.

Oplossing *van* Dr. P. MOLENBROEK.

1. Zij K de kracht, v de snelheid, ϕ de scherpe of stompe hoek tusschen deze. Nemen wij een vast punt Q op de kromme en rekenen wij van hier af den boog in willekeurige richting. Zij ds de lengte van een boogelement, W de wrijving, M de

massa van het punt, dan levert het beginsel van de levende kracht

$$d\left(\tfrac{1}{2}Mv^2\right) = (K \operatorname{Cos} \phi - W)\, ds.$$

Verder is, als D de normale drukking is, die het punt van de kromme ondervindt,

$$W = fD$$

en, als ρ de lengte van den kromtestraal der kromme in het beschouwde punt is,

$$K \operatorname{Sin} \phi - D = \frac{Mv^2}{\rho}.$$

Hieruit nu volgt de lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{dMv^2}{ds} - \frac{2f}{\rho} Mv^2 = 2K(\operatorname{Cos} \phi - f \operatorname{Sin} \phi). \quad . \quad . \quad 1).$$

Stelt men

$$\frac{2f}{\rho} = S, \;\; 2K(\operatorname{Cos} \phi - f \operatorname{Sin} \phi) = S_1,$$

dan zijn S en S_1 uitsluitend functies van s. De algemeene integraal is

$$Mv^2 = e^{\int S ds}\left(C + \int S_1 e^{-\int S ds}\, ds\right).$$

Hierin kan de integratie gedeeltelijk worden uitgevoerd. Noemt men τ den hoek, dien de raaklijn gerekend in de richting, waarin s gesteld wordt, vormt met een vaste as, als men dien hoek van deze laatste uit beschreven denkt in een richting overeenstemmende met die, volgens welke van Q uit de boog s doorloopen wordt, dan is

$$\frac{ds}{\rho} = d\tau, \;\; \text{d. i.} \int S ds = 2f\tau,$$

zoodat de integraal wordt

$$Mv^2 = e^{2f\tau}\left[C + 2\int \rho K(\operatorname{Cos} \phi - f \operatorname{Sin} \phi)\, e^{-2f\tau} d\tau\right] \;\; . \;\; . \;\; 2).$$

De drukking nu wordt nul onder de voorwaarde

$$\rho K \operatorname{Sin} \phi - e^{2f\tau}\left[C + 2\int \rho K(\operatorname{Cos} \phi - f \operatorname{Sin} \phi)\, e^{-2f\tau} d\tau\right] = 0 \;..3).$$

Verder zal het punt de kromme verlaten onder de voorwaarde

$$dK \operatorname{Sin} \phi < d\frac{Mv^2}{\rho}, \text{ of } d\left(\frac{Mv^2}{\rho} - K \operatorname{Sin} \phi\right) > 0.$$

Met behulp van 2) kan Mv^2 hieruit verwijderd worden.

2. Neemt men aan, dat de zwaartekracht werkt, en telt men s van het hoogste punt der kromme af in de richting der beweging, trekt men bovendien de bovengenoemde as ter bepaling van τ horizontaal door P en gericht naar die zijde, waarheen ook de beweging van het punt op de kromme gericht is, dan is $\phi = \frac{\pi}{2} - \tau$ en, als men K door G vervangt, gaan 2) en 3) dus over in

$$Mv^2 = e^{2f\tau}[C + 2G \int \rho (\text{Sin } \tau - f \text{ Cos } \tau) e^{-2f\tau} d\tau] \ldots 4),$$

$$\rho G \text{ Cos } \tau = e^{2f\tau}[C + 2G \int \rho (\text{Sin } \tau - f \text{ Cos } \tau) e^{-2f\tau} d\tau] \ldots 5).$$

Als de kromme een cirkel is, dan is $\rho = a$. Met het oog op de betrekkingen

$$\int e^{-2f\tau} \text{Cos}\, \tau\, d\tau = \frac{e^{-2f\tau}}{1 + 4f^2} (\text{Sin } \tau - 2f \text{ Cos } \tau),$$

$$\int e^{-2f\tau} \text{Sin}\, \tau\, d\tau = -\frac{e^{-2f\tau}}{1 + 4f^2} (\text{Cos } \tau + 2f \text{ Sin } \tau)$$

vindt men in dit geval

$$Mv^2 = Ce^{2f\tau} - \frac{2Ga}{1 + 4f^2} [(1 - 2f^2) \text{ Cos } \tau + 3f \text{ Sin } \tau] \ldots 6),$$

$$C (1 + 4f^2) e^{2f\tau} = 3Ga (\text{Cos } \tau + 2f \text{ Sin } \tau) \ldots\ldots 7).$$

Voor de cycloide is $\rho = 4a \text{ Cos } \tau$; derhalve

$$Mv^2 = Ce^{2f\tau} + 2Ga - \frac{2Ga}{1 + f^2} [(1 - f^2) \text{ Cos } 2\tau + 2f \text{ Sin } 2\tau] \ldots 8),$$

$$4Ga (\text{Cos } 2\tau + f \text{ Sin } 2\tau) = C (1 + f^2) e^{2f\tau} \ldots\ldots 9).$$

De constanten C kunnen uit een gegeven bewegingstoestand met behulp van 6) en 8) bepaald worden. Is v_0 de snelheid in het hoogste punt, dan vindt men in de twee gevallen

$$C = Mv_0^2 + 2Ga \frac{1 - 2f^2}{1 + 4f^2},$$

$$C = Mv_0^2 - 4Ga \frac{f^2}{1 + f^2}.$$

Zoodat nu volgens 7) en 9) de punten, waar de drukking nul is, bepaald worden door de vergelijkingen

$$(1 + 4f^2) v_0^2 + 2ga (1 - 2f^2) = 3gae^{-2f\tau} (\text{Cos } \tau + 2f \text{ Sin } \tau),$$

$$(1 + f^2) v_0^2 - 4gaf^2 = 4gae^{-2f\tau} (\text{Cos } 2\tau + f \text{ Sin } 2\tau).$$

Hieruit volgt, dat de snelheid v_0 aan de voorwaarden

$$v_0^2 < ga \quad , \quad v_0^2 < 4ga$$

gebonden is, opdat in het algemeen een beweging op de krommen tot stand komt.

AANMERKING. Ten onrechte geeft SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, 2te Aufl., Bd I, p. 392 op, dat in het beschouwde geval het beginsel van de levende kracht geen resultaten geeft.

Vraagstuk XLII.

Richt men naar dezelfde zijde op de drie zijvlakken DBC, DCA, DAB van een viervlak loodlijnen op, die met c vermenigvuldigd het oppervlak van elk zijvlak opleveren, waardoor DA′, DB′, DC′ verkregen worden, dan zal de lijn, die D verbindt met het zwaartepunt Z van driehoek A′B′C′, loodrecht staan op het vlak van driehoek ABC en tot lengte hebben $\frac{c}{3}$-maal het oppervlak van driehoek ABC. Men vraagt het bewijs. (Dr. P. MOLENBROEK).

Opgelost *door* Mej. C. H. DE HAAS, Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, F. F. LEUPEN, W. MANTEL, Dr. P. MOLENBROEK, A. A. NIJLAND, Dr. N. QUINT, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, Dr. C. STOLP, Dr. J. DE VRIES *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossingen.

I. Het vraagstuk ligt onmiddellijk opgesloten in de quaternionen-identiteit

$$V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = V\beta\gamma + V\gamma\alpha + V\alpha\beta \quad \ldots . \quad 1),$$

als men deze schrijft in den vorm

$$TV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)\, UV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = TV\beta\gamma UV\beta\gamma + \text{enz.}$$

Want als men DA $= \alpha$, DB $= \beta$, DC $= \gamma$ stelt, dan is

$$TV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = TV(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 2 \triangle \text{ ABC}$$

en $UV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$ is de eenheidsvector loodrecht op het vlak van △ ABC. Dus $\frac{1}{2c} V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$ is een loodlijn op het vlak van △ ABC, welker lengte met c vermenigvuldigd het oppervlak van △ ABC oplevert. Verder stelt het tweede

lid van 1) het drievoud van de lijn voor, uit D getrokken naar het zwaartepunt van den driehoek door de eindpunten van de vectoren $V\beta\gamma = DA'$, $V\gamma\alpha = DB'$, $V\alpha\beta = DC'$ gevormd. (P. M.)

II. In verband met de bekende eigenschap (KELLAND and TAIT, *Introduction to Quaternions*, p. 26), dat de vector uit een punt D naar het zwaartepunt van eenige punten A′, B′, C′ getrokken het gemiddelde is van de vectoren naar de punten zelve, volgt de stelling onmiddellijk uit het theorema van Vraagstuk 81 van deel V der *Wiskundige Opgaven*. De vector DZ is een derde van de resultante van DA′, DB′, DC′ en dus ook van de loodrecht op het vlak ABC gerichte as, die het moment van het in dit vlak gelegen koppel aangeeft (N. Q.)

III. Laat men uit een punt P binnen een viervlak ABCD loodlijnen neer op de zijvlakken en neemt men op deze loodlijnen stukken PA′, PB′, PC′, PD′, die *c*-maal genomen de oppervlakken van de zijvlakken opleveren, dan is P het zwaartepunt van het viervlak A′B′C′D′. Ook uit deze stelling, die nauw met Vraagstuk 81 van deel V samenhangt, is een eenvoudig bewijs van de stelling af te leiden. (C. S.)

Vraagstuk XLIII.

Gegeven in een plat vlak twee rechtstreeks gelijkvormige figuren, waarvan AB en A_1B_1 homologe lijnen voorstellen. Men trekt B_1B_2 gelijk en evenwijdig aan BA, vereenigt A_1 met B_2 en beschouwt AB en A_1B_2 als homologe lijnen van een nieuw paar rechtstreeks gelijkvormige figuren. Te bewijzen, dat het punt der eerste figuur met het punt A in de tweede overeenkomende het gelijkvormigheidspunt der oorspronkelijke figuren is. (Dr. P. MOLENBROEK).

Opgelost *door* Mej. C. H. DE HAAS, Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, Dr. P. MOLENBROEK, A. A. NIJLAND, Dr. N. QUINT, H. DE VRIES *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossingen.

I. Is P (fig. 23) het gelijkvormigheidspunt van de figuren (AB) en (A_1B_1), dan zijn de driehoeken PAB en PA_1B_1 rechtstreeks gelijkvormig. Hieruit volgen de betrekkingen

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{PB}{PB_1} = \frac{AB}{A_1B_1},$$

$\angle APB = \angle A_1PB_1$, $\angle PAB = \angle PA_1B_1$, $\angle APA_1 = \angle BPB_1 = \angle B_2B_1A_1$.

Uit deze leest men af, dat ook de driehoeken APA_1 en $B_2B_1A_1$ rechtstreeks gelijkvormig zijn. Want de hoeken in P en B_1 zijn gelijk en de zijden om die hoeken evenredig. Hieruit volgt dan weer de gelijkheid der hoeken AA_1P en $B_2A_1B_1$ en ook die van AA_1B_2 en PA_1B_1, d. i. van PAB en AA_1B_2. Wijl nu in de driehoeken APB en A_1AB_2 ten slotte de hoeken in A en A_1 gelijk en de zijden om die hoeken evenredig zijn, zijn deze driehoeken rechtstreeks gelijkvormig en vormen A, A_1 twee overkomstige punten in de figuren (AB) en (A_1B_2), wat te bewijzen was. (T. J. A., C. H. D. H., A. A. N., N. Q., P. D. C. W.)

II. Is P het gelijkvormigheidspunt der figuren (AB) en (A_1B_1), dan is te bewijzen, dat de driehoeken PAB en AA_1B_2 rechtstreeks gelijkvormig zijn.

Noem q de verhouding $A_1B_1 : AB$, opgevat als quaternion. Dan is, omdat P gelijkvormigheidspunt is, ook $PA_1 = qPA$, $PB_1 = qPB$ en derhalve

$$A_1B_2 = A_1B_1 - AB = (q-1)\,AB\,,$$
$$AA_1 = AP - A_1P = (q-1)\,PA.$$

Dus worden de zijden van driehoek AA_1B_2 uit die van driehoek PAB gevonden door vermenigvuldiging met $q-1$, waaruit de gelijkvormigheid blijkt. (W. M., P. M.)

Vraagstuk XLIV.

Gegeven twee driehoeken ABC en A′B′C′. Te bewijzen, dat er 153 paren van richtingen μ, ν bestaan, die de eigenschap hebben, dat de vierde harmonische straal door A getrokken tot de richtingen van μ, ν en B′C′, die door B getrokken tot μ, ν en C′A′ en die door C getrokken tot μ, ν en A′B′ door één punt gaan, terwijl hetzelfde het geval is met de drie vierde harmonische stralen door A′, B′, C′ getrokken tot (μ, ν, BC), (μ, ν, CA), (μ, ν, AB).

(Dr. P. MOLENBROEK.)

Opgelost *door* Dr. P. MOLENBROEK.

Oplossing.

We nemen den driehoek ABC tot coördinatendriehoek aan en stellen de zijden BC, CA, AB dus door $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

voor. Verder duiden we door $y \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ de lijn in het oneindige aan en door $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, waarbij de indices 1, 2, 3 aan de coëfficiënten a, b, c gehangen worden, de lijnen B′C′, C′A′, A′B′.

Stelt men nu ter bekorting

$$\left.\begin{array}{l} bc_2 - b_2c = \alpha_2 \;,\; ca_3 - c_3a = \beta_3 \;,\; ab_1 - a_1b = \gamma_1 \\ bc_3 - b_3c = \alpha_3 \;,\; ca_1 - c_1a = \beta_1 \;,\; ab_2 - a_2b = \gamma_2 \end{array}\right\} \ldots 1)$$

en geeft men door μ_1, μ_2, μ_3 en ν_1, ν_2, ν_3 grootheden aan, die evenredig zijn met de coördinaten van de beide in de richtingen μ en ν in het oneindige liggende punten, — welke grootheden dan aan de vergelijking $y = 0$ voldoen —, dan zijn

$$x_2\,[2\beta_1\mu_3\nu_3 - \gamma_1\,(\mu_2\nu_3 + \mu_3\nu_2)] + x_3\,[2\gamma_1\mu_2\nu_2 - \beta_1\,(\mu_2\nu_3 + \mu_3\nu_2)] = 0$$

en twee overeenkomstige vergelijkingen de vergelijkingen der drie vierde harmonische stralen door A, B, C. Dus is de voorwaarde, dat deze door een zelfde punt gaan

$$[2\beta_1\mu_3\nu_3 - \gamma_1(\mu_2\nu_3+\mu_3\nu_2)][2\gamma_2\mu_1\nu_1 - \alpha_2(\mu_3\nu_1+\mu_1\nu_3)][2\alpha_3\mu_2\nu_2 - \beta_3(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)] +$$
$$+ [2\gamma_1\mu_2\nu_2 - \beta_1(\mu_2\nu_3+\mu_3\nu_2)][2\alpha_2\mu_3\nu_3 - \gamma_2(\mu_3\nu_1+\mu_1\nu_3)][2\beta_3\mu_1\nu_1 - \alpha_3(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)] = 0.$$

2. Door oplossing van de vergelijkingen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ naar x, vindt men

$$\triangle\, x_1 = A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 \,,\; \triangle\, x_2 = B_1y_1 + B_2y_2 + B_3y_3 \,,\; \triangle\, x_3 = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \,,$$

als men door $\triangle$ en A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ den determinant der coëfficiënten a, b, c met zijn minoren aanduidt. Stelt men nu door α_2', α_3', β_3', β_1', γ_1', γ_2' de grootheden voor, die men verkrijgt door in 1) de coëfficiënten a, b, c te vervangen door de overeenkomstige minoren A, B, C, dan vindt men de voorwaarde, waaronder de drie vierde harmonische stralen door A′, B′, C′ door een zelfde punt gaan, door in de boven gevondene vergelijking α, β, γ van accenten te voorzien. Tusschen beide voorwaardevergelijkingen en $a\nu_1 + b\nu_2 + c\nu_3 = 0$ kan men ν_1, ν_2, ν_3 elimineeren. Volgens de bekende regelen der eliminatie is het resultaat van den achttienden graad in μ_1, μ_2, μ_3. En wegens de symmetrie vindt men dezelfde vergelijking ter bepaling van ν_1, ν_2, ν_3. Dus zijn (μ_1, μ_2, μ_3) en (ν_1, ν_2, ν_3) twee asymptotenrichtingen eener kromme C^{18} en zijn er $\dfrac{18 \times 17}{2} = 153$ paren van richtingen μ, ν te vinden.

Vraagstuk XLV.

Gevraagd de meetkundige plaats der punten, waarvan de som der afstanden tot drie gegeven punten standvastig is. (Dr. P. H. SCHOUTE).

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

Stellen we de coördinaten der drie gegeven punten door x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) voor, dan zijn de afstanden d_i van een willékeurig punt x, y, z tot deze drie punten

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}.$$

Noemen we nu voor de eenvoudigheid der notatie de gegeven som d_0, dan wordt de meetkundige plaats gevonden door de vergelijking $d_1 + d_2 + d_3 = d_0$ rationaal te maken. Men bereikt dit doel door het gedurig product te nemen van de acht factoren $d_0 \pm d_1 \pm d_2 \pm d_3$ en vindt dan

$$\{\Sigma d_i^4 - 2\Sigma d_i^2 d_j^2\}^2 = 64\, d_0^2 d_1^2 d_2^2 d_3^2,$$

of

$$\Sigma d_i^8 - 4\Sigma d_i^6 d_j^2 + 6\Sigma d_i^4 d_j^4 + 4\Sigma d_i^4 d_j^2 d_k^2 - 40 d_0^2 d_1^2 d_2^2 d_3^2 = 0.$$

Vervangen we d_0 door a en laten we het somteeken dan op drie indices slaan, dan wordt dit

$$\Sigma d_i^8 - 4\Sigma d_i^6 d_j^2 + 6\Sigma d_i^4 d_j^4 + 4\Sigma d_i^4 d_j^2 d_k^2 -$$
$$-4a^2(\Sigma d_i^6 - \Sigma d_i^4 d_j^2 + 10 d_1^2 d_2^2 d_3^2) + 2a^4(3\Sigma d_i^4 + 2\Sigma d_i^2 d_j^2) - 4a^6 \Sigma d_i^2 = 0.$$

Dus is de gevraagde meetkundige plaats een oppervlak van den achtsten graad. Wijl de termen van den achtsten graad zich tot $(x^2 + y^2 + z^2)^4$ herleiden, heeft het met het vlak in het oneindige buiten den onbestaanbare cirkel, die op alle bollen ligt, geen enkel punt gemeen.

Oplossing *van* H. DE VRIES.

Zijn $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$ en $(b, c, 0)$ de drie gegeven punten en is $2l$ de som der afstanden, dan wordt de vergelijking der meetkundige plaats gevonden door tusschen de vergelijkingen

$$S \equiv (x - b)^2 + (y - c)^2 + z^2 - 4\rho^2 = 0$$

$$R \equiv \frac{x^2}{(l - \rho)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(l - \rho)^2 - a^2} - 1 = 0$$

den parameter ρ te elimineeren. Want elk punt, dat aan den

bol S = 0 en het kwadratisch omwentelingsoppervlak R = 0 gemeen is, voldoet aan de vraag. Zoo als men gemakkelijk inziet, is de uitkomst van den achtsten graad in x, y, z.

De doorsnee van R en S is een ruimtekromme van den vierden graad en de eerste soort (bikwadratische ruimtekromme). Wijl men elk der drie gegeven punten tot middelpunt van een bol S = 0 aannemen kan, gaan er door elk punt van het oppervlak O^8 drie zulke krommen.

AANMERKING DER REDACTIE. De drie reeksen van bikwadratische krommen zijn zoogenaamde cyclische ruimtekrommen (zie in den *Grondslag* M^3 6c); de eigenschappen van deze zijn ontwikkeld door DARBOUX (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Paris, 1873, blz. 26).

Vraagstuk XLVI.

In een ruimte R_n met n afmetingen zijn $\frac{1}{2}n(n+3)$ gelijkvormige puntenreeksen gegeven. Te bewijzen, dat de door een vergelijking van den tweeden graad in de n coördinaten voorgestelde wezens R^2_{n-1}, die door de overeenkomtige punten dezer puntenreeksen bepaald worden, een stelsel vormen, waarvan er $n(n+2)$ door een punt gaan, $2n(n+2)-2$ een rechte aanraken, $3n(n-2)-4$ een vlak aanraken, enz. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

1. We beschouwen eerst het geval $n = 2$ en stellen door

$$X_i \equiv \frac{x_i + \lambda\xi_i}{1+\lambda} \quad , \quad Y_i \equiv \frac{y_i + \lambda\eta_i}{1+\lambda} \; (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

de vijf gelijkvormige puntenreeksen voor. De vergelijking der reeks van kegelsneden is dan

$$\begin{vmatrix} (1+\lambda)^2x^2, & (1+\lambda)^2 xy, & (1+\lambda)^2y^2, & (1+\lambda)x, & (1+\lambda)y, & 1 \\ (x_1+\lambda\xi_1)^2, & (x_1+\lambda\xi_1)(y_1+\lambda\eta_1), & (y_1+\lambda\eta_1)^2, & x_1+\lambda\xi_1, & y_1+\lambda\eta_1, & 1 \\ (x_2+\lambda\xi_2)^2, & (x_2+\lambda\xi_2)(y_2+\lambda\eta_2), & (y_2+\lambda\eta_2)^2, & x_2+\lambda\xi_2, & y_2+\lambda\eta_2, & 1 \\ (x_3+\lambda\xi_3)^2, & (x_3+\lambda\xi_3)(y_3+\lambda\eta_3), & (y_3+\lambda\eta_3)^2, & x_3+\lambda\xi_3, & y_3+\lambda\eta_3, & 1 \\ (x_4+\lambda\xi_4)^2, & (x_4+\lambda\xi_4)(y_4+\lambda\eta_4), & (y_4+\lambda\eta_4)^2, & x_4+\lambda\xi_4, & y_4+\lambda\eta_4, & 1 \\ (x_5+\lambda\xi_5)^2, & (x_5+\lambda\xi_5)(y_5+\lambda\eta_5), & (y_5+\lambda\eta_5)^2, & x_5+\lambda\xi_5, & y_5+\lambda\eta_5, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

waarbij het opmerking verdient, dat λ in de eerste drie kolom-

men tot den 2den, in de vierde en vijfde kolom tot den 1sten graad en in de zesde kolom niet voorkomt.

Schrijft men deze vergelijking in den vorm $(a_1x+a_2y+a_3)^{(2)}=0$, dan blijkt, dat λ in a_{11}, a_{12}, a_{22} tot den 6den, in a_{13}, a_{23} tot den 7den en in a_{33} tot den 8sten graad voorkomt. En ontwikkelt men de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \ (a_{kl} = a_{lk}),$$

die uitdrukt, dat de rechte $u_1x + v_1y + 1 = 0$ de kegelsnee aanraakt, in de gedaante $(A_1u_1 + A_2v_1 + A_3)^{(2)} = 0$, dan vindt men, dat λ in A_{33} tot den 12den, in A_{13}, A_{23} tot den 13den en in A_{11}, A_{12}, A_{22} tot den 14den graad opklimt. De reeks kegelsneden is dus hierdoor gekenmerkt, dat er 8 door een gegeven punt gaan en 14 een gegeven rechte aanraken. Naar deze karakteristieken stellen we ze door het symbool (8, 14) voor.

2. Gaan we nu tot het geval $n = 3$ over, dan hebben we met een determinant $\triangle$ te doen, bij welke λ in de eerste zes kolommen tot den 2den, in de drie volgende kolommen tot den 1sten graad en in de laatste kolom niet voorkomt.

Schrijft men de vergelijking $\triangle = 0$ weer in den vorm $(a_1x + a_2x + a_3y + a_4)^{(2)} = 0$, dan blijkt dat de coëfficiënt a_{kl} in λ van den 13den, 14den of 15den graad is, naarmate k en l geen van beide, een van beide of beide 4 zijn. Verder hebben we dan met de voorwaardevergelijkingen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v_1 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w_1 & w_2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 1 & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

te doen, die achtereenvolgens uitdrukken, dat het kwadratisch oppervlak $A = 0$ de snijlijn der vlakken $u_1x + v_1y + w_1z + 1 = 0$, $u_2x + v_2y + w_2z + 1 = 0$ en het vlak $u_1x + v_1y + w_1z + 1 = 0$ aanraakt (vergelijk SALMON, *Geometry of three dimensions*, 4th edition, p. 58, 59). Ontwikkelen we de eerste, dan blijkt, dat o.a. de minor $(a_{33}a_{44} - a_{34})^2$, waarmee $(u_1v_2 - u_2v_1)^2$ ver-

menigvuldigd is, tot den hoogsten graad 28 in λ opklimt. En bij den tweeden is dit o.a. het geval met den determinant van den derden graad, waarmee v_1^2 vermenigvuldigd is, die in λ tot den 41sten graad opklimt. Derhalve hebben we hier met de reeks (15, 28, 41) van kwadratische oppervlakken te doen.

3. Het bovenstaande kan doen zien, hoe men tot het algemeene geval besluit. We vinden dan een determinant Δ van den graad $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, waarvan achtereenvolgens $\frac{1}{2}n(n+1)$, n en 1 kolommen in λ van de graden 2, 1, 0 zijn. Dus is de vergelijking $\Delta = 0$ in λ van den $2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \cdot n + 0.1$ of $n(n+2)^{\text{den}}$ graad en gaan er $n(n+2)$ wezens R^n door een gegeven punt. En verder hebben we met $n - 1$ voorwaardevergelijkingen te doen, die achtereenvolgens in λ van de graden $n(n+2)$, $n(n+2) + [n(n+2) - 2]$, $n(n+2) + 2[n(n+2) - 2]$, enz. zijn.

Aanmerkingen. I. In het geval $n = 2$ geven de formules $\left.\begin{array}{l} 3\gamma = 2\eta + \delta \\ 3\rho = \eta + 2\delta \end{array}\right\}$ van Schubert voor het aantal δ der in twee rechte lijnen ontaardende kegelsneden 20 en voor het aantal η der in twee punten ontaardende kegelsneden 2. Terwijl voor de laatsten hier de dubbel getelde lijn in het oneindige in de plaats treedt, zijn de 20 ontaardingen in twee rechten werkelijk voorhanden. Want bij elk drietal der vijf gelijkvormige puntenreeksen gebeurt het tweemaal (behalve in het oneindige), dat drie overeenkomstige punten collineair zijn. Dit blijkt nl. hieruit, dat de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 + \lambda\xi_1 & , & y_1 + \lambda\eta_1 & , & 1 \\ x_2 + \lambda\xi_2 & , & y_2 + \lambda\eta_2 & , & 1 \\ x_3 + \lambda\xi_3 & , & y_3 + \lambda\eta_3 & , & 1 \end{vmatrix} = 0$$

in λ van den tweeden graad is.

II. Langs denzelfden weg vindt men voor $n = 3$, dat de reeks kwadratische oppervlakken behalve het dubbelvlak in het oneindige 54 kegels bevat. Evenzoo bij de reeks (24, 46, 68, 90) der kwadratische ruimten in de ruimte met vier dimensies, dat er 112 kegelruimten zijn, in het algemeen dat er $n^2(n+3)$ kegelruimten zijn.

III. Vervangt men de *gelijkvormige* puntenreeksen door

projectieve puntenreeksen, dan treden voor de gegeven getallen achtereenvolgens

$$n(n+3),\ 2n(n+3),\ 3n(n+3),\ \ldots\ n^2(n+3)$$

in de plaats en vindt men $n(n+1)(n+3)$ in plaats van $n^2(n+3)$ kegelruimten.

Vraagstuk XLVII.

Te bewijzen, dat een regelmatige achtcel der ruimte R_4 zich volgens een regelmatig achtvlak snijden en volgens een rhombendodekaeder projecteeren laat. (Dr. P. H. SCHOUTE).

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

1. INLEIDING. Een kubus wordt door een vlak loodrecht op het midden van een der lichaamsdiagonalen volgens een regelmatigen zeshoek gesneden en loodrecht op dit vlak als een regelmatige zeshoek geprojecteerd. Van deze stelling is het bovenstaande een uitbreiding op de ruimte R_4. Een voorafgaande herhaling van het bekende bewijs dezer stelling maakt het volgende duidelijker.

2. MEETKUNDIG BEWIJS VAN HET EERSTE DEEL. Men verkrijgt de teekening van een regelmatige achtcel (fig. 24) door van een kubus uit te gaan, deze een evenwijdige verplaatsing te geven en de overeenkomstige hoekpunten te verbinden. Beschouwen we nu de ruimte R_3, die de celdiagonaal AB loodrecht middendoordeelt, als de meetkundige plaats der punten, die evenver van A en B verwijderd zijn, dan blijkt onmiddellijk, dat de hoekpunten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, die noch met A noch met B door ribben verbonden zijn, van A en B denzelfden afstand $a\sqrt{2}$ hebben en dus tot de ruimte R_3 behooren. Deze zes punten vormen de zes hoekpunten van een regelmatig achtvlak. Want $P_1P_2P_3$ is de gelijkzijdige driehoek, die ontstaat als men in den kubus AC de andere uiteinden der in C samenkomende ribben verbindt, waaruit dan blijkt dat de zes hoekpunten de hoekpunten zijn van acht gelijke gelijkzijdige driehoeken, die in vier paar evenwijdige vlakken liggen, enz.

3. MEETKUNDIG BEWIJS VAN HET TWEEDE DEEL. Bij het projecteeren van de achtcel in de richting AB op de ruimte R_3

leveren de beide viertallen van in A en in B samenkomende kuben dezelfde projectie op en wordt het begrenzend oppervlak van deze projectie gevormd door de projectie van de twaalf zijvlakken der achtcel, die noch door A noch door B gaan. Van elk scheefhoekig parallelopipedum, dat de projectie is van een der acht begrenzende kuben, komen dan drie zijvlakken in het inwendige van het projectielichaam, in het midden O van AB samen, terwijl de andere drie deel uitmaken van het begrenzend oppervlak. Wijl de achtcel 16 hoekpunten heeft en A en B zich in het middelpunt O projecteeren, moet het projectielichaam 14 hoekpunten tellen. Deze zijn echter niet alle van dezelfde soort. Eerst onderscheidt men de zes hoekpunten van het boven gevonden achtvlak, die hun eigen projectie zijn. Ten tweede zijn de acht andere hoekpunten afkomstig van de hoekpunten der cel, die of met A of met B door een ribbe zijn verbonden. We laten het bewijs, dat deze acht punten de hoekpunten van een kubus vormen, eenvoudigheidshalve achterwege. Eveneens dat, waaruit blijkt, dat de zes hoekpunten van het achtvlak en de acht hoekpunten van dit zesvlak gezamenlijk de 14 hoekpunten van een rhomben-dodekaeder uitmaken.

Teekent men in een afbeelding van het rhomben-dodekaeder (fig. 25) de vier kubusdiagonalen en brengt men door deze twee aan twee vlakken aan, dan blijkt werkelijk, dat dit lichaam op twee verschillende wijzen de vereeniging is van vier gelijke scheefhoekige parallelopipeda.

4. Stelkundig bewijs. Neemt men de vier driedimensionale ruimten door O evenwijdig met de paren van begrenzende kuben tot coördinatenruimten aan, dan verkrijgt men de eenvoudigste coördinatenvoorstelling van de achtcel. De coördinaten der 16 hoekpunten zijn dan door de vergelijkingen

$$2x_1 = \pm a \quad , \quad 2x_2 = \pm a \quad , \quad 2x_3 = \pm a \quad , \quad 2x_4 = \pm a$$

gegeven, als a de lengte der ribben voorstelt.

Met behulp van de orthogonale transformatie

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 2y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2y_4 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}\right\}$$

wordt de achtcel loodrecht op vier harer celdiagonalen gesteld.

Schrijft men b voor $-a$ in de plaats, dan zijn de waarden van de dubbele coördinaten $2y_1$, $2y_2$, $2y_3$, $2y_4$ der zestien hoekpunten door het schema

$++++$	$2a, 0, 0, 0$	$++--$	$0, 2a, 0, 0$	$---+$	b, b, b, a
		$+-+-$	$0, 0, 2a, 0$	$--+-$	b, b, a, b
$-+++$	b, a, a, a	$+--+$	$0, 0, 0, 2a$	$-+--$	b, a, b, b
$+-++$	a, b, a, a	$-++-$	$0, 0, 0, 2b$	$+---$	a, b, b, b
$++-+$	a, a, b, a	$-+-+$	$0, 0, 2b, 0$		
$+++-$	a, a, a, b	$--++$	$0, 2b, 0, 0$	$----$	$2b, 0, 0, 0.$

In dit schema zijn de zes punten van het middelste gedeelte de hoekpunten der doorsnee met de ruimte $y_1 = 0$. En terwijl het eerste en laatste punt zich in O projecteeren, vormen de andere acht in projectie op $y_1 = 0$ de acht hoekpunten van een kubus.

AANMERKING. Omtrent verdere ontwikkelingen vergelijke men mijn opstel „Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles und des Sechszehnzelles im vierdimensionalen Raume" (*Verhandelingen der Kon. Akad. van Amsterdam*, eerste sectie, deel II, N°. 2).

Vraagstuk XLVIII.

Van twee kwadratische kegels, die het horizontale vlak volgens cirkels snijden, heeft de doorsnee tot verticale projectie een kromme C^4 met symmetrieas, tot horizontale projectie een kromme C^3 met symmetrieas en tot derde projectie een kegelsnee. Te onderzoeken, welke bijzonderheid deze kegels vertoonen en hoe zij met betrekking tot elkaar geplaatst zijn. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES.

Oplossing.

1. Wil de derde projectie een kegelsnee zijn, dan moet het oneindig ver gelegen punt van de x-as een kegelpunt van de doorsnee zijn en dus met betrekking tot de beide kegels hetzelfde poolvlak hebben. Hieruit volgt, dat de verbindingslijn van de middelpunten M_1 en M_2 der grondcirkels evenwijdig aan de y-as zijn moet en de vlakken door deze lijn m en elk der toppen T_1 en T_2 moeten samenvallen.

Wil de horizontale projectie een kromme C^3 zijn, dan moet

het oneindig ver gelegen punt der z-as op de doorsnee liggen; de lijnen door T_1 en T_2 evenwijdig aan de z-as liggen dan op de kegels en dus de horizontale projecties t_1 en t_2 der toppen T_1 en T_2 op de grondcirkels. Bij dezen nog algemeenen stand heeft de kromme C_3 geen symmetrieas. Nemen we nu echter aan, dat de projecties der toppen op de verbindingslijn m der middelpunten M_1 en M_2 liggen, — waarbij elk dezer punten dan nog twee standen innemen kan —, dan is niet alleen aan het verlangde met betrekking tot de horizontale projectie, maar ook aan den de verticale projectie gestelde eisch voldaan.

2. Nu de stand der beide kegels met betrekking tot elkaar voldoende aangewezen is, kunnen we enkele bijzonderheden der doorsnijdingskromme aanwijzen. Zij heeft in de richting der z-as een punt in het oneindige met in het oneindige gelegen raaklijn, de snijlijn van het vlak $y = 0$ met het vlak in het oneindige; dus heeft de kromme een parabolische tak. Verder heeft de horizontale projectie een in de richting der x-as in het oneindige gelegen buigpunt en snijdt de asymptoot evenwijdig aan de x-as de kromme dus verder niet.

De horizontale projectie der kromme is de meetkundige plaats van het snijpunt P (fig. 26) der koorden AQ en BR, die door de vaste punten A en B gaan en de cirkels verder in twee op een door C gaande rechte gelegen punten Q en R snijden.

Vraagstuk XLIX.

Een kegelsnee is bepaald door vier punten A, B, C, D en de raaklijn d in D. De drie zijden van driehoek ABC bepalen met d een volledige vierzij, waarvan de drie diagonaalpunten P, Q, R met D verbonden worden. Te bewijzen, dat de snijpunten (DP, QR), (DQ, RP), (DR, PQ) op de kegelsnee liggen. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, F. F. LEUPEN, H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

De stralenbundels, die de punten der kegelsnee uit A en D projecteeren, zijn projectief. We zoeken nu den straal uit A, die met den straal DP uit P overeenkomt. Daarbij duiden we de snijpunten van d met BC, CA, AB door α, β, γ en het punt (DP, BC) door ξ aan.

Nu is (fig. 27) de dubbelverhouding D (BCDP) = (BC$\alpha\xi$). Door projectie uit P op d vinden we (BC$\alpha\xi$) = ($\beta\gamma\alpha$D) en door omwisseling ($\beta\gamma\alpha$D) = ($\gamma\beta$Dα). Vereeniging met A geeft dan ($\gamma\beta$Dα) = A (BCDα). Als we de uitkomsten verbinden, is dus D (BCDP) = A (BCDα). Derhalve is het snijpunt van DP en Aα of DP en QR een punt der kegelsnee, enz.

Vraagstuk L.

Gegeven de kegelsnee K^2 en twee vaste raaklijnen d_1 en d_2. Een willekeurige raaklijn a snijdt d_1 en d_2 in de punten P_1 en P_2. Gevraagd bij a een tweede raaklijn b te construeeren, die d_1 en d_2 in punten P'_1 en P'_2 snijdt, voldoende aan de voorwaarde $P_1P'_1 = P_2P'_2$. Te bewijzen, dat bij iedere raaklijn a twee raaklijnen b en b' behooren en, als a achtereenvolgens met al de raaklijnen van de kegelsnee K^2 samenvalt, de meetkundige plaatsen te bepalen van de hoekpunten van den driehoek door de raaklijnen a, b, b' gevormd.

(H. DE VRIES.)

Opgelost *door* F. F. LEUPEN, Dr. P. H. SCHOUTE, H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. Is O (fig. 28) het snijpunt van d_1 en d_2, $OO_1O_3O_2$ een om K^2 beschreven parallelogram, zijn P_1 en P_2 de snijpunten der willekeurig gegeven raaklijn a met de vaste raaklijnen d_1 en d_2 en stelt men O_1P_1 en O_2P_2 elk met het behoorlijk teeken aangedaan door ξ en η voor, dan is $\xi\eta = k^2$ de betrekking, die er voor alle raaklijnen tusschen ξ en η bestaat. Dus vinden we voor $\xi' = \eta$ en $\eta' = \xi$ een raaklijn b en voor $\xi' = -\eta$, $\eta' = -\xi$ een tweede raaklijn b', die aan de voorwaarde van het vraagstuk voldoen. Zijn nl. P_1', P_2' en P_1'', P_2'' op overeenkomstige wijze de snijpunten van b en b' met d_1 en d_2, dan volgt uit het bovenstaande $P_1P_1' = P_2'P_2 = \eta - \xi$ en evenzoo $P_1''P_1 = P_2''P_2 = \eta + \xi$.

2. Duidt men OO_1 door p en OO_2 door q aan, dan zijn de vergelijkingen van a, b, b' met betrekking tot d_1 en d_2 als assen achtereenvolgens

$$\frac{x}{p+\xi} + \frac{y}{q+\eta} = 1,$$

$$\frac{x}{p+\eta} + \frac{y}{q+\xi} = 1,$$

$$\frac{x}{p-\eta} + \frac{y}{q-\xi} = 1.$$

Dus geeft eliminatie van ξ en η uit de betrekking $\xi\eta = k^2$ en twee der drie bovenstaande vergelijkingen voor de meetkundige plaats der hoekpunten van driehoek abb'

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv qx + py - pq - k^2 = 0 \\ r_2 \equiv x - p + y - q = 0 \\ r_3 \equiv x - p - y + q = 0 \end{array}\right\},$$

d. i. drie rechten. Van deze is de eerste de poollijn van O_3 met betrekking tot K^2, terwijl de anderen door O_3 gaan en de deellijnen zijn van hoek $O_1O_3O_2$. Dus vormen deze drie rechten een pooldriehoek van K^2.

AANMERKING. Omtrent bovenstaand vraagstuk vergelijke men SCHRÖTER's *Vorlesungen über synthetische Geometrie* Bd 2, § 12.

(H. D. V.)

Vraagstuk LI.

De raaklijn p in een punt P van een vlakke kromme lijn snijdt de as OY van een rechthoekig coördinatenstelsel in A. Men vraagt:

a) de vergelijking der kromme, voor welke OA evenredig is met de n^{de} macht van de abscis van P,

b) het bewijs, dat de kromtestraal van P verkregen wordt door PA^2 door nh te deelen, als h de afstand is van O tot p.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, A. A. NIJLAND, G. J. VAN DE WELL *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANK JR.

Oplossing.

a) Uit de vergelijking $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ der raaklijn p volgt $OA = y - x\frac{dy}{dx}$, als men X nul stelt. Is nu OA evenredig met x^n, dan heeft men met de differentiaalvergelijking

$$y - x\frac{dy}{dx} = kx^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

te doen. Deelen we door x^2, dan vinden we

$$d\frac{y}{x} + \frac{k}{n-1}\,dx^{n-1} = 0$$

en is de uitkomst

$$y = \frac{k}{n-1}\,x^n + Cx = 0\,, \quad \text{of} \quad y + kx\log x + Cx = 0\,,$$

naarmate $n \neq 1$, of $n = 1$ is.

b) Uit 1) volgt door differentiatie $\frac{d^2y}{dx^2} = -knx^{n-2} = -\frac{n\,.\,OA}{x^2}$.

Verder is $PA^2 = x^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$, $OA^2 = h^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$. Derhalve is de kromtestraal ρ als volgt te bepalen

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{PA^2}{n\,.\,OA}\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{PA^2}{nh}.$$

Aanmerkingen. I. Schrijft men 1) in den vorm

$$dy - \frac{y}{x}\,dx = kx^{n-1}\,dx,$$

dan heeft men met een lineaire differentiaalvergelijking van den eersten graad te doen en vindt men

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int kx^{n-1}\,e^{\int\frac{dx}{x}}\,dx + C\right].$$

II. Men vergelijke Neuberg's verhandeling „Rayon de courbure de certaines courbes planes" (*Bull. de l'Acad. de Belgique*, 3de reeks, deel 25, blz. 381 en 382), die ook aan de Juni-aflevering van *Mathesis*, 1893 is toegevoegd.

Vraagstuk LII.

Een kegelsnee K gaat door de punten A, B, C en wordt in P aangeraakt door de rechte p. De normale afstandscoördinaten van P met betrekking tot driehoek ABC zijn ξ, η, ζ, de tangentieele normale afstandscoördinaten van p met betrekking tot driehoek ABC zijn α, β, γ, de straal van den om ABC beschreven cirkel is R. Men vraagt:

a) den kromtestraal ρ van K in P in deze grootheden uit te drukken,

b) de meetkundige plaats van het krommingsmiddelpunt te vinden, als P zich over *p* verplaatst of *p* om P draait en K dienovereenkomstig verandert. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* J. NEUBERG.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

1. De sub *a*) bedoelde betrekking is $\rho = \frac{\xi\eta\zeta}{\alpha\beta\gamma}$ R. Zij is door den voorsteller van het vraagstuk aangewezen in zijn aan het einde der oplossing van het vorige vraagstuk aangehaalde verhandeling (blz. 384 in het midden). Doch reeds in 1890 was door E. CESÀRO een overeenkomstige uitdrukking gegeven (*Mathesis*, 1890, blz. 190). En zeer onlangs (*Mathesis* 1893, blz. 217) gaf hij het volgende elementaire bewijs der formule.

Neemt men P tot oorsprong en p tot x-as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan, dan stelt $x^2 + 2\lambda xy + \mu y^2 = 2\rho y$ een kegelsnee voor, die p in P aanraakt en in het raakpunt een kromtestraal ρ heeft. De voorwaardevergelijkingen, die uitdrukken, dat deze kegelsnee door de punten A, B, C met de coördinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) gaat, geven na eliminatie van λ en μ onmiddellijk

$$\begin{vmatrix} 2\rho y_1 - x_1^2 , & x_1y_1 , & y_1^2 \\ 2\rho y_2 - x_2^2 , & x_2y_2 , & y_2^2 \\ 2\rho y_3 - x_3^2 , & x_3y_3 , & y_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$2\rho y_1y_2y_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \end{vmatrix},$$

d. i., als de inhoud van driehoek ABC door I(ABC) is aangeduid,

$$\begin{aligned} 4\rho y_1y_2y_3 \, \mathrm{I\,(ABC)} &= (x_2y_3 - x_3y_2)(x_3y_1 - x_1y_3)(x_1y_2 - x_2y_1), \\ &= 8 \,.\, \mathrm{I\,(PBC)} \,.\, \mathrm{I\,(PCA)} \,.\, \mathrm{I\,(PAB)} \\ &= a\xi \,.\, b\eta \,.\, c\zeta = 4\mathrm{I\,(ABC)} \,.\, \mathrm{R}\xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

Wijl nu y_1, y_2, y_3 de door α, β, γ aangewezen afstanden zijn, is hiermee het gestelde bewezen.

2. De volgende geheel meetkundige afleiding der sub *a*) bedoelde betrekking is door A. GOB op het in 1893 te Besançon gehouden congres der fransche associatie meegedeeld.

Zijn de driehoeken ABC en A′B′C′ in een zelfden cirkel beschreven, dan geldt de betrekking

$$AB'C' \,.\, BC'A' \,.\, CA'B' \,.\, ABC = A'BC \,.\, B'CA \,.\, C'AB \,.\, A'B'C',$$

waarin alle factoren inhouden van driehoeken voorstellen. Deze vergelijking wordt gemakkelijk bewezen met behulp van de bekende betrekking $abc = 4IR$, die boven reeds werd aangewend.

Projecteert men de voorgaande figuur, dan blijkt de gevonden betrekking ook te gelden voor twee driehoeken ABC, A′B′C′ beschreven in een ellips. Stelt nu (A, B′C′) de loodlijn uit A op B′C′ voor, dan gaat zij na vereenvoudiging over in

$$\frac{(A,\, B'C') \,.\, (B,\, C'A') \,.\, (C,\, A'B')}{(A',\, BC) \,.\, (B',\, CA) \,.\, (C',\, AB)} = \frac{R}{R'},$$

waarin R en R′ de stralen der om ABC en A′B′C′ beschreven cirkels aanduiden. En vallen A′, B′, C′ nu in een punt P samen, dan vindt men

$$\frac{(A,\, p) \,.\, (B,\, p) \,.\, (C,\, p)}{(P,\, BC) \,.\, (P,\, CA) \,.\, (P,\, AB)} = \frac{R}{\rho}$$

d. i. de in het vraagstuk bedoelde betrekking.

3. De vraag naar de meetkundige plaats van het bij P behoorende krommingsmiddelpunt ω, als P de lijn p doorloopt, is door V. Jamet gesteld (*Mathesis*, 1885, blz. 192) en door steller dezes opgelost (*Mathesis*, 1888, blz. 143). Zij volgt onmiddellijk uit de boven gevonden betrekking. Nemen we p tot x-as en een willekeurig punt O van p tot oorsprong aan en zijn (δ, ρ) de coördinaten van ω, dan gaat zij over in

$$\alpha\beta\gamma \,.\, \rho = R\,(\delta \operatorname{Cos} \mu_1 - p_1)\,(\delta \operatorname{Cos} \mu_2 - p_2)\,(\delta \operatorname{Cos} \mu_3 - p_3),$$

als $x \operatorname{Cos} \mu_i + y \operatorname{Sin} \mu_i - p_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ de vergelijkingen zijn van de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC. Dus is de meetkundige plaats een kubische kromme, die door de snijpunten van p met de zijden van driehoek ABC gaat en de in die snijpunten op die zijden opgerichte loodlijnen tot asymptoten heeft.

4. De vraag naar de meetkundige plaats van ω, als p om P draait, is die naar de meetkundige plaats van ω bij de kegelsneden eens bundels in een der basispunten P.

Legt men door P de rechthoekige assen PX en PY en maakt p met PX den hoek μ, dan vindt men

$$x = -\rho \operatorname{Sin} \mu, \; y = \rho \operatorname{Cos} \mu, \; \alpha = y_1 \operatorname{Cos}\mu - x_1 \operatorname{Sin}\mu = \frac{1}{\rho}(y_1 y + x_1 x), \text{ enz.}$$

Door substitutie der waarden van α, β, γ gaat de boven gevonden betrekking dus over in

$$R\xi\eta\zeta (x^2 + y^2) = (xx_1 + yy_1)(xx_2 + yy_2)(xx_3 + yy_3),$$

wat weer een kubische kromme voorstelt.

5. De beide kubische krommen komen punt voor punt met de elementen van een stelsel van enkelvoudige oneindigheid (punten van een lijn, lijnen door een punt) overeen en moeten dus rationaal zijn. Werkelijk heeft de eerste een keerpunt in het oneindig ver gelegen punt der ρ-as en de tweede een geïsoleerd punt met naar de onbestaanbare cirkelpunten gerichte raaklijnen in P.

Vraagstuk LIII.

Twee eenbladige hyperboloïden H_1 en H_2 snijden elkaar rechthoekig volgens twee gegevene elkaar kruisende lijnen. Men vraagt:

a) de meetkundige plaats der middelpunten M_1 en M_2,

b) de constructie van M_2, als M_1 gegeven is,

c) wanneer M_1M_2 een minimum wordt,

d) te bewijzen, dat H_1 en H_2 orthogonaal zijn,

e) de meetkundige plaats der beschrijvende lijnen van H_1 en H_2, die loodrecht op de cirkeldoorsneden staan.

(T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA.

Oplossing.

1. Zijn AB en CD (fig. 29) de gegeven lijnen, is AC haar kortste afstand, O het midden van AC, OX evenwijdig aan AB, OY evenwijdig aan CD, dan nemen we O (X, Y, C) als coördinaatassen x, y, z aan. Daarbij stellen we dan $AC = 2c$ en hoek $XOY = 2\nu$.

Voor de vergelijkingen van twee hyperboloïden door AB, CD vinden we dan

$$P_i z^2 + 2\,Q_i yz + 2\,R_i zx + 2\,S_i xy + 2\,R_i cx - 2\,Q_i cy - P_i c^2 = 0 \; (i = 1, 2) \,..\, 1)$$

en voor de voorwaarde, dat de raakvlakkken in het punt $(x', 0, -c)$ loodrecht op elkaar staan

$$(S_1 x' - 2\,Q_1 c)(S_2 x' - 2\,Q_2 c) + (R_1 x' - P_1 c)(R_2 x' - P_2 c) \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0.$$

Wijl dit voor elke waarde van x' moet gelden, willen de beide oppervlakken elkaar langs de geheele lijn AB loodrecht snijden, heeft men

$$\left.\begin{array}{l} S_1S_2 + R_1R_2 \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0 \;\;,\;\; 4Q_1Q_2 + P_1P_2 \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0 \\ 2(Q_1S_2 + Q_2S_1) + (P_1R_2 + P_2R_1) \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0 \end{array}\right\} \ldots 2).$$

Evenzoo geeft de voorwaarde der loodrechte snijding langs CD

$$\left.\begin{array}{l} S_1S_2 + Q_1Q_2 \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0 \;\;,\;\; 4R_1R_2 + P_1P_2 \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0 \\ 2(R_1S_2 + R_2S_1) + (P_1Q_2 + P_2Q_1) \operatorname{Sin}^2 2\nu = 0 \end{array}\right\} \ldots 3).$$

Is $P_1 = 0$, dan volgt uit 2) dat een der Q's en verder uit 3) dat een der S's nul moet zijn, wat uitgesloten is, wijl een der beide oppervlakken dan een hyperbolische paraboloïde zijn zou. Wij kunnen P_1 en P_2 derhalve gelijk aan de eenheid nemen en vinden dan door oplossing van 2) en 3)

$$2Q_1 = k \operatorname{Sin} 2\nu \;,\quad 2R_1 = l \operatorname{Sin} 2\nu \;,\quad 2S_1 = m \operatorname{Sin}^2 2\nu,$$
$$2kQ_2 = - \operatorname{Sin} 2\nu \;,\quad 2lR_2 = - \operatorname{Sin} 2\nu \;,\quad 2mS_2 = \operatorname{Sin}^2 2\nu,$$

terwijl k, l, m dan nog voldoen moeten aan de betrekkingen

$$(kl - m)(k + lm) = 0 \quad , \quad (kl - m)(km + l) = 0.$$

Voor $kl - m = 0$ stellen de vergelijkingen 1) twee paar vlakken voor; dus vinden we $k + lm = 0$ en $km + l = 0$, d. i. $k = \mp l$, $m = \pm 1$. Derhalve worden de vergelijkingen der hyperboloïden verkregen in den vorm

$$\left.\begin{array}{l} H_1 \equiv (z^2 \pm xy \operatorname{Sin}^2 2\nu - c^2) + (zx \mp yz + cx \pm cy)\, l \operatorname{Sin} 2\nu = 0 \\ H_2 \equiv l(z^2 \pm xy \operatorname{Sin}^2 2\nu - c^2) - (zx \mp yz + cx \pm cy) \operatorname{Sin} 2\nu = 0 \end{array}\right\} \ldots 4).$$

In deze twee vergelijkingen moet men van de dubbele teekens òf overal het bovenste, òf overal het onderste nemen. Dus vinden we twee verschillende stelsels van hyperboloïden door l als veranderlijk te beschouwen. Met iedere H_1 komt dan de bepaalde H_2 van hetzelfde stelsel overeen.

2. Gaan we thans tot een rechthoekig coördinatenstelsel over door met behoud van de z-as de deellijnen van hoek XOY tot nieuwe x'- en y'-as te kiezen, dan moeten we de transformatieformules

$$x \operatorname{Sin} 2\nu = x' \operatorname{Sin} \nu - y' \operatorname{Cos} \nu \quad , \quad y \operatorname{Sin} 2\nu = x' \operatorname{Sin} \nu + y' \operatorname{Cos} \nu$$

gebruiken. Met weglating der accenten vinden we dan

$$\left.\begin{array}{l} H_1 \equiv (x^2 \operatorname{Sin}^2 \nu - y^2 \operatorname{Cos}^2 \nu) + (z^2 - c^2) - 2l(yz \operatorname{Cos} \nu - cx \operatorname{Sin} \nu) = 0 \\ H_2 \equiv l(x^2 \operatorname{Sin}^2 \nu - y^2 \operatorname{Cos}^2 \nu) + l(z^2 - c^2) + 2(yz \operatorname{Cos} \nu - cx \operatorname{Sin} \nu) = 0 \end{array}\right\} \ldots T,$$

$$\left.\begin{array}{l} H'_1 \equiv (x^2 \operatorname{Sin}^2 \nu - y^2 \operatorname{Cos}^2 \nu) - (z^2 - c^2) - 2l(zx \operatorname{Sin} \nu - cy \operatorname{Cos} \nu) = 0 \\ H'_2 = l(x^2 \operatorname{Sin}^2 \nu - y^2 \operatorname{Cos}^2 \nu) - l(z^2 - c^2) + 2(zx \operatorname{Sin} \nu - cy \operatorname{Cos} \nu) = 0 \end{array}\right\} \ldots T'.$$

Hierbij stellen T en T′ de beide stelsels voor.

De middelpunten M_1, M_2, M'_1, M'_2 deze oppervlakken zijn

$$\left.\begin{matrix} M_1 \ldots x \operatorname{Sin}\nu = -cl\,, y=0\,, z=0 \\ M_2 \ldots lx \operatorname{Sin}\nu = c\,, y=0\,, z=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} M'_1 \ldots x=0\,, y \operatorname{Cos}\nu = cl\,, z=0 \\ M'_2 \ldots x=0\,, ly \operatorname{Cos}\nu = -c\,, z=0 \end{matrix}\right\}.$$

3. We kunnen thans tot de beantwoording der vijf vragen overgaan.

a). De meetkundige plaats der midpelpunten M_1, M_2 is de as OX′, die der middelpunten M'_1, M'_2 de as OY′.

b). Verder is $OM_1 \,.\, OM_2 = -\dfrac{c^2}{\operatorname{Sin}^2\nu}$, $OM'_1 \,.\, OM'_2 = -\dfrac{c^2}{\operatorname{Cos}^2\nu}$.

Hieruit volgt een constructie van M_2 als M_1 gegeven is. Zij is in fig. 30 uitgevoerd. Op OY is een stuk $OK = c$ afgezet; Door K is FG loodrecht op OY en tusschen OX′ en OY′ getrokken. Is nu M_1 op OX′ (M'_1 op OY′) gegeven, zoo doet de halve cirkel M_1GM_2 ($M'_1FM'_2$), waarvan de middellijn M_1M_2 ($M'_1M'_2$) langs OX′ (OY′) valt, het gevraagde punt M_2 (M'_2) kennen.

c). Uit deze constructie blijkt terstond, dat M_1M_2 en $M'_1M'_2$ minimum zijn, als de middelpunten der cirkels in O vallen en M_1 en M_2, M'_1 en M'_2 symmetrisch liggen ten opzichte van O. Dus is

$$\text{min.}\, M_1M_2 = 2\,.\,OG = \frac{2c}{\operatorname{Sin}\nu}\,, \quad \text{min.}\, M'_1M'_2 = 2\,.\,OF = \frac{2c}{\operatorname{Cos}\nu}.$$

d). Door het vlak Y′OZ naar M_1 te verschuiven en de *y*- en *z*-assen een hoek ϕ te laten draaien, waarbij $x \operatorname{Sin}\nu$, y, z door $x \operatorname{Sin}\nu - cl$, $y \operatorname{Cos}\phi - z \operatorname{Sin}\phi$, $y \operatorname{Sin}\phi + z \operatorname{Cos}\phi$ vervangen worden, kan men de vergelijking van H_1 van T in den vorm $Ax^2 + By^2 + Cz = D$ brengen. Hierbij vindt men

$$\operatorname{Tg} 2\phi = \frac{2l \operatorname{Cos}\nu}{1+\operatorname{Cos}^2\nu},\ A = \operatorname{Sin}^2\nu,\ \left.\begin{matrix} 2B \\ 2C \end{matrix}\right\} = \operatorname{Sin}^2\nu \mp \sqrt{\{(1+\operatorname{Cos}^2\nu)^2 + 4l\operatorname{Cos}^2\nu\}}$$

en dus $B + C = A$. Dus is H_1 een orthogonale hyperboloïde en op dezelfde wijs blijkt, dat H_2, H'_1, H'_2 deze eigenschap eveneens bezitten. De cirkeldoorsneden van het stelsel T zijn evenwijdig aan OX′, die van het stelsel T′ zijn evenwijdig aan OY′.

e). Keeren we tot het coördinatenstelsel O(X′Y′Z) terug, dan kunnen we de in vlakken door OX′ gelegen cirkeldoorsneden van H_1 beschouwen als de doorsneden van H_1 met den bol

$$B \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2Ex + 2Fy + 2Gz + H = 0.$$

Liggen de cirkeldoorsneden in de vlakkken $\beta y + \gamma z = 0$, $\beta' y + \gamma' z = 0$, dan zal men f zoo kunnen bepalen, dat $H_1 + fB = 0$ identisch is met $(\beta y + \gamma z)(\beta' y + \gamma' z) = 0$. Hiertoe is o.a. noodig

$$\text{Sin}^2 \nu + f = 0 \;,\; f - \text{Cos}^2 \nu = \beta\beta' \;,\; 1 + f = \gamma\gamma' \;,\; -2l \text{Cos}\, \nu = \beta\gamma' + \beta'\gamma,$$

waaruit volgt $\beta\beta' = -1$. Stellen we nu $\beta = 1$, $\beta' = -1$, dan is $\left.\begin{matrix}\gamma \\ \gamma'\end{matrix}\right\} = \text{Cos}\, \nu \{ \sqrt{1 + l^2} \pm l \}$ en worden de beschrijvende lijnen van H_1, die loodrecht op de vlakken van cirkeldoorsnee staan, voorgesteld door

$$z = y \text{ Cos}\, \nu \{ \sqrt{1 + l^2} - l \} \quad , \quad x \text{ Sin}\, \nu = c \{ - l \pm \sqrt{1 + l^2} \} \quad ..5)$$

$$z = y \text{ Cos}\, \nu \{ \sqrt{1 - l^2} - l \} \quad , \quad x \text{ Sin}\, \nu = c \{ - l \pm \sqrt{1 + l^2} \} \quad ..6).$$

Door eliminatie van l uit de beide vergelijkingen 5) en uit de beide vergelijkingen 6) vinden we

$$xy \text{ Sin } 2\nu = \pm 2cz \quad , \quad xz \text{ Tg}\, \nu = \pm cy$$

voor de vergelijkingen der meetkundige plaatsen van beide lijnenparen.

Voor H_2 vinden we dezelfde uitkomst, terwijl H'_1 en H'_2 samen de meetkundige plaatsen

$$xy \text{ Sin } 2\nu = \pm 2cz \quad , \quad yz \text{ Cos}\, \nu = \pm cx$$

opleveren. Dus bestaat de meetkundige plaats der beschrijvende lijnen loodrecht op de cirkeldoorsneden uit zes hyperbolische paraboloïden, die allen door twee der drie coördinaatassen gaan en twee der coördinaatvlakken tot richtvlakken hebben.

Aanmerking der redactie. Twee oppervlakken van den tweeden graad, die twee elkaar kruisende lijnen AB, CD gemeen hebben, snijden elkaar verder volgens twee lijnen p en q, die op AB en CD rusten. In het punt P, dat p met AB gemeen heeft, hebben beide oppervlakken dan hetzelfde raakvlak π. Wijl de raakvlakken in P aan beide oppervlakken volgens de voorwaarden van het vraagstuk loodrecht op elkaar moeten staan, moet π loodrecht staan op zich zelf en dus een der beide cyclische vlakken zijn door AB, die den onbestaanbaren cirkel in het oneindige aanraken.

Zijn α en β de beide cyclische vlakken door AB en γ en δ

de beide cyclische vlakken door CD, dan zijn p en q de snijlijnen $(\alpha\gamma)$ en $(\beta\delta)$, of de snijlijnen $(\alpha\delta)$ en $(\beta\gamma)$. Hiermee staat in verband, dat er twee reeksen van oppervlakken T en T′, of (H_1, H_2) en (H'_1, H_2) zijn.

Vraagstuk LIV.

Gegeven een kwadratisch oppervlak O^2 en een vlak α. Gevraagd de meetkundige plaats van het punt P in de ruimte, waarvoor twee der zes door dit punt gaande normalen haar voetpunten in α hebben, en het aantal malen, dat deze twee normalen samenvallen.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

1. De normalen in de punten van de kegelsnee k^2, volgens welke α het oppervlak O^2 snijdt, op O^2 opgericht vormen een regelvlak, waaraan MANNHEIM den naam „normalie" gegeven heeft. Wijl de dubbelkromme van dit normalenregelvlak klaarblijkelijk de bedoelde meetkundige plaats uitmaakt, moet het nader worden onderzocht.

De raakvlakken in de punten van k^2 aan O^2 aangebracht omhullen een kwadratischen kegel K^2. De loodlijnen door den top T van dezen kegel op de raakvlakken opgericht vormen een tweeden kwadratischen kegel K'^2, dien men den reciproken kegel van K^2 noemt. De normalen in de punten van k^2 op O^2 opgericht zijn evenwijdig met de overeenkomstige beschrijvende lijnen van K'^2 en kunnen dus beschouwd worden als verbindingslijnen van de overeenkomstige punten van twee projectieve puntenreeksen, waarvan de eene ligt op k^2 en de andere op de doorsnee k^2_∞ van K'^2 met het vlak in het oneindige. De meetkundige plaats dier verbindingslijnen is een regelvlak van den vierden graad O^4, ook wel oppervlak van CHASLES genoemd, dat een kubische ruimtekromme tot dubbelkromme heeft; deze dubbelkromme is de gevraagde meetkundige plaats. [1])

2. Van de bedoelde ruimtekromme R^3 kan men gemakkelijk de voor de constructie vereischte elementen bepalen. Laat

[1]) Omtrent dit oppervlak vergelijke men o.a. CARDINAAL's voordracht over de oppervlakken van den vierden graad (24 December 1892). (RED.)

men uit den top T der kegels K^2 en K'^2 een loodlijn neer op α en trekt men uit het voetpunt raaklijnen aan k^2, dan zullen de normalen in de raakpunten dezer raaklijnen op O^2 opgericht in α liggen. Snijden deze normalen k^2 ten tweeden male in A en B en elkaar in C, dan zijn A, B, C de drie in α gelegen punten van R^3. Richt men nu in drie andere punten D, E, F van k^2 de normalen d, e, f op O^2 op, dan is R^3 met behulp van de drie raaklijnen d, e, f en de drie punten te construeeren.

3. Is P een punt van R^3, p de raaklijn in P aan R^3 en zijn n_1 en n_2 de door P gaande normalen van O^2, die op k^2 gelegen voetpunten hebben, dan zijn $(n_1 p)$ en $(n_2 p)$ de beide raakvlakken in P aan de beide bladen van het normalenregelvlak. Vallen beide normalen samen, dan is dit ook met de beide raakvlakken het geval en is P dus een klempunt van R^3. Omgekeerd levert ieder klempunt van R^3 op O^4 twee samenvallende beschrijvende lijnen n_1, n_2 van O^4 op. Het gebeurt dus viermaal, dat de bedoelde twee normalen samenvallen, wijl er op R^3 voor elk oppervlak O^4, waarvan R^3 de dubbelkromme is, vier klempunten liggen. Duidt men nl. als in Vraagstuk 174 van deel V de verschillende punten van R^3 door een veranderlijken parameter λ aan, dan is O^4 de meetkundige plaats der verbindingslijn van de punten λ_1, λ_2, als λ_1 en λ_2 met elkaar verbonden zijn door een symmetrieke kwadratische vergelijking

$$\lambda_1^2\lambda_2^2 + A\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) + B(\lambda_1^2+\lambda_2^2) + C\lambda_1\lambda_2 + D(\lambda_1+\lambda_2) + \varepsilon = 0$$

en hieruit volgt, dat de twee waarden van λ_2, die bij een zelfde λ_1 behooren, voor vier verschillende waarden van λ_1 samenvallen.

AANMERKINGEN. I. De vergelijking $(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4)^{(2)} = 0$ stelt een omwentelingsoppervlak voor, als aan de twee voorwaarden

$$a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{12}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13}\,a_{23}}{a_{12}}$$

voldaan is. Ontbreken de termen met xz en yz, dan herleiden de twee voorwaarden zich tot eene, nl.

$$(a_{11} - a_{22})(a_{22} - a_{33}) - a_{12}^2 = 0.$$

Dus is het oppervlak $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c} - 1 + k\left(\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} - 1\right)^2 = 0$

een omwentelingsoppervlak, als k de door de vergelijking

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}+\frac{k}{p^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}+\frac{k}{q^2}\right)-\frac{k^2}{p^2q^2}=0$$

bepaalde waarde heeft. Anders gezegd, indien het vlak α loodrecht staat op een der hoofdvlakken van O^2, wordt dit oppervlak langs de doorsnee met α door een kwadratisch oppervlak aangeraakt en maakt derhalve de as van dit omwentelingslichaam, die in het hoofdvlak ligt, deel uit van R^3.

Staat het vlak α loodrecht op een hoofdas van O^2, dan splitst R^3 zich in twee lijnen loodrecht op deze hoofdas, waarvan elk der beide hoofdvlakken door de hoofdas er een bevat, en in de lijn in het oneindige van α.

Gaat α door een hoofdas van O^2, dan bestaat R^3 uit deze hoofdas, een lijn in het toegevoegde hoofdvlak en een derde lijn in het oneindige. (W. M.)

II. Het bij een vlak α loodrecht op een der hoofdassen behoorende normalenregelvlak wordt gemakkelijk verkregen door zich op twee elkaar rechthoekig kruisende lijnen a en b twee geprojecteerde cirkelbewegingen te denken, die in de punten van kortsten afstand hun evenwichtstand hebben en in slingertijd overeenkomen, doch een phaseverschil van $\frac{1}{4}$ vertoonen. Dit wordt aldus eenvoudig aangetoond.

De normaal in het punt (x, y, z) is voorgesteld door

$$\frac{X-x}{\dfrac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\dfrac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\dfrac{z}{c^2}}.$$

Is nu $x=p$ de vergelijking van α, dan is het normalenoppervlak de meetkundige plaats der verbindingslijn van de punten

$$X=p\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\quad,\quad Y=y\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\quad,\quad Z=0\qquad,$$

$$X=p\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\quad,\quad Y=0\qquad,\quad Z=z\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right),$$

waarin men met het oog op de betrekking

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{p^2}{a^2}$$

voor Y in den eersten en voor Z in den tweeden regel ook schrijven kan

$$Y = \left(b - \frac{c^2}{b}\right) \operatorname{Cos} \phi \sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}} \quad , \quad Z = \left(c - \frac{b^2}{c}\right) \operatorname{Sin} \phi \sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}}.$$

Opmerking verdient, dat de amplitudines der beide geprojecteerde cirkelbewegingen niet gelijk kunnen zijn. Want de voorwaarde

$$b - \frac{c^2}{b} = \pm \left(c - \frac{b^2}{c}\right)$$

voert steeds tot $b = c$. (RED.)

III. Het aantal malen, dat de twee bedoelde normalen samenvallen, is tevens het aantal kromtelijnen van O^2, die α aanraken. Ook langs dezen weg is het dus te bepalen (RED.)

Vraagstuk LV.

In een vlak zijn een kegelsnee K en twee punten P_1 en P_2 gegeven. Door P_1 trekt men de lijn p_1 evenwijdig aan de poollijn van P_2 en door P_2 de lijn p_2 evenwijdig aan de poollijn van P_1. Te onderzoeken, aan welke voorwaarde K voldoen moet, opdat P_1, P_2, het middelpunt M van K en het snijpunt A van p_1 en p_2 vier concyclische punten zijn. (Dr. A. EECEN.)

Opgelost *door* Mej. C. H. DE HAAS, Mej. A. G. WIJTHOFF, Dr. A. EECEN, W. MANTEL, A. A. NIJLAND, Dr. A. J. A. PRANGE *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossing *van* Dr. A. EECEN.

1. We nemen A als oorsprong en AP_1 en AP_2 als x- en y-as van een scheefhoekig assenstelsel aan en noemen den hoek dier assen θ. We stellen de gegeven kegelsnee K door de vergelijking $(a_1x + a_2y + a_3)^{(2)} = 0$ voor en vinden dan de vergelijking $(a_1x' + a_2y' + a_3)\ (a_1x + a_2y + a_3) = 0$ voor de poollijn van het punt (x', y'). Zijn $(x_1, 0)$, $(0, y_2)$ de coördinaten van P_1 en P_2, dan zijn de poollijnen p_1 en p_2 dezer punten dus voorgesteld door

$$p_1 \equiv (a_1x_1 + a_3)\ (a_1x + a_2y + a_3) = 0,$$
$$p_2 \equiv (a_2y_2 + a_3)\ (a_1x + a_2y + a_3) = 0.$$

Wijl de eerste evenwijdig moet zijn met AP_2, de tweede met AP_1, vinden we de voorwaarden $a_{12}x_1 + a_{23} = 0$, $a_{12}y_2 + a_{13} = 0$.

Dus zijn de coördinaten van P_1 en P_2 achtereenvolgens

$$\left(-\frac{a_{23}}{a_{12}}, 0\right) \text{ en } \left(0, -\frac{a_{12}}{a_{12}}\right).$$

2. Is $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta) \operatorname{Cos} \theta - R^2 = 0$ de vergelijking van een willekeurigen cirkel en substitueeren we nu de coördinaten van A, P_1, P_2, dan vinden we na eenige herleiding $a_{12}(x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{Cos} \theta) + a_{23}x + a_{13}y = 0$, of

$$(a_2x + a_1y)(a_1x + a_2x + a_3) = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \operatorname{Cos} \theta)\, xy \,..\, 1).$$

Wijl nu de coördinaten van het middelpunt van K bepaald worden door de vergelijkingen $a_1(a_1x + a_2y + a_3) = 0$ en $a_2(a_1x + a_2y + a_3) = 0$, ligt dit punt M op den cirkel 1), als $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \operatorname{Cos} \theta$ verdwijnt, d. w. z. als de asymptoten van K loodrecht op elkaar staan en deze kegelsnee dus een gelijkzijdige hyperbool is.

Aanmerking. Is K een gelijkzijdige hyperbool, dan zijn MP_1 en AP_2 zoowel als MP_2 en AP_1 antiparallel met betrekking tot de asymptotenrichtingen en liggen de vier punten M, A, P_1, P_2 dus op een cirkel.

Vraagstuk LVI.

Drie mannen gaan met hun vrouwen ter kermis. De mannen heeten Jan, Kees, Piet, de vrouwen Anna, Bet, Mie. Ieder koopt wat en betaalt voor elk voorwerp zooveel guldens, als hij of zij voorwerpen koopt. Indien Piet 23 voorwerpen meer koopt dan Anna, Kees 11 voorwerpen meer dan Mie en iedere vrouw 63 gulden minder uitgeeft dan haar man, vraagt men, welke personen met elkaar getrouwd waren. (N. C. Grotendorst.)

Opgelost *door* Mej. C. H. de Haas, Mej. A. G. Wijthoff, T. J. Allersma, N. C. Grotendorst, A. A. Nijland, Dr. A. J. A. Prange, W. H. L. Janssen van Raay, J. J. Stoel, C. Wafelbakker *en* P. de Carpentier Wildervanck Jr.

Oplossing.

Is m het aantal voorwerpen dat een der mannen en v het aantal dat zijn vrouw koopt, dan is op grond van de opgaaf

$$m^2 - v^2 = 63$$

en dus $(m - v)(m + v) = 1.63 = 3.21 = 7.9$.

Daar m en v geheele getallen moeten zijn, vindt men

$$m + v = 63, 21 \text{ of } 9 \quad , \quad m - v = 1, 3 \text{ of } 7$$

en derhalve

$$m = 32, 12 \text{ of } 8 \quad , \quad v = 31, 9 \text{ of } 1.$$

In verband met het gestelde in de opgaaf moet dus Piet 32, Anna 9, Kees 12 en Mie 1 voorwerp gekocht hebben.

De paren zijn derhalve Piet en Bet, Kees en Anna, Jan en Mie.

AANMERKING. Het is niet moeielijk dit vraagstuk uit te breiden op vier mannen Jan, Kees, Piet, Klaas en vier vrouwen Anne, Bet, Mie, Trui, als men iedere vrouw 189 gulden minder laat uitgeven dan haar man en Piet 65 voorwerpen meer dan Anna, Kees 27 voorwerpen meer dan Mie en Klaas 5 voorwerpen meer dan Trui koopen laat. Men vindt dan de drie bovenstaande paren met het paar Klaas en Trui vermeerderd, enz. (RED.)

Vraagstuk LVII

Als men op een punt in een zelfde vlak achtereenvolgens twee inversies toepast met betrekking tot gegeven cirkels, dan zullen deze gezamenlijk vervangen kunnen worden door een lineaire transformatie, die elliptisch, parabolisch of hyperbolisch is, naar gelang de cirkels elkaar snijden, raken of niet snijden. Men vraagt dit te bewijzen. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN, Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Zijn $C \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ en $C' \equiv (x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0$ de vergelijkingen der beide cirkels en gaat het punt (x_1, y_1) door inversie ten opzichte van C in (x, y), het punt (x, y) door inversie ten opzichte van C′ in (x_2, y_2) over, dan gelden de complexe betrekkingen

$$x_1 \pm iy_1 = \frac{r^2}{x \pm iy} \quad , \quad x_2 \pm iy_2 - d = \frac{r_1^2}{x \mp iy - d}.$$

Schrijven we hierin kortheidshalve z_k en z'_k voor $x_k + iy_k$ en $x_k - iy_k$, dan gaan deze betrekkingen over in

$$z_1 = \frac{r^2}{z'} \;,\; \left(z_1' = \frac{r^2}{z}\right) \;,\; z_2 - d = \frac{r_1^2}{z_1' - d} \;,\; \left(z_2' - d = \frac{r_1^2}{z_1 - d}\right).$$

Dus geeft eliminatie van z of z'

$$z_2 = \frac{(d^2 - r_1^2)\, z_1 - r^2 d}{d z_1 - r^2}.$$

Vergelijkt men dit met de lineaire transformatie $\xi = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, die elliptisch, parabolisch of hyperbolisch is, naarmate de vorm $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$ negatief, nul of positief is, dan blijkt er tusschen z_1 en z_2 een lineaire transformatie te bestaan, die elliptisch, parabolisch of hyperbolisch is, naarmate $(d^2 - r^2 - r_1^2)^2 - 4r^2 r_1^2$ negatief, nul of positief is, d. i. naarmate de cirkels elkaar snijden, raken of niet snijden

Oplossing *van* Dr. P. H. Schoute *en* Dr. J. de Vries.

Zijn op een zelfde rechte twee kwadratische involuties I en I′ gegeven en bepaalt men bij elk willekeurig punt P_1 der rechte in I het overeenkomstige punt P en daarna bij P in I′ het overeenkomstige punt P_2, dan zal er tusschen P_1 en P_2 een overeenkomst één aan één bestaan, die het involutorisch karakter verloren heeft. Anders gezegd, P_1 en P_2 zullen op de gegeven rechte twee projectieve puntenreeksen doorloopen. Deze puntenreeksen kunnen onbestaanbare, samenvallende of bestaanbare en niet samenvallende dubbelpunten bezitten.

Uit de beide voorwaarden

$$a_1 x x_1 + b_1 (x + x_1) + c_1 = 0 \quad , \quad a_2 x x_2 + b_2 (x + x_2) + c_2 = 0$$

volgt inderdaad door eliminatie van x de betrekking

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x_1 x_2 + (a_1 c_2 - b_1 b_2)\, x_1 + (b_1 b_2 - a_2 c_1)\, x_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0,$$

met behulp waarvan men nu allerlei eenvoudige eigenschappen der projectieve puntenreeksen gemakkelijk bewijzen kan.

In de derde oplossing van Vraagstuk 22 van deel IV is aangewezen, hoe men het tweevoudig oneindig aantal onbestaanbare punten eener rechte over het complexe vlak uitbreidt en de involutie op de rechte daarbij in een omgeslagen inversie overgaat. Geheel langs denzelfden weg blijkt, dat de twee projectieve puntenreeksen op de gegeven rechte daarbij in een lineaire transformatie overgaan. Dit nu levert ons een oplossing van het bovenstaande vraagstuk. Onderstellen we nl., dat de verbindingslijn der middelpunten M en M′ van de gegeven cirkels C en C′, die deze in de puntenparen A, B en A′, B′

snijden mag, de rechte is, op welke wij de beide involuties I en I′ met de dubbelpunten (A, B) en (A′, B′) aannemen, en breiden we deze involuties op het complexe vlak uit, dan vinden we, dat het resultaat van de opeenvolging der beide om M_1M_2 omgeslagen inversies niet verandert, als men bij beide het omslaan om M_1M_2 weglaat. Anders gezegd, de samenstelling van twee gegeven inversies levert een lineaire transformatie op.

Het verdient opmerking, dat de lineaire transformatie in het complexe vlak een *verschoven omgeslagen inversie* genoemd kan worden. Is nl. G_1 (H_2) het punt van het eerste (tweede) vlakke stelsel, dat met het oneindige van het tweede (eerste) vlakke stelsel overeenkomt, dan doet een translatie van het eerste stelsel in de richting en ter grootte van G_1H_2 de involutorische ligging der vlakke stelsels intreden.

Met betrekking tot de lijn G_1H_2 hebben de steeds bestaanbare dubbelpunten S, T der lineaire transformatie een merkwaardige ligging, die hierdoor is gekenmerkt, dat de middens van G_1H_2 en ST samenvallen. Bij de algemeenste lineaire transformatie kan bovendien de hoek, waaronder G_1H_2 en ST elkaar snijden, elke waarde hebben. Want men kan de transformatie door de drie paren (G_1, G_∞), (H_∞, H_2), (S, S) bepalen. Is T dan het vierde hoekpunt van het parallelogram G_1SH_2T, dan volgt uit de gelijkheid van de dubbelverhoudingen ($G_1H_\infty ST$), ($H_2G_\infty TS$) met ($H_2G_\infty TS$), ($G_1H_\infty ST$), dat T het tweede dubbelpunt is, wat de bewering, dat G_1H_2 en ST de paren overstaande hoekpunten van een parallelogram zijn, bewijst.

Is de lineaire transformatie ontstaan uit de samenstelling van twee inversies, d.i. uit de uitbreiding van een bestaanbare projectieve verwantschap langs M_1M_2 op het complexe vlak, waarbij de coëfficiënten α, β, γ, δ in de eerste oplossing bestaanbaar zijn, dan kunnen er zich, wat de ligging van ST ten opzichte van G_1H_2 aanbelangt, drie verschillende gevallen voordoen. In dit geval liggen G_1 en H_2 op M_1M_2. Snijden nu de cirkels elkaar, dan komt elk der snijpunten natuurlijk met zich zelf overeen en zijn S en T symmetrisch gelegen ten opzichte van G_1H_2; het parallelogram is dan een ruit en de projectieve puntenreeksen op M_1M_2 kunnen worden aangebracht door om S of T een hoek $= \frac{1}{2} \angle SGT$ te laten draaien (elliptische transformatie). Raken de cirkels elkaar, dan vallen S en T

met het midden van G_1H_2 samen (parabolische transformatie). En hebben de cirkels geen punten gemeen, dan liggen S en T op G_1H_2, wijl de projectieve puntenreeksen op M_1M_2 dan bestaanbare dubbelpunten hebben (hyperbolische transformatie).

Is de lineaire transformatie in het complexe vlak met behulp van de drie puntenparen (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) bepaald en zijn (S_a, T_a), (S_b, T_b), (S_c, T_c) de dubbelpunten der drie involuties (B_1C_2, B_2C_1), (C_1A_2, C_2A_1), (A_1B_2, A_2B_1), dan vormen deze drie paren van dubbelpunten weer een involutie, waarvan S, T de dubbelpunten zijn. De dubbelpunten S, T der lineaire transformatie kunnen dus uit de drie paren worden afgeleid door een drievoudige toepassing van een der twee op blz. 71 van deel IV gegeven constructies.

Vraagstuk LVIII.

Men vraagt de substitutie $\left(z, \dfrac{17z+12}{7z+5}\right)$ te ontleden in een reeks van substituties van de vormen $(z, z+1)$ en $\left(z, -\dfrac{1}{z}\right)$.

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn, A. A. Nijland *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing.

We hebben

$$f(z) = \frac{17z+12}{7z+5} = 2 + \frac{3z+2}{7z+5} = 2 + z_1 = 2 - \frac{1}{z_2},$$

$$z_2 = -\frac{7z+5}{3z+2} = -2 - \frac{z+1}{3z+2} = -2 + z_3 = -2 - \frac{1}{z_4},$$

$$z_4 = \frac{3z+2}{z+1} = 3 - \frac{1}{z+1} = 3 + z_5 = 3 - \frac{1}{z_6},$$

$$z_6 = z + 1.$$

Stellen we nu de bewerking $(z, z+1)$ door $\phi_1(z)$, de bewerking $\left(z_1 - \dfrac{1}{z}\right)$ door $\phi_2(z)$ voor, dan is derhalve

$$\left(z, \frac{17z+12}{7x+5}\right) = \phi_1^2(z, z_1) = \phi_1^2\phi_2(z, z_2) = \text{enz.}$$
$$= \phi_1^2\phi_2\phi_1^{-2}\phi_2\phi_1^3\phi_2\phi_1(z).$$

In het geheel hebben we dus de translatie $\phi_1(z)$ achtmaal toe te passen en wel tweemaal in tegengestelden zin en bovendien driemaal de omgeslagen inversie $\phi_2(z)$ te gebruiken.

Uit het bovenstaande volgt, dat de ontwikkeling van $\left(z, \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$, waarin α, β, γ, δ geheele getallen zijn, op dezelfde wijze door ontwikkeling van $\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ in een kettingbreuk geschieden kan.

Vraagstuk LIX.

Men vraagt de waarde te bepalen van de integraal

$$\int_0^K \frac{\mathrm{Sn}\,(u-a_1)\,\mathrm{Sn}\,(u-a_2)\ldots\mathrm{Sn}\,(u-a_n)}{\mathrm{Sn}\,(u+a_1)\,\mathrm{Sn}\,(u+a_2)\ldots\mathrm{Sn}\,(u+a_n)}\,du,$$

als $K > a_i > 0$ is. (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

1. De te integreeren functie $f(u)$ heeft de perioden 2K en $2iK'$. Ze is dus een rationale uitdrukking in $\wp(u)$ en $\wp'(u)$ met de perioden $2\omega = 2K$, $2\omega' = 2iK'$. Haar polen zijn te verdeelen in de twee groepen

$$u = -a_1, -a_2, \ldots -a_n, \quad u = a_1+\omega', a_2+\omega', \ldots a_n+\omega'.$$

Wijl de polen blijkbaar enkelvoudig zijn, kan men stellen [1])

$$f(u) = c + \Sigma A_i\zeta(u - a_i - \omega') + \Sigma B_i\zeta(u + a_i).$$

Ter bepaling van A_i stelle men $u = a_i + \omega' + h$ (lim. $h=0$), waardoor men vindt

$$A_i = \frac{\mathrm{Sn}\,(a_i+a_1)\,\mathrm{Sn}\,(a_i+a_2)\ldots\mathrm{Sn}\,(a_i+a_n)}{\mathrm{Sn}\,(a_i-a_1)\,\mathrm{Sn}\,(a_i-a_2)\ldots\mathrm{Sn}\,(a_i-a_n)}\,\mathrm{Sn}\,(2a_i).$$

Eveneens vindt men door $u = -a_i + h$ te stellen

$$B_i = -\frac{\mathrm{Sn}\,(a_i+a_1)\,\mathrm{Sn}\,(a_i+a_2)\ldots\mathrm{Sn}\,(a_i+a_n)}{\mathrm{Sn}\,(a_i-a_i)\,\mathrm{Sn}\,(a_i-a_2)\ldots\mathrm{Sn}\,(a_i-a_n)}\,\mathrm{Sn}\,(2a_i) = -A_i.$$

---

[1]) Voor de ontbinding eener eenwaardige dubbelperiodieke functie kan men vergelijken *Cours de* M. HERMITE, rédigé par ANDOYER, 4ième éd., p. 226. Hoe die ontbinding geschiedt met behulp der ζ-functie vindt men aangegeven in HALPHEN's *Traité des fonct. ellipt.*, I, p. 202.

Eindelijk bepaalt men c door $u=0$ te stellen, wat de betrekking

$$(-1)^n = c - \Sigma A_i \zeta(a_i + \omega') + \Sigma B_i \zeta(a_i)$$

oplevert. Dus is ten slotte

$$f(u) = (-1)^n + \Sigma A_i \{\zeta(u - a_i - \omega') - \zeta(u + a_i) + \zeta(a_i + \omega') + \zeta(a_i)\}.$$

2. Uit de verkregen uitkomst volgt door integratie

$$\int_0^K f(u)du = (-1)^n\omega + \Sigma A_i \left\{ \omega\zeta(a_i+\omega') + \omega\zeta(a_i) + \tfrac{1}{2}\log \frac{\sigma^2(\omega - a_i - \omega')\sigma^2(a_i)}{\sigma^2(-a_i-\omega')\sigma^2(a_i+\omega)} \right\}$$

Deze uitkomst kan vervormd worden. Zoo gaat door toepassing der betrekking

$$\sigma^2(u)\,\sigma^2(v) = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{p(v) - p(u)}$$

op het laatste deel der functie de grootheid achter het teeken *log.* over in

$$\frac{\sigma(\omega - 2a_i - \omega')}{\sigma(-\omega - 2a_i - \omega')} \cdot \frac{p(a_i+\omega) - p(a_i+\omega')}{pa_i - p(a_i + \omega'')} = -e^{-2\eta(2a_i+\omega')} \frac{(e_1-e_3)(pa_i - e_2)}{(pa_i - e_1)(pa_i - e_3)}.$$

Verder is $\zeta(a_i + \omega') = \eta' + \zeta(a_i) + \frac{1}{2}\dfrac{p'a_i}{pa_i - e_3}$. Houdt men nu rekening met de veelwaardigheid van den logarithmus en met de betrekking $\eta'\omega - \eta\omega' + \dfrac{\pi\sqrt{-1}}{2} = 0$, dan vindt men voor de noodzakelijk geheel bestaanbare integraal

$$(-1)^n\omega + \Sigma A_i \left[2\omega\zeta(a_i) + \tfrac{1}{2}\omega\frac{p'(a_i)}{pa_i - e_3} + \eta'\omega - \eta\omega' + (2k+1)\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} \right.$$
$$\left. - 2a_i\eta + \tfrac{1}{2}\log\frac{(e_1 - e_3)(pa_i - e_2)}{(pa_i - e_1)(pa_i - e_3)} \right],$$

waarin $\log(-1) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$ genomen en blijkbaar $k = 0$ is.

Wil men ten slotte weer de elliptische functies in andere notatie invoeren, dan vindt men met behulp van de betrekkingen

$$E(u) = \frac{2 - K^2}{3} + \zeta(u) + \tfrac{1}{2}\frac{p(u)}{pu - e_3}, \quad \frac{p'(u)}{pu - e_3} = 2 \operatorname{Ctgn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{(e - e_3)(pu - e_2)}{(pu - e_1)(pu - e_3)} = \operatorname{Tg}^2 n\, u \operatorname{dn}^2 u$$

voor de integraal

$$(-1)^n K + \Sigma A_i [2KE(a_i) - 2a_i E + K \operatorname{Ctgn} a_i \operatorname{dn} a_i + \log \operatorname{Tgn} a_i \operatorname{dn} a_i].$$

Vraagstuk LX.

Uit den oorsprong worden twee raaklijnen getrokken aan het gesloten deel der kromme $x^3 - 3x^2 + y^2 + 2x = 0$. Gevraagd het verschil der inhouden van de segmenten, waarin het ovaal door de raakkoorde verdeeld wordt. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, A. A. NIJLAND *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

De gegeven kubische parabool (fig. 31) ligt symmetrisch ten opzichte van de x-as. De even tak ligt tusschen de rechten $n = 1$ en $n = 2$.

Uit de poolvergelijking $\rho^2 \mathrm{Cos}^3\phi + \rho(1 - 4\,\mathrm{Cos}^2\phi) + 2\,\mathrm{Cos}\,\phi = 0$ blijkt onmiddellijk, dat het ovaal door de door O gaande rechten beantwoordende aan de betrekking $1 - 8\mathrm{Cos}^2\phi + 8\mathrm{Cos}^4\phi = 0$, d. i. aan $\phi = \pm \frac{1}{8}\pi$, wordt aangeraakt en de raakkoorde door $x = \sqrt{2}$ is voorgesteld.

Trekken wij nu uit O een rechte, die met de x-as den hoek ϕ maakt, en snijdt deze de kromme in E_1 en E_2, de raakkoorde in E, dan zijn de voerstralen OE_1 en OE_2 de wortels ρ_1 en ρ_2 der poolvergelijking, terwijl OE de waarde $\rho = \mathrm{Sec}\,\phi\sqrt{2}$ heeft. Is I het verschil der beide segmenten, dan vinden we dus

$$dI = \tfrac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho^2)\,d\phi - \tfrac{1}{2}(\rho^2 - \rho_2^2)\,d\phi = \tfrac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho^2)\,d\phi$$

en hieruit volgt

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{8}\pi} \tfrac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho^2)\,d\phi = \int_0^{\frac{1}{8}\pi} [(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 - 2\rho^2]\,d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{1}{8}\pi} \left\{ \frac{(1 - 4\mathrm{Cos}^2\phi)^2}{\mathrm{Cos}^6\phi} - \frac{4}{\mathrm{Cos}^2\phi} - \frac{4}{\mathrm{Cos}^2\phi} \right\} d\phi = \int_0^{\frac{1}{8}\pi} \frac{1 - 8\mathrm{Cos}^2\phi + 8\mathrm{Cos}^4\phi}{\mathrm{Cos}^6\phi}\,d\phi$$

$$= \left[\frac{\mathrm{Sin}\,\phi}{5\,\mathrm{Cos}^5\phi} - \frac{12\,\mathrm{Sin}\,\phi}{5\,\mathrm{Cos}^3\phi} + \frac{16\,\mathrm{Sin}\,\phi}{5\,\mathrm{Cos}\,\phi} \right]_0^{\frac{1}{8}\pi} = \frac{8(3 - 2\sqrt{2})}{5}.$$

Vraagstuk LXI.

Men vraagt de onbepaalde vergelijking

$$x^4 + y^4 - 4xy = 3529$$

in geheele getallen op te lossen. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. Mantel, A. A. Nijland, W. H. L. Janssen van Raay *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* W. Mantel.

1. Door $x^2 - y^2 = u$, $xy - 1 = v$ te stellen gaat de voorgestelde vergelijking over in

$$u^2 + 2v^2 = 3531 = 3 \,.\, 11 \,.\, 107 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Zal deze vergelijking oplosbaar zijn, dan moet de congruentie

$$z^2 \equiv -2 \text{ (mod. } 3 \,.\, 11 \,.\, 107) \,.\, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

wortels hebben en -2 dus kwadraatrest zijn van 3, 11, 107 (Lejeune-Dirichlet, Dedekind, *Zahlentheorie*, 4ter Abschnitt). Dit is werkelijk het geval, daar -2 kwadraatrest is van alle enkelvoudige getallen begrepen in de formule $8n + 3$.

Ter oplossing van 2) zoeken we eerst de wortels voor de priemgetallen 3, 11, 107 als moduli. Een dezer getallen p noemende geldt de betrekking

$$1 \equiv (-2)^{\frac{p-1}{2}} \text{ (mod. } p),$$

omdat -2 kwadraatrest is. Door 2) hiermee te vermenigvuldigen vinden we

$$z^2 \equiv (-2)^{\frac{p+1}{2}} \quad , \quad z \equiv (-2)^{\frac{p+1}{4}},$$

waarin de laatste exponent telkens een geheel getal is. Dit geeft

$$\pm z \equiv 1 \text{ (mod. 3)} \;,\; \pm z \equiv 3 \text{ (mod. 11)} \;,\; \pm z \equiv 31 \text{ (mod. 107)}.$$

Neemt men de bovenste teekens dan is dus verder

$z = 31 + 107p \equiv 3 \text{ (mod. 11)}$; $-3p \equiv 5$, $12p \equiv 2$, $p = 11q + 2$;
$z = 31 + 107(11q+2) = 11.107q + 245 \equiv 1 \text{(mod.3)}$; $q \equiv -1$, $q = 3r - 1$;
$z = 3 \,.\, 11 \,.\, 107r - 932$.

Dus wordt het volledige stel oplossingen van 2)

$$\pm z \equiv 932, \text{ of } 718, \text{ of } 1636, \text{ of } 245 \text{ (mod. 3531).}$$

2. We zullen hieruit de oplossing van 1) afleiden. Uit de uitkomst $z = 932$ blijkt, dat er een getal l te vinden is, dat aan de betrekking $932^2 - 3531l = -2$ voldoet. Men vindt $l = 246$. Dus heeft de vorm $3531\alpha^2 + 2 \,.\, 932\alpha\beta + 246\beta^2$ even als het eerste lid van 1) een discriminant -2. Bovendien kan hij de waarde 3531 aannemen ($\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$). Her-

leiden we dezen vorm tot kleinere coëfficiënten door den algorithmus van Horner, dan vinden we, dat de substituties

$$(\alpha\,,\beta) = (\beta'\,,\alpha')\,,\ (\alpha'\,,\beta') = (\beta'' - 4\alpha'', \alpha'')\,,$$
$$(\alpha'', \beta'') = (\beta''' + 5\alpha''', \alpha'''),\ (\alpha''', \beta''') = (u - 3v, v),$$

of

$$u = -\,53\alpha - 4\beta \quad , \quad v = -\,19\alpha + 5\beta$$

$u^2 + 2v^2$ en $3531\alpha^2 + 2 \,.\, 932\,\alpha\beta + 246\beta^2$ in elkaar overvoeren. Dus wordt, zooals de onderstelling $\alpha = 1$, $\beta = 0$ leert, aan 1) voldaan door $u = -\,53$, $v = -\,19$ te stellen. Handelt men evenens met $z = 718$, dan verkrijgt men het volledig stelsel

$$(\pm\, u,\ \pm\, v) = (53,\ 19)\ ,\ \text{of}\ (59,\ 5)\ ,\ \text{of}\ (13,\ 41)\ ,\ \text{of}\ (43,\ 29)$$

der oplossingen van 1). En hieruit volgt dan voor x en y het viertal oplossingen

$$\left.\begin{matrix} x = 6 \\ y = 7 \end{matrix}\right\}\ ,\quad \left.\begin{matrix} x = 7 \\ y = 6 \end{matrix}\right\}\ ,\quad \left.\begin{matrix} x = -\,6 \\ y = -\,7 \end{matrix}\right\}\ ,\quad \left.\begin{matrix} x = -\,7 \\ y = -\,6 \end{matrix}\right\}.$$

3. Aanmerking. We kunnen 1) ook oplossen met behulp van de vergelijkingen

$$u^2 + 2v^2 = 3 \quad , \quad u^2 + 2v^2 = 11 \quad , \quad u^2 + 2v^2 = 107.$$

Gemakkelijk vindt men

$$1 + 2 \,.\, 1^2 = 3 \quad , \quad 3^2 + 2 \,.\, 1^2 = 11 \quad , \quad 3^2 + 2 \,.\, 7^2 = 107.$$

Dus is, als men $\sqrt{-2}$ een oogenblik door μ voorstelt,

$$\begin{aligned} 3531 &= (1 + \mu)\,(1 - \mu)\ .\ (3 + \mu)\,(3 - \mu)\ .\ (3 + 7\mu)\,(3 - 7\mu) \\ &= (1 + \mu)\,(3 + \mu)\,(3 + 7\,\mu)\ .\ (1 - \mu)\ (3 - \mu)\,(3 - 7\mu) \\ &= (-\,53 + 19\mu)\,(-\,53 - 19\mu) = 53^2 + 2 \,.\, 19^2 \end{aligned}$$

en vindt men de andere oplossingen door de factoren anders te combineeren. Werkelijk vindt men zoodoende vier stel uitkomsten.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

4. Door bij de gegeven vergelijking beurtelings de ongelijkheden

$$2 - 2(x - y)^2 < 2 \quad , \quad 2 + 2\,(x + y)^2 > 2$$

op te tellen verkrijgt men de nieuwe ongelijkheden

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 < 3531 < (x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 \,.\,.\, 3).$$

Uit de gegeven vergelijking blijkt, dat een der onbekenden *even*, de ander *oneven* is, verder, dat x en y verwisselbaar zijn en men dus $x^2 > y^2$ onderstellen mag. Uit de eerste onge-

lijkheid 3) volgt bovendien, dat x^2 kleiner dan 8^2 moet zijn. Dus is x^2+1 niet grooter dan 50 en volgens de tweede ongelijkheid 3) y^2 grooter dan 31. Omtrent x en y zijn dus geen andere onderstellingen te maken dan $x^2=49$, $y^2=36$. Hieruit volgt dan $xy=42$. Dus gelden werkelijk de boven aangegeven vier stellen van waarden.

Vraagstuk LXII.

Welke ondeelbare getallen kunnen deelers zijn van den vorm $x^3 - 7xy^2 + 7y^3$, waarin x en y onderling ondeelbaar zijn?

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

1. Het is voldoende te onderzoeken, voor welke ondeelbare p de congruentie

$$x^3 - 7x + 7 \equiv 0 \pmod{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

wortels heeft. Want als het eerste lid van 1) deelbaar is door p is $(xz)^3 - 7(xz)(yz)^2 + 7(yz)^3$ dit ook en bepaalt men nu z door de voorwaarde $yz \equiv 1$, dan is (xz) een wortel van 1).

In 1) stellen we $x \equiv u + v$, zoodat nu de identiteit

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) \equiv 0$$

geldt. Deze stemt met 1) overeen als we stellen

$$3uv \equiv 7 \quad , \quad u^3 + v^3 \equiv -7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

en dit mogen we doen, wijl we twee onbekenden u en v hebben ingevoerd. Verder is

$$27(u^3 - v^3)^2 = 27(u^3 + v^3)^2 - 108u^3v^3 \equiv 27 \, . \, 49 - 4 \, . \, 7^3 \equiv -49.$$

2. Om de gevonden congruentie

$$27(u^3 - v^3)^2 \equiv -49 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

op te lossen, maken we gebruik van de theorie der derdemachtsresten (vergelijk o.a. de oplossing van Vraagstuk 74 van deel V). Is ρ een der onbestaanbare derdemachtswortels uit de eenheid en dus $1 + \rho + \rho^2 = 0$ of $(1 + 2\rho)^2 = -3$, dan volgt uit $81(u^3 - v^3)^2 \equiv -3 \, . \, 49$ onmiddellijk

$$9(u^3 - v^3) \equiv 7(1 + 2\rho) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Uit 2) en 4) volgt dan $18u^3 \equiv 7(-8 + 2\rho)$ of

$$2(3u)^3 \equiv -2(-1 - 3\rho)(-1 - 3\rho^2)^2(1 - \rho)^3 \quad . \quad . \quad 5).$$

3. In 5) is het tweede lid ontbonden in zijn *primaire* enkelvoudige deelers. Wijl p volgens 1) niet gelijk aan 2 zijn kan, mag men de beide leden van 5) door 2 deelen. Dan is 5) oplosbaar, als $(-1-3\rho)(-1-3\rho^2)^2$ een derdemachtsrest van p is, d. i. met toepassing van het symbool van EISENSTEIN dus onder de voorwaarde

$$\left[\frac{(-1-3\rho)(-1-3\rho^2)^2}{p}\right]=1\ ,\ \text{of}\ \left[\frac{-1-3\rho}{p}\right]=\left[\frac{-1-3\rho^2}{p}\right].$$

Wijl we ons tot bestaanbare waarden van p bepalen, zijn de beide leden der laatste vergelijking aan elkaar toegevoegd en dus slechts dan aan elkaar gelijk, als ze gelijk zijn aan de eenheid. Met toepassing van de reciprociteitswet hebben we dus

$$\left[\frac{-1-3\rho}{p}\right]=\left[\frac{p}{-1-3\rho}\right]=1.$$

Stellen we $p=7n\pm\alpha$, dan gaat dit over in $\left[\frac{\alpha}{-1-3\rho}\right]=1$, omdat $-1-3\rho$ een deeler van 7 is.

We zien dus, dat 5) oplosbaar is voor $p=7$ of $p=7n\pm1$.

Voor $p=7n\pm2$ vinden we

$$\left[\frac{\alpha}{-1-3\rho}\right]=\left[\frac{2}{-1-3\rho}\right]=\left[\frac{-1-3\rho}{2}\right]=\left[\frac{1-\rho}{2}\right]=\rho^2.$$

Voor $p=7n\pm3$ is

$$\left[\frac{\alpha}{-1-3\rho}\right]=\left[\frac{3}{-1-3\rho}\right]=\left[\frac{\rho^2(1-\rho)^2}{-1-3\rho}\right]=\left[\frac{\rho}{-1-3\rho}\right]^2\left[\frac{1-\rho}{-1-3\rho}\right]^2=\rho^4.$$

In deze gevallen is 5) dus onoplosbaar.

Als 5) oplosbaar is, vindt men de overeenkomstige v uit de eerste der vergelijkingen 2) en daarna x. Met uitzondering van het geval $p=7$ heeft 1) dan altijd drie wortels.

De gevraagde deelers zijn alzoo 7 en de ondeelbare getallen $7n\pm1$, of als men liever wil, de ondeelbare getallen $42n\pm1$ en $42n\pm13$.

Vraagstuk LXIII.

Gevraagd de meetkundige plaats der punten, uit welke men $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ willekeurig gegeven rechten kan projecteeren als raakvlakken van een zelfden kegel K^n van de n^{de} klasse.

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

1. We onderzoeken, hoeveel punten der meetkundige plaats gelegen zijn op een willekeurig aangenomen rechte r en beschouwen daartoe de vlakkenbundels, die ontstaan, als men een veranderlijk punt P van r door vlakken verbindt met de gegeven rechten r_1, r_2, enz. Deze $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ vlakkenbundels, die de gegeven rechten tot assen hebben, zijn perspectivisch. Snijden we nu de geheele figuur door een willekeurig vlak α, dan hebben we de vraag te beantwoorden, hoe dikwijls het gebeurt, dat de overeenkomstige stralen van $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ projectieve stralenbundels, die de snijpunten R_1, R_2, enz. van α met r_1, r_2, enz. tot toppen hebben en voor welke de stralen R_1R, R_2R, enz. naar het snijpunt R van α met r overeenkomstige stralen zijn, een kromme van de n^{de} klasse aanraken. Keeren we in het vlak deze vraag dualistisch om en stellen we ons voor, dat met het punt R de lijn in het oneindige overeenkomt, dan moeten we de vraag beantwoorden, hoe dikwijls door de met elkaar overeenkomende punten van $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ in hetzelfde vlak gegeven gelijkvormige puntenreeksen een kromme C^n gaat.

2. Zijn

$$X_i \equiv \frac{x_i + \lambda\xi_i}{1+\lambda},\ Y_i \equiv \frac{y_i + \lambda\eta_i}{1+\lambda}\ [i+1, 2 \ldots \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)],$$

de gegeven gelijkvormige puntenreeksen, dan is

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1+\lambda\xi_1, & y_1+\lambda\eta_1, & (x_1+\lambda\xi_1)^2, & \ldots & (y_1+\lambda\eta_1)^n \\ 1, & x_2+\lambda\xi_2, & y_2+\lambda\eta_2, & (x_2+\lambda\xi_2)^2, & \ldots & (y_2+\lambda\eta_2)^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_p+\lambda\xi_p, & y_p+\lambda\eta_p, & (x_p+\lambda\xi_p)^2, & \ldots & (y_p+\lambda\eta_p)^n \end{vmatrix} = 0,$$

waarin $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ door p is voorgesteld, de voorwaardevergelijking in λ. Wijl deze vergelijking in λ van den graad

$$2.1 + 3.2 + 4.3 + \ldots (n+1)n = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

is, gebeurt het $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ maal, dat een punt der oorspronkelijk gevraagde meetkundige plaats op r ligt en is deze dus een oppervlak van den graad $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ Dit oppervlak heeft elk der gegeven rechten tot n-voudige rechte. Want aan den kegel K^n, die een willekeurig punt P van r_1 tot top heeft en de vlakken (Pr_2), $(Pr_3) \ldots (Pr_p)$ aanraakt, kan men n door r_1 gaande raakvlakken brengen.

AANMERKINGEN. I. Hiermee is tevens opgelost de dualistisch tegenovergestelde vraag, omtrent de omhullende van het vlak, dat $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ gegeven rechten in punten eener C^n van den n^{den} graad snijdt. Deze omhullende is een oppervlak van de $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)^{de}$ klasse, waarvan de gegeven rechten n-voudige rechten zijn.

II. Voor het geval $n = 1$ is het oppervlak F^2 de meetkundige plaats der op de drie rechten steunende rechten.

Vraagstuk LXIV.

Gegeven twee loodrecht op elkaar staande vlakken α_1, α_2 en in deze twee rechten l_1 en l_2, die elkaar kruisen. Men vraagt een werkelijk uitvoerbare constructie voor de rechten l, die twee onderling loodrechte vlakken (ll_1) en (ll_2) opleveren, terwijl de hoeken $(ll_1)\alpha_1$ en $(ll_2)\alpha_2$ gelijk zijn. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, H. DE VRIES. *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing.

1. De vlakken door l_1 en l_2 rechthoekig op elkaar doorloopen projectieve bundels: hun snijlijn beschrijft dus een kwadratisch oppervlak G, dat l_1, l_2 en de doorsnee (α_1, α_2) der gegeven vlakken bevat. De vlakken door l_1 en l_2, die in een bepaalden zin met α_1 en α_2 gelijke hoeken vormen, doorloopen eveneens projectieve bundels; hun snijlijn beschrijft dus een kwadratisch oppervlak H, dat l_1, en l_2 en (α_1, α_2) bevat. Deze twee oppervlakken snijden elkaar behalve volgens l_1, l_2 en (α_1, α_2) nog in een op l_1 en l_2 rustende rechte, die aan de vraag voldoet. Wijl men bij de voortbrenging van H twee oppervlakken H_1 en H_2 vindt, naarmate men de standhoeken in den een of anderen zin telt, zijn er twee oplossingen.

(W. M. en H. d. V.)

2. Verplaatst men alle deelen der figuur naar een zelfde punt O en duidt men nu (fig. 32) de rechten en vlakken aan door hun doorsnede met een om O geslagen bol, waarbij de loodrecht op elkaar staande groote cirkels a_1 en a_2 de vlakken α_1 en α_2 en de punten L_1, L_2, X de drie rechten l_1, l_2, (α_1, α_2) aanduiden, dan levert de constructie van de rechthoekige boldriehoeken LL_1L_2 en $L'L_1L_2$, die congruent zijn

met XL_2L_1 de beeldpunten L en L′ der beide oplossingen l en l' op. Want $\angle L_1LL_2 = \angle L_1L'L_2 = \angle L_1XL_2 =$ recht en bovendien $\angle LL_1X = \angle LL_2X = 90° +$ spherisch exces van boldriehoek L_1L_2X.

Hierin is zeker wel de eenvoudigste constructie opgesloten, die nu volgens de regelen der beschrijvende meetkunde kan worden uitgevoerd. (W. H. L. J. v. R.)

AANMERKING. Zooals de inzender opmerkt, kan het hier behandelde vraagstuk tot aanvulling dienen van de oplossing van Vraagstuk 10 dezer reeks (zie blz. 25).

Vraagstuk LXV.

Gegeven een vlakke kromme C^n van den n^{den} graad met een $(n - 1)$-voudig punt O. Door O trekt men een willekeurige rechte, die de kromme nog in P en haar n asymptoten in $A_1, A_2, .. A_n$ snijdt. Men vraagt de algebraïsche betrekking

$$OP = OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n$$

te bewijzen. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* A. A. NIJLAND, Dr. J. DE VRIES *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANK JR.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. Is O de oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel en zijn

$$a_kx + b_ky + c_k = 0 \; (k = 1, 2, \ldots n). \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

ten opzichte hiervan de vergelijkingen der n asymptoten, dan kan elke kromme C^n, waarvan deze rechten de asymptoten zijn, door de vergelijking

$$\prod_1^n (a_kx + b_ky + c_k) + u_{n-2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

worden voorgesteld, als men onder Π het vermenigvuldigings-teeken en onder u_{n-2} een vorm van den $n - 2^{den}$ graad in x en y verstaat. Bepaalt men de coëfficiënten van u_{n-2} bovendien zoodanig, dat in 2) alleen termen van de graden n en $n - 1$ overblijven, dan heeft de kromme in O een $n - 1$ voudig punt. Werkelijk is de kromme hiermee volkomen bepaald. Want $2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$.

2. Voor het snijpunt P der kromme met de rechte $x = r\cos\phi$, $y = r\,\mathrm{Sin}\,\phi$ vindt men

$$r^n \prod_1^n (a_k \mathrm{Cos}\,\phi + b_k \mathrm{Sin}\,\phi) + r^{n-1} \prod_1^n (a_k \mathrm{Cos}\phi + b_k \mathrm{Sin}\phi) \sum_1^n \frac{c_k}{a_k \mathrm{Cos}\phi + b_k \mathrm{Sin}\phi} = 0$$

en dus ook

$$OP = -\sum_1^n \frac{c_k}{a_k \mathrm{Cos}\,\phi + b_k \mathrm{Sin}\,\phi}.$$

Uit 1) volgt verder

$$OA_k = -\frac{c_k}{a_k \mathrm{Cos}\,\phi + b_k \mathrm{Sin}\,\phi}.$$

Dus is $OP = \Sigma\, OA_k$.

AANMERKINGEN. I. Omgekeerd volgt de stelling:

„Bepaalt men op elke lijn door het vaste punt O, die de zijden eener n-zijde in de punten A_k ($k = 1, 2, \ldots n$) snijdt, een punt P naar de betrekking $OP = \Sigma OA_k$, dan is de meetkundige plaats van P een kromme C^n, die O tot $n-1$ voudig punt en de zijden der n-zijde tot asymptoten heeft".

Voor $n = 3$ liggen de drie snijpunten van C^3 met de asymptoten in een rechte. Wijl voor zulk een punt $OP = OA_k$ en dus $OA_l + OA_m = 0$ is, heeft men verder de stelling:

„Trekt men door een punt O in het vlak van driehoek $C_1C_2C_3$ drie lijnen OQ_k zoodanig, dat het door de zijden C_kC_l en C_kC_m afgesneden stuk in O wordt middendoorgedeeld, dan liggen de snijpunten van OQ_k en C_lC_m in een rechte".

II. Voor $n = 3$ wordt de stelling rechtstreeks meetkundig bewezen in een binnenkort verschijnend opstel „Metrische Eigenschaften der Curven dritter Ordnung u. s. w." van G. STINER.

(H. D. V.)

Vraagstuk LVI.

Een punt M (x, y, z) doorloopt een oppervlak $F(x, y, z) = 0$. Een ander punt N (α, β, γ) hangt met M samen door de betrekkingen

$$\alpha = \varphi(x, y, z),\ \beta = \psi(x, y, z),\ \gamma = \chi(x, y, z).$$

Te bewijzen, dat het raakvlak in N aan het door N doorloopen oppervlak voorgesteld wordt door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} 0 & X-\alpha & X-\beta & Z-\gamma \\ F'_x & \varphi'_x & \psi'_x & \chi'_x \\ F'_y & \varphi'_y & \psi'_y & \chi'_y \\ F'_z & \varphi'_z & \psi'_z & \chi'_z \end{vmatrix} = 0.$$

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, Dr. R. H. VAN DORSTEN *en* M. H. SPRUYT.

Oplossing.

Substitueeren wij in de vergelijking $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ van het door N beschreven oppervlak

$$\alpha = \phi(x, y, z) \quad , \quad \beta = \psi(x, y, z) \quad , \quad \gamma = \chi(x, y, z),$$

dan vinden wij $F(x, y, z) = 0$. Dus is

$$F(x, y, z) = f\{\phi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)\}$$

een identieke vergelijking. Nu is de vergelijking van het raakvlak aan $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ in N voorgesteld door

$$(X - \alpha) f'_\alpha + (Y - \beta) f'_\beta + (Z - \gamma) f'_\gamma = 0,$$

terwijl uit de identiteit de betrekkingen

$$F'_x = f'_\alpha \phi'_x + f'_\beta \psi'_x + f'_\gamma \chi'_x,$$
$$F'_y = f'_\alpha \phi'_y + f'_\beta \psi'_y + f'_\gamma \chi'_y,$$
$$F'_z = f'_\alpha \phi'_z + f'_\beta \psi'_z + f'_\gamma \chi'_z$$

volgen. Door eliminatie van f'_α, f'_β, f'_γ uit de laatste vier vergelijkingen vinden wij terstond de gevraagde betrekking.

Vraagstuk LVII.

Een bol met onveranderlijken straal beweegt zich zoo, dat de machten $p_1, p_2, \ldots p_n$ van de vaste punten $A_1, A_2, \ldots A_n$ de betrekking $F(p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$ bevredigen. Te bewijzen, dat de normaal aan het door den bol omhulde oppervlak door het zwaartepunt van de met de massa's

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial p_n}$$

bezwaarde punten $A_1, A_2 \ldots A_n$ gaat. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, Dr. R. H. VAN DORSTEN *en* M. H. SPRUYT.

Oplossing.

1. Is

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

de vergelijking van den bol, dan bestaat de betrekking

$$F(p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

waarin

$$p_n \equiv (x_k - a)^2 + (y_k - b)^2 + (z_k - c)^2 - r^2 \quad . \quad . \quad 3)$$

is, als x_k, y_k, z_k de coördinaten van A_k voorstellen. Nemen we a en b als onafhankelijk veranderlijken aan, dan geeft differentiatie van 1 en 2)

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)+(z-c)\dfrac{\partial c}{\partial a}=0\\ (y-b)+(z-c)\dfrac{\partial c}{\partial b}=0\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\sum\dfrac{\partial F}{\partial p_k}(x_k-a)+\dfrac{\partial c}{\partial a}\sum\dfrac{\partial F}{\partial p_k}(z_k-c)=0\\ \sum\dfrac{\partial F}{\partial p_k}(y_k-b)+\dfrac{\partial c}{\partial b}\sum\dfrac{\partial F}{\partial p_k}(z_k-c)=0\end{array}\right\}$$

en eliminatie van $\frac{\partial c}{\partial a}$ en $\frac{\partial c}{\partial b}$ dus

$$\frac{x-a}{x\sum\frac{\partial F}{\partial p_k}-\sum x_k\frac{\partial F}{\partial p_k}} = \frac{y-b}{y\sum\frac{\partial F}{\partial p_k}-\sum y_k\frac{\partial F}{\partial p_k}} =$$

$$= \frac{z-c}{z\sum\frac{\partial F}{\partial p_k}-\sum z_k\frac{\partial F}{\partial p_k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Uit 1), 2), 3) en 4) vindt men nu door eliminatie van de grootheden a, b, c, p_1, $p_2 \ldots p_n$ de vergelijking van het omhullend oppervlak.

2. Aan de vergelijkingen 4), die een rechte lijn voorstellen, wordt voldaan door het punt (x, y, z), waar de bol 1) het omhullend oppervlak aanraakt, en door het middelpunt (a, b, c) van den bol 1). Dus stellen de vergelijkingen 4) de normaal aan het omhullend oppervlak in het bedoelde raakpunt voor. Derhalve gaat deze normaal door het punt

$$x=\frac{\Sigma x^k\frac{\partial F}{\partial p_k}}{\Sigma\frac{\partial F}{\partial p_k}},\ y=\frac{\Sigma y_k\frac{\partial F}{\partial p_k}}{\Sigma\frac{\partial F}{\partial p_k'}},\ z=\frac{\Sigma z_k\frac{\partial F}{\partial p_k}}{\Sigma\frac{\partial F}{\partial p_k}},$$

d. i. door het bedoelde zwaartepunt.

Vraagstuk LXVIII.

Twee parabolen P_1 en P_2 raken elkaar driepuntig in A en snijden elkaar in B. Men vraagt te bewijzen,

a) dat het door beide parabolen begrensde deel Δ van het vlak door AB middendoorgedeeld wordt.

Verder denkt men zich A en B vast, P_1 en P_2 veranderlijk en onderstelt men, dat de assen van P_1 en P_2 steeds loodrecht op elkaar staan. Dan wenscht men bepaald te zien,

b) wanneer Δ een maximum is,

c) wat de meetkundige plaats is van de toppen en brandpunten van P_1 en P_2.

Eindelijk neemt men aan, dat P_1 vast is, A, B en P_2 veranderlijk zijn en de as van P_2 weer loodrecht staat op die van P_1. Dan vraagt men

d) de meetkundige plaats van top en brandpunt van P_2,

e) de omhullende van AB. (T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, H. DE VRIES *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANK JR.

Oplossing *van* W. MANTEL.

a. Door vier punten gaan twee parabolen. Is P_1 met de punten A en B gegeven, dan is P_2 dus bepaald. Laat men nu met elk punt E_1 (fig. 33) van P_1 een punt E_2 zoo overeenkomen, dat E_1E_2 evenwijdig is aan de raaklijn in A en door AB wordt middendoorgedeeld, dan heeft E_2 tot meetkundige plaats een parabool, die niet van P_2 verschillen kan. Dus wordt Δ door AB gehalveerd.

b. Als twee kegelsneden, die een bundel bepalen, gemeenschappelijke assenrichtingen hebben, zijn deze assenrichtingen gemeen aan alle kegelsneden des bundels. In dit geval verkeeren de kegelsneden van den bundel (P_1, P_2), als de assen der beide parabolen loodrecht op elkaar staan. Tot dien bundel behoort de vereeniging der rechte AB met de raaklijn in A; dus geven de deellijnen van den hoek A'AB deze assenrichtingen aan. Is nu D het spiegelbeeld van A ten opzichte van de as van P_1 en de raaklijn in dit punt aan P_1 dus evenwijdig aan AB, dan zal de verbindingslijn van D met het midden G van AB een middellijn van P_1 zijn en de as van deze AB dus in een vast punt C, het midden van AG, snijden. Verder is dan

$$\Delta = \tfrac{2}{3} \,.\, 2\, AB \,.\, CD \,.\, \text{Sin}\, ACD = \tfrac{1}{2}\, AB^2 \,.\, \text{Sin}\, ACD.$$

Dus is Δ een maximum als $\angle$ ACD recht is, d. i. als de assen van P_1 en P_2 met AB hoeken van 45° maken

c. Is H het snijpunt van de verlengde as met de raaklijn aan P_1 in den top T_1, dan is $KT_1 = T_1L$ en dus $T_1L = \frac{1}{2}$ LC en HA $= \frac{1}{2}$ AC. De cirkel op HC als middellijn beschreven

is dus de meetkundige plaats der beide toppen T_1 en T_2. Gemakkelijk blijkt verder, dat T_1T_2 een middellijn van dien cirkel is. En wijl de deellijn van $\angle$ HAK evenwijdig is met CK, is $\angle HAF_1 = 3 \angle ACF_1$. Derhalve beschrijft F_1 een trisectrix, die C tot dubbelpunt en H tot top heeft. Zoo als bekend is, is deze kromme een „cubique circulaire", waarvan de raaklijnen in C loodrecht op elkaar staan. Natuurlijk heeft F_2 dezelfde kromme tot meetkundige plaats en vormen de puntenparen F_1 en F_2 op haar een involutie.

d. Ten opzichte van as en topraaklijn van P_1 heeft T_2 coördinaten, die in een eenvoudig verband staan met die van A. De abscis van T_2 is driemaal, de ordinaat van P is anderhalfmaal zoo groot als die van A. Omdat A de parabool P_1 doorloopt, beschrijft T_2 dus een parabool, die met P_1 as en top gemeen heeft.

Om de meetkundige plaats van F_2 aan te geven, bewijzen wij, dat deze de omhullende is van den voerstraal AF_2. Eerstens staan AF_1 en AF_2 loodrecht op elkaar. Want

$$\angle F_1AK + \angle K'AF_2 = \angle AKF_1 + \angle F_2AK' = R.$$

Voltooit men nu den rechthoek F_1AF_2N, waarbij blijkt dat de op F_1F_2 als middellijn beschreven cirkel door de vijf punten F_1, A, F_2, C, N gaat, dan vinden we dat AN de normaal in A op P_1 is, want $\angle F_1AK = \angle AKF_1 = \angle F_1CA = \angle F_1NA$. Bij de beweging van den rechten hoek F_1AF_2 is N dus het onbestendige draaiingsmiddelpunt, waaruit volgt, dat AF_2 haar omhullende in F_2 raakt en deze dus de negatieve voetpuntskromme van P_1 met betrekking tot het brandpunt is. Omtrent deze kromme vergelijke men SALMON-FIEDLER'S *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, 2de druk, blz. 135.

e. Om de omhullende van AB te vinden merken we op, dat deze lijn van de assen T_1C en T_1H stukken afsnijdt, die — 3- en 3-maal zoo groot zijn als de overeenkomstige stukken die de raaklijn AK van de assen afsnijdt. Dus omhult AB een parabool die T_1 tot top, T_1K tot as heeft en waarvan de parameter driemaal grooter is dan die van P_1.

N.B. De oplossing van den Heer H. DE VRIES wijkt slechts in vorm van de bovenstaande af, terwijl de andere oplossingen analytisch bewerkt zijn.

Vraagstuk LXIX.

Op een kubisch oppervlak O^3 ligt een bikwadratische ruimtekromme c^4. Door deze kromme legt men een bundel kwadratische oppervlakken, waarvan elk het oppervlak O^3 nog volgens een kegelsnee snijdt. Hoeveel dezer kegelsneden raken c^4?

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL, W. MANTEL *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Het vlak α, dat de kegelsnee c^2 bevat, volgens welke een oppervlak O^2 door c^4 het kubisch oppervlak O^3 verder snijdt, heeft met O^3 nog een rechte l_α gemeen. Wijl de oppervlakken O^2 door c^4 doorloopend op elkaar volgen, kan de lijn l_α niet sprongsgewijs veranderen en moet zij dus vast zijn, tenzij O^3 een regelvlak ware. En ook in dit geval verandert, zoo als men weet, l_α niet.

Het is nu de vraag, hoeveel vlakken door l_α de kromme c^4 aanraken. Projecteert men de kromme c^4 uit een punt P van l_α op een niet door P gaand vlak, dan herleidt deze vraag zich tot die naar de klasse der projectie van c^4. Wijl c^4 twee schijnbare dubbelpunten heeft, is dit aantal en dus ook het gevraagde $4 . 3 - 2 . 2 = 8$.

Vraagstuk LXX.

Gegeven is een bundel kwadratische oppervlakken, waarvan de basiskromme is ontaard in twee kegelsneden. Van deze kegelsneden ligt c^2 in het vlak α.

a) Te bepalen de meetkundige plaats der polen van α met betrekking tot de oppervlakken des bundels.

b) Op c^2 als basis construeert men de raakkegels der oppervlakken. Te bewijzen, dat de nieuwe kegelsneden, die deze raakkegels twee aan twee gemeen hebben, in een vlakkenbundel liggen.

c) Te bewijzen, dat een willekeurig vlak de raakkegels snijdt volgens kegelsneden, die twee punten en twee raaklijnen gemeen hebben. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. CARDINAAL, W. MANTEL *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* W. MANTEL.

a) De twee kegelsneden, waarin de basiskromme ontaardt, hebben twee punten gemeen. In deze twee punten M en N worden al de oppervlakken door dezelfde vlakken μ en ν aangeraakt. Wijl M en N in α liggen, ligt de pool van α op de snijlijn l van μ en ν; deze lijn is dus de meetkundige plaats der polen van α.

b) Twee der raakkegels raken elkaar steeds in M en N. Behalve de kegelsnee c^2 in α hebben zij dus een tweede kegelsnee in een door MN gaand vlak gemeen.

c) Wijl de raakkegels de vlakken μ en ν aanraken, hebben hun doorsneden met een willekeurig vlak de snijlijnen van dit vlak met μ en ν tot gemeenschappelijke raaklijnen. Ook hebben zij twee punten gemeen, de snijpunten van dit vlak met c^2.

Vraagstuk LXXI.

Als de overeenkomstige zijden a_1, a_2, a_3 en a_1', a_2', a_3' van twee driehoeken $A_1A_2A_3$ en $A_1'A_2'A_3'$ elkaar in drie punten R_1, R_2, R_3 eener rechte r snijden, gaan de verbindingslijnen p_1, p_2, p_3 der overeenkomstige hoekpunten, zooals bekend is, door een zelfde punt P. Snijden deze lijnen p_1, p_2, p_3 de lijn r in S_1, S_2, S_3, dan zijn de drie dubbelverhoudingen $(A_iA_i'PS_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ aan elkander gelijk. Men vraagt dit te bewijzen.

(Dr. A. EECEN.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

De puntenreeksen P, A_2, A_2' en P, A_3, A_3' op p_2 en p_3 (fig. 34) zijn perspectivisch. Wijl het centrum van perspectief, het snijpunt R_1 van A_2A_3 en $A_2'A_3'$, op r ligt, zijn S_2 en S_3 overeenkomstige punten dezer perspectivische puntenreeksen. Hieruit volgt de gelijkheid der dubbelverhoudingen $PA_2A_2'S_2$ en $PA_3A_3'S_3$, enz.

Vraagstuk LXXII.

In een veranderlijk punt P eener cissoïde trekt men de raaklijn; deze snijdt de asymptoot der kromme in Q. Op het verlengde

van PQ neemt men een segment QR gelijk aan het n-voud van PQ. Men vraagt:

a) de meetkundige plaats van R,

b) een hieruit volgende eenvoudige constructie van de raaklijn aan de cissoïde,

c) den inhoud van de vlakke figuur begrensd door de symmetrie-as der cissoïde, den boog OP van de cissoïde van het keerpunt af, de rechte PR en den boog RS van de meetkundige plaats tot het snijpunt S met de symmetrie-as.

(N. C. GROTENDORST.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. R. H. VAN DORSTEN, N. C. GROTENDORST, W. MANTEL, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, H. DE VRIES, Dr. J. DE VRIES, G. VAN DE WELL *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplosing *van* T. J. ALLERSMA.

a) Stelt $2a$ den afstand voor van het keerpunt der cissoïde tot haar asymptoot en is het keerpunt O oorsprong van een rechthoekig coordinatenstelsel met een x-as loodrecht op de asymptoot, dan is $x^3 = (2a - x)y^2$ de vergelijking dezer kromme. Langs den gewonen weg vindt men nu, dat de coördinaten (x_2, y_2) van het punt Q door de betrekkingen

$$x_2 = 2a\,,\quad y_2 = 3a\sqrt{\frac{x_1}{2a - x_1}}$$

in a en de abscis x_1 van P worden uitgedrukt, zoodat voor de coordinaten (x_3, y_3) van R de waarden

$$x_3 = 2(n+1)a - nx_1\,,\quad y_3 = \{3(n+1)a - nx_1\}\sqrt{\frac{x_1}{2a - x_1}}$$

worden gevonden. Door eliminatie van x_1 verkrijgt men voor de meetkundige plaats van het punt (x_3, y_3) de vergelijking

$$\{x + (n+1)a\}^2\,\{2(n+1)a - x\} = (x - 2a)y^2.$$

Dus is de meetkundige plaats (R) van R een circulaire kubische kromme, die de x-as tot symmetrie-as, de lijn $x = 2a$ tot asymptoot en het punt $x = -(n+1)a$, $y = 0$ tot dubbelpunt heeft. Dit dubbelpunt is een knooppunt voor $-3 < n < -1$, een keerpunt voor $n = -1$ (de gegeven cissoïde) en een afgezonderd punt voor $n < -3$ en $n > -1$. Voor $n = -3$ splitst de kromme zich in de asymptoot $x = 2a$ en den cirkel $(x + a)^2 + y^2 = 9a^2$, die deze aanraakt.

b) Is (M) (fig. 35) de cirkel, die aan de onderstelling $n = -3$ beantwoordt, dan volgt uit de betrekking $R'Q = 3PQ$ onmiddellijk $BC = 2AB$. Hieruit volgt een eenvoudige constructie van de raaklijn PR′ in P aan de cissoïde. Neemt men $BC = 2AB$ en zoekt men op den cirkel (M) het met P aan verschillende zijden van de x-as gelegen punt R′, dat zich in C op de x-as projecteert, dan is R′P de begeerde lijn.

c) Is α de hoek, dien de raaklijn PR in P aan de cissoïde met de x-as maakt, en l de lengte van PR, dan stelt $\frac{1}{2}l^2 d\alpha$ de aangroeiing dI van den gevraagden inhoud I voor. Nu heeft men, als men door de substituties $x_1 = r \operatorname{Cos} \phi$, $y_1 = r \operatorname{Sin} \phi$ tot poolcoördinaten overgaat,

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{3x_1{}^2 + y_1{}^2}{2y_1\,(2a - x_1)} = \frac{3 \operatorname{Sin} \phi - 2 \operatorname{Sin}^3 \phi}{2 \operatorname{Cos}^3 \phi},$$

$$l \operatorname{Cos} \alpha = (n+1)(2a - x_1) = 2(n+1)\, a \operatorname{Cos}^2 \phi$$

en dus

$$dI = 2(n+1)^2 a^2 \operatorname{Cos}^4 \phi \cdot \frac{d\alpha}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} = 2(n+1)^2 a^2 \operatorname{Cos}^4 \phi \; d \operatorname{Tg} \alpha$$

$$= 2(n+1)^2 a^2 \operatorname{Cos}^4 \phi \; d \, \frac{3 \operatorname{Sin} \phi - 2 \operatorname{Sin}^3 \phi}{2 \operatorname{Cos} 3\phi} = 3(n+1)^2 a^2 \, d\phi.$$

Hieruit volgt $I = 3(n+1)^2 a^2 \phi$.

Aanmerkingen. I. Voor positieve n heeft de kromme sub *a*) een conchoïdale gedaante; zij heeft dan twee buigpunten. Zij is beschreven en ingedeeld door Newton *Enumeratio linearum tertii ordinis*) als soort 44 en door Plücker (*System der analytischen Geometrie*) als soort 126 van groep 28 (J. v. R.).

II. De abscis der buigpunten heeft de waarde $\frac{(n+1)(n+4)}{n+2} a$ (G.)

III. Hoewel de sub *b*) gegeven constructie aan de bedoeling van den inzender beantwoordt, is de rechtstreeksche constructie eenvoudiger. Volgens deze, die uit de betrekking $y_2 = 3a \cdot \frac{y_1}{x_1}$ voortvloeit, heeft men als P_1 het snijpunt van OP met de asymptoot voorstelt $AQ = \frac{3}{2}AP$.

IV. De inhoud van de ruimte tusschen de cissoïde en de

nieuwe kromme is gelijk aan $3(n+1)^2$ maal den inhoud van den voortbrengenden cirkel der cissoïde. (G.).

V. De uitkomst sub *c*) wordt ook verkregen door de figuur samengesteld te denken uit de deelen POB, BPRD en DRS.

Vraagstuk LXXIII.

De bestaanbare substitutie $\zeta = \dfrac{az+b}{cz+d}$, waarin $ad - bc = 1$ is, bezit twee dubbelpunten, die onbestaanbaar zijn, samenvallen of bestaanbaar zijn, naarmate $\frac{1}{4}(a+d)^2$ kleiner dan, gelijk aan of grooter dan de eenheid is. Wordt gevraagd, welke cirkels in die drie gevallen bij deze transformatie onveranderd blijven.

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. R. H. van Dorsten, Dr. W. Kapteyn, W. Mantel *en* Dr. J. de Vries.

Oplosing *van* W. Mantel.

Als de toevoeging van een accent den overgang tot het toegevoegde van een complex getal aanduidt, kan men elken cirkel door de vergelijking

$$zz' + Az + A'z' + B = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

aanwijzen. Deze gaat door de gegeven substitutie over in

$$(az+b)(az'+b) + A(az+b)(cz'+d) \\ + A'(az'+b)(cz+d) + B(cz+d)(cz'+d) = 0 \, . \, . \, 2).$$

Nu zullen 1) en 2) denzelfden cirkel voorstellen onder de voorwaarden

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + (A+A')ac + Bc^2 = \mu \\ ab + Aad + A'bc + Bcd = \mu A \\ ab + Abc + A'ad + Bcd = \mu A' \\ b^2 + (A+A')bd + Bd^2 = \mu B \end{array}\right\},$$

waarvoor we ook

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + (A+A')ac + Bc^2 = \mu \\ b^2 + (A+A')bd + Bd^2 = \mu B \\ 2ab + (A+A')(ad+bc) + 2Bcd = \mu(A+A') \\ (A-A')(ad+bc) \qquad = \mu(A-A') \end{array}\right\}$$

kunnen schrijven. Met betrekking tot de laatste dezer vier

vergelijkingen, die A, A′, B en μ bepalen, onderscheiden we nu de volgende twee gevallen

1°. A = A′ en dus bestaanbaar. We vinden dan door eliminatie van A en B uit de drie overigen voor μ de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a^2 & ac - \mu & c^2 \\ b^2 & bd - \mu & d^2 \\ ab & ad + bc - \mu & cd \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 3),$$

die zich, krachtens de voorwaarde $ad - bc = 1$, splitst in

$$\mu - 1 = 0\,, \quad \mu^2 - \mu(a^2 + d^2 + ad + bc - 1) + 1 = 0.$$

De wortel $\mu = 1$ komt in het volgende geval terug. De beide andere wortels zijn bestaanbaar als $(a + d)^2 > 4$ is en de dubbelpunten der substitutie dus op de bestaanbare as liggen. Voor de onveranderde cirkels vindt men dan de vergelijking

$$zz' + \frac{b\mu + b}{a\mu - d}(z + z') + \frac{b}{c}\,\frac{d\mu - a}{a\mu - d} = 0.$$

2°. $\mu = 1$. De drie overblijvende vergelijkingen zijn nu onderling afhankelijk. Door eliminatie van A + A′ en C vindt men nl. de derdemachtsvergelijking 3) terug, welke $\mu = 1$ tot wortel heeft. Twee dezer drie vergelijkingen leveren nu de waarden van A + A′ en van C op; de vergelijking der onveranderde cirkels is

$$zz' + \mathrm{A}z + \left(\frac{d - a}{c} - \mathrm{A}\right) z' - \frac{b}{c} = 0.$$

De cirkels van het eerste geval hebben een straal nul, die van het tweede vormen een bundel met de dubbelpunten der substitutie tot basispunten.

Aanmerking. Zoo als bekend is, vormt de lineaire transformatie $\xi = \dfrac{az + b}{cz + d}$ de uitbreiding van het begrip van twee projectivische puntenreeksen op een gemeenschappelijken drager gelegen over het complexe vlak en is zij niets anders dan de omgeslagen overeenkomst der weerkeerige voerstralen. Zijn a, b, c, d bestaanbaar, dan geschiedt het omslaan om de bestaanbare as. Steeds is het middelpunt van de overeenkomst der weerkeerige voerstralen het midden van het bestaanbare of onbestaanbare segment door de dubbelpunten begrensd. Met behulp van den cirkel, die dit segment tot middellijn heeft en

de meetkundige plaats vormt der punten die alleen door het omslaan van plaats veranderen, vindt men de verkregene uitkomsten gemakkelijk meetkundig. Men vergelijke Vraagstuk 22 van deel IV en Vraagstuk 57 van deel VI. (RED.)

Vraagstuk LXXIV.

Bewijs, dat de substitutie van het vorige vraagstuk infinitesimaal is, als de moduli van

$$a-1, \; b, \; c, \; d-1$$

oneindig klein zijn. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

Stelt men

$$a=1, \; b=0, \; c=0, \; d=1,$$

dan wordt $\xi = z$.

Stelt men daarentegen

$$a = 1+\delta t_1, \quad b=\delta t_2, \quad c=\delta t_3, \quad d=1+\delta t_4,$$

dan wordt

$$\xi = \frac{(1+\delta t_1)\,z+\delta t_2}{z\,\delta t_3+(1+\delta t_4)} = \{(1+\delta t_1)\,z+\delta t_2\}\,\{1+z\delta t_3+\delta t_4\}^{-1}$$
$$= z + z\delta t_1 + \delta t_2 - z^2\delta t_3 - z\delta t_4 + \ldots .$$

Hiermee is aangetoond, dat de substitutie infinitesimaal is, als de moduli van $a-1$, b, c, $d-1$ oneindig klein zijn.

Vraagstuk LXXV.

In de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \\ b \equiv b_1x + b_2v + b_3z + b_4 = 0 \end{array}\right\}$$

zijn a_i en b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gegeven functies van de veranderlijke λ. Gevraagd de vergelijking van het raakvlak in een punt der door beide vergelijkingen voorgestelde rechte aan het bij ver andering van λ door deze rechte voortgebrachte regelvlak.

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, Dr. W. KAPTEYN, M. H. SPRUYT *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossingen.

I. We gaan uit van den vorm

$$z - \zeta = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 (x - \xi) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 (y - \eta)$$

van de vergelijking van het raakvlak in het punt (ξ, η, ζ) en berekenen de partieele differentiaalquotienten.

Denken we ons in de vergelijkingen $a = 0$, $b = 0$ ook λ veranderlijk, dan geeft partieele differentiatie naar u ($u = x$, $u = y$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}\right) + a_1 + a_3 \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}\right) + b_1 + b_3 \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{aligned}\right\} (u = x, \quad u = y).$$

Dus vinden we

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a_1 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_1 \frac{\partial a}{\partial \lambda}}{a_3 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_3 \frac{\partial a}{\partial \lambda}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{a_2 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_2 \frac{\partial a}{\partial \lambda}}{a_3 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_3 \frac{\partial a}{\partial \lambda}}$$

en wordt de vergelijking van het raakvlak

$$\left(a_1 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_1 \frac{\partial a}{\partial \lambda}\right)(x - \xi) + \left(a_2 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_2 \frac{\partial a}{\partial \lambda}\right)(y - \eta) + \left(a_3 \frac{\partial b}{\partial \lambda} - b_3 \frac{\partial a}{\partial \lambda}\right)(z - \zeta) = 0,$$

of

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} a - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} b = 0,$$

waarbij onder $\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$ en $\frac{\partial \beta}{\partial \lambda}$ het resultaat van de invoeging van ξ, η, ζ voor x, y, z in $\frac{\partial a}{\partial \lambda}$ en $\frac{\partial b}{\partial \lambda}$ te verstaan is. (A. G. W.).

II. Zijn ξ, η, ζ de coördinaten van een punt P der gegeven lijn l en ($a'_x = 0$, $b'_x = 0$), ($a''_x = 0$, $b''_x = 0$) twee opvolgende beschrijvende lijnen l' en l'', zoodat

$$\left.\begin{aligned} a'_i &= a_i + da_i \;, \quad & b'_i &= b_i + db_i \\ a''_i &= a_i + 2da_i \,, \quad & b''_i &= b_i + 2db_i \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3, 4)$$

is, dan zullen de vlakken Pl' en Pl'' door de vergelijkingen

$$b'_\xi a'_x - a'_\xi b'_x = 0\,, \quad b'_\xi a''_x - a'_\xi b''_x$$

voorgesteld zijn. Hiervoor kan men ook

$$b'_\xi a_x - a'_\xi b_x + b'_\xi da_x - a'_\xi db_x = 0\,, \quad b'_\xi a_x - a'_\xi b_x + 2(b'_\xi da_x - a'_\xi db_x) = 0\,,$$

of

$$b'_\xi a_x - a'_\xi b_x = 0\,, \; b'_\xi da_x - a'_\xi db_x = 0$$

schrijven. Dus ligt de tweede hoofdraaklijn in het vlak $b'_\xi a_x - a'_\xi b_x = 0$ en is dit, wijl het ook de eerste hoofdraaklijn l bevat, het verlangde raakvlak. (W. K.)

VOORBEELD. De lijn $a_x = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \lambda z = 0$, $b_x = \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} - \frac{1}{\lambda} = 0$ brengt een hyperbolische paraboloïde voort. Voor dit geval is $a'_\xi = -\xi d\lambda$ en $b'_\xi = \frac{1}{\lambda^2} d\lambda$.

Dus is de vergelijking van het raakvlak

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \lambda z\right) + \lambda^2 \zeta \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Vraagstuk LXXVI.

Men vraagt u te bepalen uit de vergelijking

$$\wp(u - w) + \wp(u - w') + \wp(u - w'') = 3\,\wp(u).$$

(J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

We beschouwen de meer symmetrieke uitdrukking

$$\wp(u) + \wp(u - \omega) + \wp(u - \omega') + \wp(u - \omega'').$$

Deze stelt een evene functie met de perioden ω en ω' voor, die slechts één tweevoudige pool heeft, het punt $u = 0$ in het parallelogram ω, ω'. Daaruit volgt onmiddellijk, dat deze functie gelijk moet zijn aan $C\wp(2u)$. Inderdaad kan men deze gevolgtrekking nog bevestigen door $\wp(2u)$ op de gebruikelijke wijs naar de polen te ontwikkelen. Stelt men

$$C\wp(2u) = \wp(u) + \wp(u - \omega) + \wp(u - \omega') + \wp(u - \omega''),$$

dan vindt men voor Lim. $u=0$, $C=4$. De gegeven vergelijking gaat dus over in

$$\wp(2u)-\wp(u)=0,$$

of

$$2u=-u+2m\omega+2m'\omega', \quad u=\frac{2m\omega+2m\omega'}{3}.$$

Wil men behalve u ook $\wp(u)$ vinden, dan heeft men de vergelijking

$$-3\,\wp^4(u)+\tfrac{3}{2}\,g_2\,\wp^2(u)+3\,g_3\,\wp(u)+\tfrac{1}{16}\,g_2^{\,2}=0$$

op te lossen. Onderstelt men e_1, e_2, e_3 bestaanbaar en den discriminant der functies positief, dan heeft deze vergelijking twee bestaanbare wortels, die voldoen aan de voorwaarden

$$e_1<p\left(\frac{2\omega}{3}\right)<+\infty, \quad e_3>p\left(\frac{2\omega'}{3}\right)>-\infty,$$

en twee toegevoegd complexe wortels, $p\left(\frac{2\omega''}{3}\right)$ met negatief imaginair gedeelte, $p\left(\frac{2(\omega-\omega')}{3}\right)$ met positief imaginair gedeelte.

Vraagstuk LXXVII.

Bij welke kromme lijnen is de macht van den oorsprong der rechthoekige coördinaten met betrekking tot den kromtecirkel in eenig punt evenredig met het kwadraat van de abscis van dat punt.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* Dr. R. H. VAN DORSTEN, W. MANTEL *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. We stellen de raaklijn aan de gezochte kromme voor door de vergelijking

$$x\,\mathrm{Cos}\,\alpha+y\,\mathrm{Sin}\,\alpha=u \quad \ldots\ldots \quad 1),$$

waarin u een onbekende functie van α aangeeft.

Natuurlijk wordt de volgende raaklijn dan door

$$x\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+d\alpha)+y\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+d\alpha)=u+du$$

voorgesteld en is

$$-x\,\mathrm{Sin}\,\alpha+y\,\mathrm{Cos}\,\alpha=u' \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

dus een lijn door het raakpunt van 1) en omdat zij loodrecht

op 1) staat de normaal in dit punt. Op dezelfde wijs blijkt

$$-x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha = u'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

de vergelijking van de normaal der ontwondene te zijn.

Hieruit vindt men

a) de coördinaten $u \operatorname{Cos} \alpha - u' \operatorname{Sin} \alpha$, $u \operatorname{Sin} \alpha + u' \operatorname{Cos} \alpha$ van het raakpunt P;

b) den afstand $\sqrt{u'^2 + u''^2}$ van den oorsprong O tot P;

c) den kromtestraal $u + u'$ in P;

d) de macht $u'^2 - 2uu'' - u^2$ van O met betrekking tot den kromtecirkel in P.

Dus komt de bepaling der gevraagde kromme neer op het oplossen van de differentiaalvergelijking

$$u'^2 - 2uu'' - u^2 = n\,(u \operatorname{Cos} \alpha - u' \operatorname{Sin} \alpha)^2.$$

2. Door de substitutie $u' = u \operatorname{Tg}(\phi - \alpha)$, waarin de nieuwe onbekende ϕ den hoek tusschen voerstraal en abscissenas aangeeft, gaat de differentiaalvergelijking over in

$$2\frac{d\phi}{d\alpha} - 1 + n \operatorname{Cos}^2 \phi = 0.$$

Zij eischt verschillende substituties, naarmate n grooter of kleiner dan de eenheid is.

Voor $n < 1$ vindt men o. a.

$$\text{Nep. log}\ \frac{u}{u_0} = \int \frac{\sqrt{1-n}\operatorname{Tg}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-n}\,(\alpha - \alpha_0)\right] - \operatorname{Tg}\alpha}{1 + \sqrt{1-n}\operatorname{Tg}\alpha \operatorname{Tg}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-n}\,(\alpha - \alpha_0)\right]}\,d\alpha,$$

welke uitkomst eenvoudig wordt voor $n = -3$, als men $\alpha_0 = 0$ of $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ aanneemt; in het eerste geval is de kromme een ellips, in het andere is zij een parabool.

Vraagstuk LXXVIII.

Als r_1 r' en p bij elkaar behoorende waarden van den kromtestraal eener vlakke kromme, den kromtestraal der ontwondene en den afstand van het krommingsmiddelpunt tot een vast punt O aanduiden, is

$$p^2\left[1 - \left(\frac{dp}{dr}\right)^2\right] = r'^2\left[1 - \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 - p\frac{d^2p}{dr^2}\right]^2.$$

Men vraagt dit te bewijzen. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* Dr. R. H. VAN DORSTEN, W. MANTEL, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.

Oplossing *van* Dr. R. H. VAN DORSTEN.

We nemen O als oorsprong aan van een rechthoekig coördinatenstelsel en stellen door x en y de coördinaten van het krommingsmiddelpunt voor. Wijl voor de ontwondene $ds = dr$ is, heeft men

$$x^2 + y^2 = p^2, \quad x\frac{dx}{dr} + y\frac{dy}{dr} = p\frac{dp}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

en dus in verband met de betrekking

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

ook

$$p^2\left[1 - \left(\frac{dp}{dr}\right)^2\right] = \left(x\frac{dy}{dr} - y\frac{dx}{dr}\right)^2.$$

Met behulp van de vergelijking

$$\frac{dx}{dr}\,\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{dy}{dr}\,\frac{d^2y}{dr^2} = 0,$$

die door differentieeren van 2) ontstaat, gaat dit over in

$$p^2\left[1 - \left(\frac{dp}{dr}\right)^2\right] = \left(x\frac{d^2x}{dr^2} + y\frac{d^2y}{dr}\right)^2 \left(\frac{\frac{dx}{dr}}{\frac{d^2y}{dr^2}}\right)^2 \quad . \quad . \quad 3).$$

Differentiatie der tweede vergelijking 1) geeft in verband met 2) nog

$$x\frac{d^2x}{dr^2} + y\frac{d^2y}{dr^2} = -\left[1 - \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 - p\frac{d^2p}{dr^2}\right]$$

en volgens een bekende formule is

$$r' = \frac{\frac{dx}{dr}}{\frac{d^2y}{dr^2}}.$$

Door invoeging dezer waarden in 3) vindt men de verlangde uitkomst.

Oplossing *van* W. MANTEL.

In de notatie van het vorige vraagstuk is

$$r = u + u'', \quad r' = u' + u'', \quad p^2 = u'^2 + u''^2.$$

Door differentiatie van de laatste vergelijking vindt men

$$pp' = u''r', \quad p'^2 + pp'' + u'''r' + u''r''.$$

Men heeft dus achtereenvolgens

$$u'' = \frac{pp'}{r'}, \quad u''' = \frac{p'^2 + pp''}{r'} - \frac{pp'r''}{r'^2}$$

$$u' = r' - \frac{p'^2 + pp''}{r'} + \frac{pp'r''}{r'^2}$$

en vindt door overbrenging in $p^2 = u'^2 + u''^2$

$$p^2 = r'^2 \left\{ 1 - \frac{p'^2}{r'^2} - \frac{p(p''r' - p'r''')}{r'^3} \right\}^3 + \frac{p^2p'^2}{r'^2}.$$

Wordt p als een functie van r aangemerkt, dan is

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p'}{r'}, \quad \frac{d^2p}{dr^2} = \frac{p''r' - p'r''}{r'^3};$$

door invoeging dezer waarden gaat de laatste uitkomst in de voorgestelde vergelijking over.

Aanmerking. Voor $r = u + u''$ kan men ook $-r = u + u''$ in de plaats zetten; dit geeft geen verandering in de uitkomst.

Vraagstuk LXXIX.

Een lichaam draait om een vast punt P. Gevraagd de meetkundige plaats der punten, die alleen centripetale versnelling hebben, en die der punten, welke banen beschrijven met een door P gaand kromtevlak. (W. Mantel.)

Opgelost *door* Dr. R. H. van Dorsten, W. Mantel en P. de Carpentier Wildervanck Jr.

Oplossing *van* W. Mantel.

1. We duiden door ρ den vector uit het vaste punt P naar een willekeurig punt Q van het lichaam, door $v = \frac{d\rho}{dt}$ de snelheid van Q, door $\frac{dv}{dt}$ de versnelling van Q aan en vinden dan, dat Q tot de eerste meetkundige plaats behoort als v en $\frac{dv}{dt}$ recht-

hoekig op elkaar staan; in quaternion-notatie wordt dit uitgedrukt door de vergelijking

$$S v \frac{dv}{dt} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1).$$

Het is bekend, dat de snelheid van elk punt Q even groot is alsof het lichaam met een hoeksnelheid ω om een zekere as draaide; deze ω is ook als vector op de oogenblikkelijke as van wenteling uit te zetten. Voor de snelheid schrijft men dan

$$v = V\omega\rho \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2).$$

Door naar den tijd te differentieeren volgt hieruit

$$\frac{dv}{dt} = V\frac{d\omega}{dt}\rho + V\omega\frac{d\rho}{dt},$$

of

$$\frac{dv}{dt} = V\omega'\rho + \omega V\omega\rho \quad \ldots \ldots \quad 3).$$

Hierin is ω' geschreven voor $\frac{d\omega}{dt}$ en $\frac{d\rho}{dt}$ of v vervangen door haar waarde uit 2); in den laatsten term kon tevens de eerste V als overtollig worden weggelaten.

Uit 1), 2), 3) volgt voor de vergelijking der meetkundige plaats

$$SV\omega\rho\,(V\omega'\rho + \omega V\omega\rho) = 0\,,$$

of

$$SV\omega\rho V\omega'\rho = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4).$$

Deze meetkundige plaats is een orthogonale kwadratische kegel met P tot top; zij is op te vatten als de meetkundige plaats van de doorsnee van twee vlakken, die door de vectoren ω en ω' loodrecht op elkaar kunnen worden aangebracht.

2. Het kromtevlak van Q wordt bepaald door de richtingen van snelheid en versnelling. Wijl het den voerstraal PQ bevatten moet, geldt de voorwaarde

$$S\rho v\frac{dv}{dt} = 0$$

of, met invoering van de waarden van v en $\frac{dv}{dt}$, door

$$S\rho V\omega\rho\,(V\omega'\rho + \omega V\omega\rho) = 0 \quad \ldots \ldots \quad 5).$$

De meetkundige plaats van Q is dus een kubisch kegelvlak met P tot top.

Onder de herleidingen, waarvoor 5) vatbaar is, teekenen we de volgende aan. Voor den eersten term schrijven we $S\rho V \,.\, V\omega\rho V\omega'\rho$. Hierop passen we de formule

$$V \,.\, V\alpha\beta V\gamma\delta = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta$$

toe, waardoor hij in $S \,.\, \rho(\omega S \,.\, \rho\omega'\rho - \rho S\omega\omega'\rho)$ of $-\rho^2 S\omega\omega'\rho$ overgaat. In den tweeden term schrijven wij $-V\omega\rho \,.\, \omega$ voor $\omega V\omega\rho$, waardoor de scalar-factor $(V\omega\rho)^2$ te voorschijn komt en de term den vorm $S\rho\omega(V\omega\rho)^2$ aanneemt. Dus wordt de vergelijking van het kegelvlak

$$\rho^2 S\omega\omega'\rho + S\rho\omega(V\omega\rho)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6).$$

Hieruit volgt, dat het vlak door ω en ω' (vergelijking $S\omega\omega'\rho = 0$) den kegel aanraakt volgens de oogenblikkelijke as van wenteling ($V\omega\rho = 0$) en snijdt volgens een loodlijn B op die as.

Vervangt men in 6) den vorm $(V\omega\rho)^2$ door $(S\omega\rho)^2 - \omega^2\rho^2$, dan vindt men

$$\rho^2(S\omega\omega'\rho - \omega^2 S\omega\rho) + (S\omega\rho)^3 = 0,$$

of

$$\rho^2 S\alpha\rho + (S\omega\rho)^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7),$$

waarin $\alpha = V(\omega\omega' - \omega^3)$ een standvastige vector is in het vlak door ω loodrecht op $\omega\omega'$. Uit deze vergelijking volgt, dat B een buigribbe is.

Als merkwaardige doorsneden zijn die op te teekenen welke worden ingesneden door bollen door P met ω tot middellijn. De vergelijking van zulk een bol is $\rho^2 = aS\omega\rho$. De doorsneden zijn krommen van den vierden graad, die op het symmetrievlak $\alpha\omega'$ een parabool tot projectie hebben. Verder snijdt elke omwentelingskegel met ω tot as het kegelvlak volgens twee lijnen, die met B in een vlak liggen.

Aanmerking. I. De oplossing van dit vraagstuk komt o. a. voor in Dr. W. Schell's *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, Band I, Theil II, Cap. XIV. Is P tot oorsprong, ω tot z-as en het vlak $\omega\omega'$ tot xz-vlak aangenomen, terwijl ψ de wisselsnelheid der oogenblikkelijke as van wenteling aanduidt, dan zijn

$$\omega'(x^2 + y^2) - \omega\psi xz = 0,$$

$$\psi y(x^2 + y^2 + z^2) - \omega(x^2 + y^2)z = 0$$

de vergelijkingen der beide kegelvlakken. (M. H. S.)

II. Wijl de oplossing van het vraagstuk in Schell te vinden is, plaatsen wij alleen de quaternionen-oplossing van den Heer Mantel. (Red.)

Vraagstuk LXXX.

Met betrekking tot een gegeven puntkwadrupel $f = a_x^4$ heeft het willekeurig aangenomen punt A het punt B tot poolpunt. Men vraagt den covariant van f, die A zoo bepaalt, dat de beide kwadratische poolstelsels van A en B elkaar harmonisch scheiden, in den vorm f en zijn bekende invarianten en covarianten uit te drukken. (Dr. P. MOLENBROEK.)

Opgelost *door* Dr. P. MOLENBROEK.

Oplossing.

Stelt men f symbolisch door $a_x^4 = b_x^4 = c_x^4$ voor en duidt men A en B door (y_1, y_2), (z_1, z_2) aan, dan bestaat hiertusschen de betrekking

$$a_y^3 a_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Opdat de beide kwadratische poolstelsels

$$a_x^2 a_y^2 = 0 \quad , \quad a_x^2 a_z^2 = 0$$

een harmonische groep vormen, moet de betrekking

$$(bc)^2 \, b_y^2 c_z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

(CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorl. über Geom.* I. p. 215) bestaan. Uit 1) en 2) heeft men nu z te elimineeren, hetgeen voert tot

$$(bc)^2 (ac) (dc) \, b_y^2 a_y^3 d_y^3 = 0.$$

Het eerste lid dezer vergelijking is de gezochte covariant C. Volgens een bekende identiteit (l. c., p. 193) is

$$2 (ac) (dc) \, a_y d_y = a_y^2 (cd)^2 + d_y^2 (ac)^2 - c_y^2 (ad)^2.$$

Hierdoor wordt nu

$$2C = 2f (ac)^2 (cd)^2 \, a_y^2 d_y^2 - (bc)^2 (ad)^2 \, a_y^2 b_y^2 c_y^2 d_y^2.$$

De laatste term dezer vergelijking is eenvoudig het vierkant van de HESSE'sche covariant H. Verheft men de vorige identiteit in de tweede macht en neemt men in aanmerking, dat a, b, c, d gelijke beteekenis hebben, dan wordt

$$2 (ac)^2 (cd)^2 \, a_y^2 d_y^2 = f (cd)^4 = 2fS$$

(l. c., p. 229). Men vindt dus ten slotte

$$2C = 4f^2 S - H^2,$$

$$= (2f\sqrt{S} + H)(2f\sqrt{S} - H).$$

De punten A blijken dus twee groepen te zijn van de bekende involutie $kf + lH = 0$; deze vormen met f en H de dubbelverhouding -1.

Vraagstuk LXXXI.

Twee omwentelingskegels met ongelijke tophoeken staan op een horizontaal vlak. Men beschouwt nu het scheeve oppervlak, gevormd door de horizontale lijnen, die de beide kegels aanraken. Gevraagd de dubbelkromme van het oppervlak.

(Dr. P. H. Schoute.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, Dr. P. H. Schoute *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. P. H. Schoute.

Zijn p en q de grondcirkels der kegels, α en β hun halve tophoeken en is $2a$ de afstand der assen, dan kunnen (fig. 36)

$$(x-a)^2+y^2=(p-z\,\mathrm{Tg}\,\alpha)^2,\quad (x+a)^2+y^2=(q-z\,\mathrm{Tg}\,\beta)^2$$

de cirkels van doorsnee (P′) en (Q′) met het vlak op een afstand z evenwijdig aan het horizontale vlak voorstellen. De dubbelelementen van het bedoelde scheeve oppervlak zijn dan van vierderlei aard.

1. We bepalen eerst de meetkundige plaats van in- en uitwendig gelijkvormigheidspunt I en U der beide cirkels (P′) en (Q′), waarvan de x bepaald is door de voorwaarden

$$\frac{x-a}{x+a}=-\frac{p-z\,\mathrm{Tg}\,\alpha}{q-z\,\mathrm{Tg}\,\beta},\quad \frac{x-a}{x+a}=\frac{p-z\,\mathrm{Tg}\,\alpha}{q-z\,\mathrm{Tg}\,\beta}.$$

Denkt men zich z veranderlijk, dan stellen deze vergelijkingen twee in het vlak ZOX gelegen gelijkzijdige hyperbolen voor, die gemakkelijk geconstrueerd worden. Behalve de oneindig verre punten van x- en z-as hebben zij de beide kegeltoppen met elkaar gemeen.

2. Een tweede gedeelte van de dubbelkromme wordt gevormd door de meetkundige plaats van de overige snijpunten R, S, R′, S′ der gemeenschappelijke raaklijnen van (P′) en (Q′). Gemakkelijk blijkt, dat deze meetkundige plaats ligt op den rechten cirkelvormigen cylinder $x^2+y^2=a^2$. Wijl P′R en Q′R de deellijnen zijn van de supplementshoeken IRS en IRU, is R nl. een punt van den op P′Q′ als middellijn beschreven cirkel, enz. En de projectie van de meetkundige plaats op het zx-vlak is een door de kegeltoppen en het oneindig verre punt der x-as gaande kubische kromme. Want men

vindt voor de beide paren van (in- en uitwendige) raaklijnen de vergelijkingen

$$y^2(4a^2 - M^2) - (xM - aN)^2 = 0,\quad y^2(4a^2 - N^2) - (xN - aM)^2 = 0,$$

als men ter verkorting de notatie

$$M = (p - z\,\mathrm{Tg}\,\alpha) - (q - z\,\mathrm{Tg}\,\beta),\quad N = (p - z\,\mathrm{Tg}\,\alpha) + (q - z\,\mathrm{Tg}\,\beta)$$

invoert; zoodat de projectie op het zx-vlak verkregen door eliminatie van y de vergelijking

$$2a(x^2 - a^2) + x\,[(p - z\,\mathrm{Tg}\,\alpha)^2 - (q - z\,\mathrm{Tg}\,\beta)^2] + \\ + a\,[(p - z\,\mathrm{Tg}\,\alpha)^2 + (q - z\,\mathrm{Tg}\,\beta)^2] = 0$$

heeft, enz. Derhalve is de meetkundige plaats van de punten R, S, R′, S′ een ruimtekromme van den zesden graad.

3. Verder behoort de lijn gemeen aan alle horizontale vlakken tot de dubbelelementen. De richtingscoëfficiënten der vier in een zelfde vlak $Z = z$ gelegen beschrijvende lijnen zijn nl. $\pm \dfrac{(p - z\,\mathrm{Tg}\,\alpha) \pm (q - z\,\mathrm{Tg}\,\beta)}{2a}$, zoodat de voorwaarde, dat de richtingscoëfficiënt μ eener beschrijvende lijn een bepaalde waarde heeft, vier oplossingen heeft. Anders gezegd, door elk punt der bedoelde lijn gaan vier beschrijvende lijnen. Dus is de lijn gemeen aan alle horizontale vlakken een viervoudige lijn van het oppervlak.

4. Eindelijk moeten wij nog wijzen op beschrijvende lijnen die dubbel tellen. Zij komen ten getale van vier voor en gaan twee aan twee door de kegeltoppen.

Aanmerking. I. Wijl de lijn gemeen aan alle horizontale vlakken viervoudige lijn is van het oppervlak en in elk horizontaal vlak vier beschrijvende lijnen liggen, is het scheeve oppervlak van den achtsten graad (J. d. V.)

II. Voor het geval $\alpha = \beta$ vereenvoudigt zich het vraagstuk en gaat o.a. een der gelijkzijdige hyperbolen in een rechte lijn over.

Vraagstuk LXXXII.

Te onderzoeken, of het mogelijk is aan de coëfficiënten a en b der vergelijking

$$u^8 + 28au^6 + 70bu^4 + 28xu^2 + 8yu + z = 0$$

zoodanige waarden te geven, dat er waarden x, y, z te vinden

zijn, waarvoor elk der vijf gevallen (acht, zes, vier, twee of nul bestaanbare wortels) zich kunnen voordoen. (P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

Als de vergelijking

$$u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n = 0 \dots 1)$$

louter positieve wortels heeft, kan men x, y, z steeds zoo kiezen, dat de vergelijking

$$u^{2n} + A_1 u^{2n-2} + A_2^{2n-4} + \dots + A_{n-2} u^4 + xu^2 + yu + z = 0 \, .\, . \, 2)$$

een willekeurig te geven aantal paren onbestaanbare wortels heeft. Om dit te bewijzen merken we eerst op, dat er nul onbestaanbare wortels zijn, als men $x = A_{n-1}$, $y = 0$, $z = A_n$ stelt. Vervolgens toonen wij de mogelijkheid van het geval van n paren onbestaanbare wortels aan, door op te merken, dat de wortels de abscissen zijn van de snijpunten der kromme lijnen

$$v = u^{2n} + A_1 u^{2n-2} + A_2 u^{2n-4} + \dots + A_{n-2} u^4 \dots 3),$$

$$-v = xu^2 + yu + z \quad \dots\dots\dots\dots 4),$$

waarbij door u en v abscis en ordinaat zijn aangewezen. Nu is de kromme 3) een parabolische kromme met naar boven gerichte oneindige takken en is er dus een lijn evenwijdig aan de u-as aan te wijzen, waar beneden geen bestaanbaar punt der kromme ligt; onder deze lijn kan een parabool 4) geplaatst worden. Wijl alle snijpunten dan noodzakelijk onbestaanbaar zijn, zijn de abscissen dit dan ook (want het geval van onbestaanbare snijpunten met bestaanbare abscis is blijkens den vorm der vergelijkingen uitgesloten).

Van het geval van $2n$ bestaanbare wortels gaat men tot dat van $2n$ onbestaanbare wortels over door x, y, z vloeiend te veranderen. Hierbij beweegt en vervormt de parabool 2) zich op vloeiende wijze zoo, dat zij haar snijpunten met 1) bij paren verliest. Want het geval, dat er twee paren zouden verdwijnen op hetzelfde oogenblik kan, wijl men over meer dan een nl. over drie parameters beschikt, klaarblijkelijk vermeden worden.

AANMERKING. In geval de coëfficiënten A_1, $A_2 \dots A_{n-2}$ van de vergelijking 2) ontleend zijn aan een vergelijking 1)

met louter positieve wortels, zal de eliminatie van u uit de vergelijking 2) en haar afgeleide de vergelijking van een ontwikkelbaar oppervlak doen kennen, dat de ruimte verdeelt in $n+1$ deelen, beantwoordende aan $0, 1, 2, \ldots n$ paren van bestaanbare wortels (vergelijk het *Zittingsverslag* der Vergadering van 27 Mei 1893 van de Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam). (RED.)

Vraagstuk LXXXIII.

Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de basis BC, de hoogtelijn AD en de lijn AE, die den tophoek A middendoordeelt. (J. W. TESCH.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, Dr. R. H. VAN DORSTEN, F. F. LEUPEN, W. MANTEL, M. H. SPRUYT, J. J. STOEL, J. W. TESCH, H. DE VRIES, G. J. VAN DE WELL *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossing *van* F. F. LEUPEN *en* J. J. STOEL.

Zij a de gegeven basis, h de hoogte en m de deellijn van den tophoek. Construeer dan een rechthoekigen driehoek AEF (fig. 37) met $AE = m$ tot rechthoekszijde en $AD = h$ tot hoogtelijn op de schuine zijde, dan is het midden G van EF het middelpunt en GA de straal van een cirkel, die den omgeschreven cirkel van den gevraagden driehoek rechthoekig snijdt. Richten wij dus in A op AG eene loodlijn $AH = a$ op, beschrijven we op die lijn als middellijn een cirkel, trekken we in dien cirkel de middellijn IK, die door G gaat, en maken we $GB = GI$ en $GC = GK$, dan is $\triangle$ ABC de gevraagde driehoek.

AANMERKING. Het vraagstuk is onmiddellijk terug te brengen tot het geval, dat gegeven zijn a, h en het verschil $C - B$ der hoeken aan de basis. Hiervan komen verschillende oplossingen voor in

J. PETERSEN's *Methoden und Theorien*, blz. 61,

E. R. MÜLLER's *Constructionsaufgaben* (KLEYER's *Encyclopädie*), vraagstuk 828 op blz. 110,

BROCKMAN's *Materialien zu Dreieckskonstruktionen*, no. 23, blz. 28.

Deze zullen echter waarschijnlijk niet eenvoudiger zijn dan de bovenstaande.

Vraagstuk LXXXIV.

Een vlakke kubische kromme is bepaald door drie paren van toegevoegde punten, die tot hetzelfde MACLAURIN'sche stelsel behooren. Men vraagt deze kromme te construeeren, als alle drie puntenparen toegevoegd imaginair zijn. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES.

Oplossing.

Zijn (A, A'), (B, B'), (C, C') de drie gegeven paren, dan zijn

$$\left.\begin{array}{l}(BC, B'C') \equiv A_1 \\ (BC', B'C) \equiv A_1'\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}(CA, C'A') \equiv B_1 \\ (CA', C'A) \equiv B_1'\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}(AB, A'B') \equiv C_1 \\ (AB, A'B') \equiv C_1'\end{array}\right\}$$

drie nieuwe paren van hetzelfde stelsel. Zijn nu de drie oorspronkelijk gegeven paren toegevoegd imaginair en dus bepaald als de dubbelpunten van drie elliptische involuties op drie bestaanbare lijnen a, b, c, dan zijn de paren (A_1, A_1'), (B_1, B_1'), (C_1, C_1') toch bestaanbaar en gemakkelijk te construeeren. Omtrent deze constructie vergelijke men VON STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, erstes Heft § 7, N°. 118 of *Verslagen en mededeelingen*, 2de reeks, deel 13, blz. 136.

Hiermee is de vraag teruggebracht tot het construeeren eener vlakke kubische kromme, van welke drie bestaanbare paren van toegevoegde punten gegeven zijn. Verder kan men SCHRÖTER's leerboek „*Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung*" raadplegen.

Vraagstuk LXXXV.

Men vraagt de meetkundige plaats der punten, waarvoor de som van de kwadraten der afstanden tot de hoekpunten van een gegeven viervlak standvastig is. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, F. F. LEUPEN, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, J. J. STOEL, M. H. SPRUYT *en* G. J. VAN DE WELL.

Oplossingen.

I. Is O het zwaartepunt van het viervlak ABCD en P een punt der meetkundige plaats, zoo heeft men, volgens een bekende eigenschap de betrekking

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 4OP^2.$$

Nu is, volgens het vraagstuk

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \text{standvastig} = a^2,$$
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \text{bekend} = b^2;$$

dus

$$OP = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

De meetkundige plaats is dus een bol, welks middelpunt samenvalt met het zwaartepunt van het viervlak, enz.

(G. J. v. d. W.)

II. Stelt men de coördinaten van de hoekpunten door (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) voor, dan is de vergelijking van de meetkundige plaats

$$\sum_1^4 \{(X - x_1)^2 + (Y - y_1) + (Z - z_1)^2\} = C^2$$

of

$$4X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 - 2X\sum_1^4 x_1 - 2Y\sum_1^4 y_1 - 2Z\sum_1^4 z_1 = C^2.$$

Stelt men $\sum_1^4 x_1 = 0$, $\sum_1^4 y_1 = 0$, $\sum_1^4 z_1 = 0$ en neemt men dus den oorsprong in het zwaartepunt van het viervlak aan, dan gaat de vergelijking over in

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = C_1^2.$$

De meetkundige plaats is dus een bol met het zwaartepunt van het viervlak als middelpunt. (A. G. W.)

Vraagstuk LXXXVI.

Op de zijden a, b, c van een driehoek ABC zijn drie projectieve puntenreeksen gegeven. Als P, Q, R overeenkomstige punten dier reeksen zijn, vraagt men het stelsel der kegelsneden, die a en b in P en Q aanraken en door R gaan, te onderzoeken.

(J. Neuberg.)

Opgelost *door* W. Bouwman *en* J. Neuberg.

Oplossing *van* W. Bouwman.

1. We maken gebruik van driehoekscoördinaten met ABC tot assendriehoek en stellen P, Q, R voor door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y + \lambda z &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x + \mu z &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} z &= 0 \\ x + \nu y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Het projectief verband bepalen we door de vergelijkingen

$$p\lambda\mu + q\lambda + r\mu + s = 0\,,\ \ p'\lambda\nu + q'\lambda + r'\nu + s' = 0 \ .\ .\ .\ 1)$$

Stelt $(a_1x + a_2y + a_3z)^{(2)} = 0$ de kegelsnee voor, die a en b in P en Q aanraakt en door R gaat, dan gelden de voorwaarden

$$\lambda = \frac{a_{23}}{a_{22}} = \frac{a_{33}}{a_{23}}\,,\ \ \mu = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{a_{33}}{a_{13}}\,,\ \ a_{11}\nu^2 - 2a_{12}\nu + a_{22} = 0.$$

Onder deze voorwaarden wordt de vergelijking der kegelsnee

$$\lambda^2\nu x^2 + \mu^2\nu y^2 + \lambda^2\mu^2\nu z^2 + 2\lambda\mu^2\nu yz + 2\lambda^2\mu\nu zx + (\lambda^2\nu^2 + \mu^2)xy = 0\,.\,.3).$$

Dus geeft eliminatie van μ en ν tusschen deze vergelijking en de beide verwantschapsvergelijkingen 1) een vergelijking waarin de parameter λ tot den zesden graad opklimt; anders gezegd, door een willekeurig punt (x_1, y_1, z_1) gaan *zes* der kegelsneden.

2. Ten einde na te gaan hoeveel der kegelsneden de willekeurig aangenomen rechte $lx + my + nz = 0$ raken, stellen we in 3) voor nz de waarde $-(lx + my)$ in de plaats. Hierdoor vinden we na eenige herleiding

$$(\mu - \lambda\nu)^2 \{4\lambda\mu\nu\,(l\mu - n)\,(m\lambda - n) + n^2(\mu - \lambda\nu)^2\} = 0.$$

Aan deze voorwaarde is op twee wijzen te voldoen.

Eerstens door $\mu - \lambda\nu = 0$ te stellen, wat een voorwaarde is onafhankelijk van de aangenomen rechte $lx + my + nz = 0$ en dus op kegelsneden slaan moet, die alle mogelijke rechten aanraken. Werkelijk is $\mu - \lambda\nu = 0$ de voorwaarde, die uitdrukt, dat P, Q, R op een rechte liggen. Dat de factor $\mu - \lambda\nu$ in het vierkant voorkomt, drukt uit, dat deze oneigenlijke kegelsneden dubbele oplossingen vormen, wat dan hiermee in verband zal staan, dat ze tweemaal door R gaan.

Ten tweede door $4\lambda\mu\nu\,(l\mu - n)\,(m\lambda - n) + n^2\,(\mu - \lambda\nu)^2 = 0$ te stellen. Door eliminatie van μ en ν uit deze vergelijking en de beide vergelijkingen 1) vinden we weer een vergelijking, die in λ van den zesden graad is. Aan elke rechte raken dus *zes* eigenlijke kegelsneden.

Aanmerkingen. 1. De voorwaarde, dat een der kegelsneden de lijn $z = 0$ aanraakt, is $(\mu + \lambda\nu)^2\,(\mu - \lambda\nu)^2 = 0$. De tweede factor levert de drie boven gevonden ontaardingen op, terwijl de eerste factor drie eigenlijke kegelsneden doet ken-

nen. Ook deze drie zijn dubbel te tellen, wijl ze tweemaal door R gaan.

II. De overige ontaardingen worden opgeleverd door de onderstelling $\lambda = 0$ (b met een lijn door C), $\mu = 0$ (a met een lijn door C) $\nu = 0$ of $\nu = \infty$ (a en b).

Oplossing *van* J. NEUBERG.

3. We stellen de drie puntenreeksen door (P), (Q), (R) en een kegelsnee uit de reeks door (PQR) voor. De karakteristieken der reeks (aantal kegelsneden door een gegeven punt, aantal kegelsneden rakende aan een gegeven rechte) noemen we λ en μ.

4. *Bepaling van* λ. Is D (fig. 38) een willekeurig punt, dan beschouwen we eerst de reeks der kegelsneden (PQD), die a en b in de overeenkomstige punten P en Q van (P) en (Q) aanraken en door het vaste punt D gaan. Het aantal malen, dat de kegelsnee (PQD) door het overeenkomstige punt R gaat, staat nauw met λ in verband; derhalve zoeken we het aantal coïncidenties van R met een der twee snijpunten N_1, N_2 van (PQD) en c.

Nemen we R aan, dan zijn P en Q bepaald en vindt men een enkele kegelsnee (PQD); dus komen met een gegeven punt R twee punten N overeen. Nemen we N_1 aan, dan is het snijpunt S van N_1D en PQ bepaald. Wijl nl. de drie kegelsneden (a, b), (PQD) en de lijn PQ dubbelgeteld tot een zelfden bundel behooren, is S een der dubbelpunten van de involutie bepaald door de beide paren (A′, B′), (N_1, D). En daar de verbindingslijn PQ van de overeenkomstige punten P en Q van (P) en (Q) een kegelsnee omhult en uit elk der beide punten S twee raaklijnen aan deze getrokken kunnen worden, komen met een gegeven punt N_1 vier punten R overeen. Dus bestaat er tusschen de punten R en N een overeenkomst (4, 2) en zijn er volgens het correspondentiebeginsel van CHASLES *zes* coïncidenties.

Wijl er geen oneigenlijke kegelsneden (PQR) voorkomen, die door *alle* punten van het vlak gaan, is $\lambda = 6$.

5. *Bepaling van* μ. We trekken door D een willekeurige rechte d en bepalen nu het aantal kegelsneden, die d aanraken.

Door D gaan zes kegelsneden der reeks, die op *d* zes tweede snijpunten E bepalen. Omgekeerd komt met elk willekeurig aangenomen punt E van *d* een zestal punten D overeen. Dus bestaat tusschen de twee snijpunten D en E van *d* met de kegelsneden (PQR) een overeenkomst (6, 6) en zijn er *twaalf* coïncidenties.

In de reeks (PQR) komen drie dubbeltellende kegelsneden voor, die alle lijnen aanraken, nl. de drie ontaardingen in een dubbel getelde lijn. Dus is $\mu = 6$.

Aanmerking der redactie. Door dualistische omkeering gaat het vraagstuk over in het volgende:

„De hoekpunten A, B, C van een gegeven driehoek zijn de toppen van drie projectieve stralenbundels. Als p, q, r overeenkomstige stralen dier bundels zijn, vraagt men het stelsel der kegelsneden, die p en q in A en B en r ergens aanraken, te onderzoeken."

Neemt men aan, dat A en B met de onbestaanbare cirkelpunten in het oneindige samenvallen, dan wordt dit op zijn beurt:

„Gegeven een cirkel (O) en een punt P. Men neemt op den cirkel een reeks van punten, om het punt een daarmee projectieven bundel van stralen aan. Als Q en q overeenkomstige elementen dezer projectieve stelsels zijn, vraagt men de reeks van cirkels (Q, q), die Q tot middelpunt hebben en q aanraken, te onderzoeken."

Uit de vorige oplossingen blijkt, dat de bedoelde reeks van cirkels eveneens de karakteristieken 6, 6 heeft.

Waarschijnlijk is het vraagstuk in dezen vorm het gemakkelijkst op te lossen en kan men hiervan o.a. gebruik maken bij de bepaling van de omhullende der kegelsneden (PQR).

Vraagstuk LXXXVII.

Men vraagt de vergelijking der kromme, waarin een cirkeldoorsnee van een elliptischen cylinder bij ontwikkeling van den cylinder op het platte vlak overgaat. (M. d'Ocagne.)

Opgelost *door* Mej. A. G. Wijthoff, M. d'Ocagne *en* P. de Carpentier Wildervank Jr.

Oplossing *van* M. D'OCAGNE.

1. We onderstellen, dat de ontwikkeling des cylinders plaats vindt op het raakvlak xBy (fig. 39), dat evenwijdig is aan de groote as AA′ der loodrechte doorsnee ABA′, waardoor het vlak ADA′ der cirkeldoorsnee gaat. Terwijl de boog BP der ellips zich als BP′ op de x-as afzet, zal M′P′, de ordinaat van het punt M′, waarmee M na ontwikkeling samenvalt, aan MP gelijk blijven. De coördinaten van M′ zijn dan

$$x = \text{elliptische boog BP}, \; y = \text{MP}.$$

Zijn x_0 en y_0 de coördinaten van P met betrekking tot de assen OA en OB, stelt k den sinus van den hoek tusschen het vlak ADA′ van de cirkeldoorsnee en het vlak ABA′ voor en duidt r de lengte aan van BD, dan is achtereenvolgens

$$dx = \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}, \; y_0 = \frac{y}{k}\sqrt{1-k^2}, \; \frac{x_0^2}{r^2} + \frac{y_0^2}{r^2(1-k^2)} = \frac{1}{k^2},$$

$$dy_0 = \frac{dy}{k}\sqrt{1-k^2}, \; x_0 = \frac{1}{k}\sqrt{r^2-y^2}, \; dx_0 = -\frac{1}{k}\frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}}.$$

Hieruit volgt de differentiaalvergelijking

$$dx = dy\sqrt{\frac{r^2(1-k^2)+k^2y^2}{k^2(r^2-y^2)}}$$

der gevraagde kromme; in vereeniging met de voorwaarde, dat $y = r$ met $x = 0$ overeenstemt, bepaalt deze vergelijking de kromme volkomen.

2. Stellen we $r^2 - y^2 = r^2t^2$, dan gaat de differentiaalvergelijking over in

$$dx = -\frac{r}{k}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

en dus als T de integraal van de laatste breuk aangeeft

$$x = -\frac{rT}{k} + C,$$

waarin de constante C door de juist genoemde voorwaarde bepaald wordt. Met behulp van de substitutie $t = sn\;u, k)$ wordt verder

$$T = \int dn^2(u, k)\,du$$

en dus (volgens HALPHEN, deel I, blz. 45)

$$T = \sqrt{e_1 - e_3} \int \frac{pv - e_2}{pv - e_3} dv,$$

omdat de betrekkingen

$$dn\, u = \sqrt{\frac{pv - e_2}{pv - e_3}}, \quad v = \frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$$

gelden. Bovendien is (volgens HALPHEN, t. a. p. blz. 37)

$$p(v + \omega') - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pv - e_3}.$$

Dus vindt men

$$\frac{pv - e_2}{pv - e_3} = 1 + \frac{e_3 - e_2}{pv - e_3} = \frac{p(v + \omega') - e_1}{e_3 - e_1} = \frac{\zeta'(v + \omega') + e_1}{e_1 - e_3}$$

en derhalve ook, na invoeging in T,

$$x = -\frac{r}{k} \frac{\zeta(v + \omega') + e_1 v}{\sqrt{e_1 - e_3}} + C = -r \frac{\zeta(v + \omega') + e_1 v}{\sqrt{e_2 - e_3}} + C.$$

Merkt men nu op, dat de hier voorkomende ω' volkomen overeenstemt met de door TANNERY en MOLK in de noot onder op bladzij 202 van hun werk (*Théorie des fonctions elliptiques*) gebruikte ω_3, dan blijkt, dat uit de op blz. 191 van dit werk aangevoerde formule XII_5 de betrekking

$$\zeta(v + \omega') = \zeta(v + \omega_3) = \zeta_3 v + \eta_3$$

volgt. Dus wordt x eindelijk bepaald door de vergelijking

$$x = -r \frac{\zeta_3 v + e_1 v}{\sqrt{e_2 - e_3}} + C'.$$

3. Wat y aangaat heeft men

$$y = r\sqrt{1 - t^2} = r\, cn(u, k) = r \sqrt{\frac{pv - e_1}{pv - e_3}}.$$

Wijl pv oneindig wordt voor $v = 0$, vindt men, dat $y = r$ wordt voor $v = 0$. Dus moet voor $v = 0$ ook $x = 0$ zijn. Daar $\zeta\omega_3 = \eta_3$ is, toont de vergelijking $\zeta(v + \omega_3) = \zeta_3 v + \eta_3$ aan, dat ζ_0 nul moet zijn. Dus is $x = C'$ en moet $C' = 0$ gesteld worden. Derhalve zijn x en y uitgedrukt door de vergelijkingen

$$x = -r \frac{\zeta_3 v + e_1 v}{\sqrt{e_2 - e_3}}, \quad y = r \sqrt{\frac{pv - e_1}{pv - e_3}}.$$

AANMERKING. Volgens een bekende stelling (zie *Bulletin de la Société math. de France*, deel 21, blz. 85) brengt de gezochte kromme door draaiing om de x-as een omwentelingsopvervlak voort, dat op den bol ontwikkeld kan worden.

Vraagstuk LXXXVIII.

Indien men in de n^{de} naderende breuk van een kettingbreuk het n^{de} wijzergetal vervangt door kleinere geheele getallen, zullen de daardoor verkregen breuken (*fractions convergentes intermédiaires*) dichter bij de kettingbreuk gelegen zijn (of meer van deze verschillen) dan de $n-1^{ste}$ naderende breuk als het wijzergetal vervangen is door een ander getal grooter (of kleiner) dan de helft van dit wijzergetal. Men vraagt dit te bewijzen. (C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER *en* T. J. ALLERSMA.

Oplossing *van* C. VAN ALLER.

Noemen we K de waarde van de kettingbreuk, a_n het n^{de} wijzergetal, $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ de n^{de} naderende breuk en zij verder $\frac{\alpha'_n}{\beta'_n}$ de breuk, die uit de n^{de} naderende breuk ontstaat, als het n^{de} wijzergetal met het geheele getal k wordt verminderd. We stellen nu de vraag, welke waarden nog aan k kunnen gegeven worden, opdat $\frac{\alpha'_n}{\beta'_n}$ dichter bij K (echter aan de andere zijde) gelegen zij dan $\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}$. Om de gedachten te bepalen, zullen we aannemen, dat n oneven is; er moet dan worden voldaan aan de ongelijkheid

$$K - \frac{\alpha'_n}{\beta'_n} < \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} - K,$$

of

$$\left(K - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) + \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{\alpha'_n}{\beta'_n}\right) < \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) - \left(K - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right),$$

dat is

$$2\left(K - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) + \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{\alpha'_n}{\beta'_n}\right) < \frac{1}{\beta_{n-1}\beta_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Nu is

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{\alpha'_n}{\beta'_n} = \frac{\alpha_n}{\beta_n} - \frac{\alpha_n - k\alpha_{n-1}}{\beta_n - k\beta_{n-1}} = \frac{k}{\beta_n(\beta_n - k\beta_{n-1})}.$$

Noemen we verder q_{n+1} het volledige quotient van de deeling, waaruit het wijzergetal a_{n+1} als benaderd quotient gevonden wordt, indien de verhouding K : 1 door opvolgende deelingen in een kettingbreuk ontwikkeld wordt, dan is

$$K - \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{q_{n+1}\alpha_n + \alpha_{n-1}}{q_{n+1}\beta_n + \beta_{n-1}} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{\beta_n(q_{n+1}\beta_n + \beta_{n-1})}.$$

Met behulp dezer gelijkheden gaat de ongelijkheid 1) over in

$$\frac{2}{q_{n+1}\beta_n + \beta_{n-1}} + \frac{k}{\beta_n - k\beta_{n-1}} < \frac{1}{\beta_{n-1}}$$

en hieruit vindt men gemakkelijk, dat k moet voldoen aan de voorwaarde

$$2k < \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{q_{n+1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2).$$

Hoewel n oneven is ondersteld, geraakt men toch tot dezelfde voorwaarde, als n even is, waarvan men zich gemakkelijk kan overtuigen.

Aan de ongelijkheid 2) zal nu worden voldaan als k zoo wordt gekozen, dat

$$2k \leqq a_n - 1$$

is, daar $\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} > a_n$ en $\frac{1}{q_{n+1}} < 1$ is; het is dus voldoende, dat k kleiner dan de helft en bijgevolg $a_n - k$ grooter dan de helft van het wijzergetal a_n zij.

Op geheel overeenkomstige wijze wordt het tweede gedeelte van de opgegeven stelling bewezen. Men vindt, dat de breuk $\frac{\alpha'_n}{\beta'_n}$ meer van de kettingbreuk verschilt dan de voorafgaande naderende breuk $\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}$ onder de voorwaarde

$$2k > \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{q_{n+1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3).$$

Aan deze ongelijkheid zal worden voldaan als $2k \geqq a_n + 1$ is, daar $a_n + 1 > \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} > \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{q_{n+1}}$ is; k moet dus groo-

ter zijn dan de helft van het wijzergetal a_n en bijgevolg $a_n - k$ kleiner dan de helft.

Nemen we een voorbeeld tot toepassing.

$$\pi = \{3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ \ldots\}$$

heeft tot naderende breuken

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \text{enz.}$$

Men wil de breuken vinden, dichter bij π gelegen dan $\frac{22}{7}$ en waarvan de noemers kleiner dan 106 zijn; de bewezen stelling zegt, dat men daartoe het wijzergetal 15 moet vervangen door een der getallen 8, 9 .... 14. Men verkrijgt dan de breuken

$$\frac{179}{57},\ \frac{201}{64},\ \frac{223}{71},\ \frac{245}{78},\ \frac{267}{85},\ \frac{289}{92}\ \text{en}\ \frac{311}{99};$$

ze zijn alle $< \pi$, terwijl $\frac{22}{7} > \pi$ is. (Onder de opgenoemde breuken bevindt zich ook de verhouding $3\frac{10}{71}$, reeds door ARCHIMEDES gevonden).

OPMERKING. Men vindt o.a. in SERRET'S *Cours d' Algèbre supérieure* en LOBATTO'S *lessen der Hoogere Algebra*, *bewerkt door* A. E. RAHUSEN de vraag opgelost: „De beide breuken te vinden, waarvan de noemers niet grooter zijn dan een gegeven getal en die zoo weinig mogelijk in den eenen of den anderen zin verschillen van eene gegeven verhouding." Bij de oplossing dier vraag blijft het echter onbeslist, welke van de gevonden breuken het nauwkeurigst is. Het zal duidelijk zijn, dat daaromtrent nu eene beslissing kan genomen worden. In een enkel geval kan er nog onzekerheid overblijven, nl. het geval, dat er sprake is van een tusschengelegen naderende breuk, die berekend is juist met de helft van een *even* wijzergetal. De bewezen stelling zegt niets omtrent zulk een breuk, we zullen haar voor dit bijzonder geval nog aanvullen. Is dit geschied, dan is men tevens in staat *een rij van breuken met opklimmende noemers te vormen, die in toenemende mate de kettingbreuk benaderen, en waarvan elke breuk de eigenschap bezit, dat zij minder van de kettingbreuk verschilt dan iedere andere breuk, waarvan de noemer kleiner is dan de noemer van de*

breuk, die in de bedoelde rij onmiddellijk op de beschouwde breuk volgt.

Bij het nader onderzoek van het zooeven aangestipte bijzondere geval zullen we voor het gemak der bespreking de naderende breuken, die met de volledige wijzergetallen worden berekend, noemen *naderende breuken van de* 1ste *orde.* De breuken, die met de verminderde wijzergetallen worden berekend, zullen we noemen *naderende breuken van de* 2de *orde*, als zij minder van de kettingbreuk verschillen dan de onmiddellijk voorafgaande naderende breuk van de 1ste orde, en in het tegengestelde geval *naderende breuken van de* 3de *orde.* In de zoo straks bedoelde rij van breuken komen dus de naderende breuken van de 3de orde niet voor. We hebben nu de vraag op te lossen, of de naderende breuk, berekend met de helft van het wijzergetal a_n, indien dit een even getal is, van de tweede of van de derde orde is. De ongelijkheid 2) geeft te kennen, dat de bedoelde breuk nog van de *tweede* orde zal zijn, als aan die ongelijkheid nog wordt voldaan door $k = \frac{1}{2}a_n$ te stellen, dus als

$$a_n < \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{q_{n+1}},$$

of als

$$\frac{1}{q_{n+1}} < \frac{\beta_{n-2}}{\beta_{n-1}}$$

en dus

$$q_{n+1} > \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

is. Op dezelfde wijze besluit men uit 3), dat de te onderzoeken breuk van de *derde* orde zal zijn als $q_{n+1} < \dfrac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}$ is. Het is nu zeer gemakkelijk te onderzoeken of de ongelijkheid 4) al dan niet plaats vindt, als nog enkele wijzergetallen van K volgende op het wijzergetal a_n bekend zijn. Immers is

$$q_{n-1} = \{a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ \},$$

$$\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} = \{a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots\ a_2\};$$

door deze betrekkingswijzers onderling te vergelijken, kan men dadelijk beslissen welke der kettingbreuken het grootst en dus van welke orde de te onderzoeken breuk is. Men besluit bv.

dat de bedoelde breuk een naderende breuk van de *tweede* orde is als $a_{n+1} > a_{n-1}$ is; in het geval dat $a_{n+1} = a_{n-1}$ is als $a_{n+2} < a_{n-2}$ is; in het geval dat $a_{n+1} = a_{n-1}$ en $a_{n+2} = a_{n-2}$ is als $a_{n+3} > a_{n-3}$ is, enz.; hoogstens kan men tot het nemen eener beslissing $n - 2$ wijzergetallen van K volgende op a_n noodig hebben; dikwijls zal ook één wijzergetal voldoende zijn.

Mochten alle wijzergetallen van $\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}$ overeenstemmen met de eerste $n - 2$ wijzergetallen van q_{n+1}, dan zij men indachtig, dat men voor het wijzergetal, dat men zich in de betrekkingswijzer van $\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}$ als volgende op a_2 aanwezig kan denken, niet 0 doch ∞ kiest; iets dergelijks houde men in het oog als K meetbaar is en het aantal wijzergetallen van q_{n+1} minder dan $n - 2$ bedraagt.

Nemen we nu nog een paar voorbeelden tot toepassing.

I. *Welke is de eenvoudigste breuk, die minder van π verschilt dan* $\frac{355}{113}$?

De naderende breuk, die volgt op $\frac{355}{113}$, wordt berekend met het wijzergetal 292; de breuk, die berekend wordt met de helft van dit getal is een naderende breuk van de tweede orde, want

$$\{1, 1, . .\} > \{1, 15, 7\}.$$

Men vindt dus als antwoord op de gestelde vraag de breuk $\frac{52163}{16604}$; op deze breuk volgen in nauwkeurigheid de naderende breuken overeenkomende met de wijzergetallen 147, 148, ... 292. Door de proef te nemen vindt men

$$\frac{355}{113} - \pi = 0{,}000000\,2667\ldots$$

$$\pi - \frac{52163}{16604} = 0{,}000000\,2602\ldots$$

II. *Gevraagd de naderende breuken van de tweede orde te bepalen voor* $\sqrt{15}$.

Men vindt door ontwikkeling van $\sqrt{15}$ in een kettingbreuk

$$\sqrt{15} = \{3, 1, 6, 1, 6, . .\}.$$

Dat men nog naderende breuken van de tweede orde vindt, als men elk wijzergetal 6 door 5 of 4 vervangt, is reeds bekend; onderzoeken we nu de vervanging van 6 door 3. Men heeft, met het oog op de vervanging van het derde wijzergetal

$$\{1, 6, \ldots\} > \{1, \infty\},$$

met het oog op de vervanging van het vijfde wijzergetal

$$\{1, 6, 1, 6, \ldots\} > \{1, 6, 1, \infty\} \text{ enz.}$$

Als men dus een wijzergetal 6 door de helft vervangt, dan zijn de overeenkomstige naderende breuken nog van de tweede orde. De rij bedoeld op bladz. 159 onderaan wordt dus hier

$$\frac{3}{1} \Big| \frac{4}{1} \Big| \frac{15}{4}, \frac{19}{5}, \frac{23}{6}, \frac{27}{7} \Big| \frac{31}{8} \Big| \frac{120}{31}, \frac{151}{39}, \frac{182}{47}, \frac{213}{55} \Big| \frac{244}{63} \Big| \ldots$$

Telkens is een streep geplaatst tot afscheiding van de breuken, die grooter en die kleiner dan $\sqrt{15}$ zijn.

III. *De naderende breuken van de tweede orde te bepalen voor* $\sqrt{17}$.

Men vindt

$$\sqrt{17} = \{4, 8, 8, 8, 8, \ldots\}$$

Vooreerst kan elke 8 worden vervangen door 5, 6 of 7; indien men de eerste 8 door de helft vervangt, dan komt daarmede een naderende breuk van de derde orde overeen, want

$$\{8, \ldots\} < \infty.$$

Als de tweede 8 van den betrekkingswijzer door 4 vervangen wordt, dan vindt men daarbij een naderende breuk van de tweede orde, want

$$\{8, 8, \ldots\} > \{8, \infty\}.$$

Als de derde 8 van den betrekkingswijzer door 4 wordt vervangen, dan vindt men daarbij weer een naderende breuk van de derde orde, want

$$\{8; 8, 8, \ldots\} < \{8, 8, \infty\}.$$

Zoo vindt men bij de vervanging van het periodiek wijzergetal 8 door de helft beurtelings naderende breuken van de derde en van de tweede orde. De rij van breuken op bladz. 159 onderaan bedoeld is ten aanzien van $\sqrt{17}$

$$\frac{4}{1} \Big| \frac{21}{5}, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8} \Big| \frac{136}{33}, \frac{169}{41}, \frac{202}{49}, \frac{235}{57}, \frac{268}{65} \Big| \frac{1373}{333}, \frac{1641}{398}, \frac{1909}{463}, \frac{2177}{528} \Big| \text{ enz.}$$

De breuken grooter dan $\sqrt{17}$ en kleiner dan $\sqrt{17}$ zijn weer door strepen van elkaar gescheiden; in de vakken, die daardoor ontstaan, vindt men beurtelings vier en vijf breuken. De laatste breuk in elk vak is een naderende van de eerste orde.

Vraagstuk LXXXIX.

Men vraagt het bewijs van de identiteit

$$1+\binom{k}{1}\frac{a+1}{b-1}+\binom{k}{2}\frac{(a+1)(a+2)}{(b-1)(b-2)}+\ldots\binom{k}{k}\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-k)}$$

$$=\frac{(b+a)(b+a-1)\ldots\ldots(b+a-k+1)}{(b-1)(b-2)\ldots\ldots(b-k)}.$$

(C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, T. J. ALLERSMA *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* C. VAN ALLER *en* T. J. ALLERSMA.

De formule blijkt juist te zijn voor $k=1$. We onderstellen nu, dat ze geldig is voor een zekere waarde van k, en bewijzen dan, dat ze nog geldt, als k met een eenheid verhoogd wordt. Vervangen we daartoe a door $a+1$ en b door $b-1$, dan verkrijgen we

$$1+\binom{k}{1}\frac{a+2}{b-2}+\binom{k}{2}\frac{(a+2)(a+3)}{(b-2)(b-3)}+\ldots\binom{k}{k}\frac{(a+2)(a+3)\ldots(a+k+1)}{(b-2)(b-3)\ldots(b-k-1)}=$$

$$=\frac{(b+a)(b+a-1)\ldots\ldots(b+a-k+1)}{(b-2)(b-3)\ldots\ldots(b-k-1)}.$$

Vermenigvuldigen we nu beide leden met $\frac{a+1}{b-1}$ en tellen we er dan de voor een zekere waarde van k als geldig aangenomen identiteit bij op, dan vinden we

$$1+\binom{k+1}{1}\frac{a+1}{b-1}+\binom{k+1}{2}\frac{(a+1)(a+2)}{(b-1)(b-2)}+\ldots$$

$$\binom{k+1}{k+1}\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+k+1)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-k-1)}=\frac{(b+a)(b+a-1)\ldots(b+a-k)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-k-1)}.$$

Deze vergelijking ontstaat uit de te bewijzen vergelijking, als k door $k+1$ wordt vervangen; daar ze juist is voor $k=1$, geldt ze voor elke geheele waarde van k.

Vraagstuk XC.

Men vraagt de som te bepalen van de eindige of oneindig voortloopende reeks $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$

a^0. als $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta}$ is,

b^0. als $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta} \cdot \frac{n+\gamma+k}{n+\gamma}$ en k een geheel getal is.

(C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER *en* W. MANTEL.

Oplossing.

a. Uit $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta}$ volgt $(n+\beta)\, y_{n+1} = (n+\alpha)\, y_n$,

of

$$(n+\beta)\, y_{n+1} = (n+\beta-1)\, y_n - (\beta-\alpha-1)\, y_n.$$

Stellen we hierin achtereenvolgens n gelijk aan $1, 2, 3 \dots m$ en tellen we de verkregen gelijkheden samen, dan vinden we

$$(m+\beta)\, y_{m+1} = \beta y_1 - (\beta-\alpha-1) \sum_{n=1}^{n=m} y_n,$$

of

$$\sum_{n=1}^{n=m} y_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-1} y_1 - \frac{m+\beta}{\beta-\alpha-1} y_{m+1} \quad \dots \quad 1)$$

In het geval, dat $y_{m+1} = 0$ is en dus de reeks een eindig aantal termen heeft, verdwijnt de laatste term in 1). Is de reeks oneindig voortloopend en convergent, dan is Lim. $my_m = 0$ voor $m = \infty$. In beide gevallen is dan

$$\Sigma y_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-1} y_1 \quad \dots\dots \quad 2).$$

Tot de convergentie van de reeks wordt geeischt $\beta - \alpha - 1 > 0$.

VOORBEELDEN. 1. Om de EULER'sche identiteit (*zie* DE LONGCHAMPS' *Algèbre* p. 5) te bewijzen, moet de som bepaald worden van

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+y) + (x+1)(x+2)\dots(x+y+1) + \dots$$
$$(x+z)(x+z+1)\dots(x+y+z).$$

Indien we stellen

$$y_n = (x+n-1)(x+n)\dots(x+y+n-1),$$

dan is

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x+y+n}{x-1+n},$$

zoodat hier de formule 1) toepasselijk is. De reeks heeft $z+1$ termen; substitueeren we nu in 1) $\alpha = x+y$, $\beta = x-1$, $m = z+1$, dan verkrijgen we

$$S = -\frac{x-1}{y+2}y_1 + \frac{x+z}{y+2}y_{m+1} = \frac{x+z}{y+2}y_{m+1} - \frac{x-1}{y+2}y_1,$$

of

$$S = \frac{1}{y+2}[(x+z)(x+z+1)..(x+y+z+1)-(x-1)x(x+1)..(x+y)].$$

2. Als a een geheel getal is, dan zal

$$\frac{a}{b} - \frac{a(a-1)}{b(b+1)} + \frac{a(a-1)(a-2)}{b(b+1)(b+2)} - \ldots. = \frac{a}{b+a-1}$$

zijn, want door te stellen

$$y_n = (-1)^{n-1}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}$$

wordt

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = -\frac{a-n}{b+n} = \frac{n-a}{n+b}$$

en men vindt uit 2)

$$S = \frac{b}{b+a-1}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b+a-1}.$$

3. Met behulp van 2) vindt men onmiddellijk de volgende bekende uitkomsten:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots = \frac{1}{ab},$$

$$\frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \ldots = \frac{1}{2ab(a+b)},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+c)}{b(b+c)} + \frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)} + \ldots = \frac{a}{b-a-c},\quad b > a+c.$$

---

b. Onderstellen we nu

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta}\cdot\frac{n+\gamma+k}{n+\gamma}\ (k \text{ een geheel getal}) \ldots 3).$$

Beschouwen we de reeks $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n \ldots\ldots$, welke zoodanig wordt aangenomen, dat

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta} \text{ en } z_1 = y_1$$

is; voor deze reeks geldt volgens 1)

$$\sum_{n=1}^{n=m} z_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-1} y_1 - \frac{m+\beta}{\beta-\alpha-1} z_{m+1} \quad \ldots \; 4).$$

We zullen het verschil V berekenen, dat bij $z_1 + z_2 + \ldots z_m$ moet gevoegd worden, om $y_1 + y_2 + \ldots y_m$ te verkrijgen. Uit 3) leidt men af

$$(n+\beta) y_{n+1} = (n+\alpha) y_n + \frac{k(n+\alpha)}{n+\gamma} y_n.$$

Verder is

$$(n+\beta) z_{n+1} = (n+\alpha) z_n,$$

waaruit door aftrekking volgt

$$(n+\beta)(y_{n+1} - z_{n+1}) = (n+\alpha)(y_n - z_n) + \frac{k(n+\alpha)}{n+\gamma} y_n,$$

of

$$(n+\beta)(y_{n+1}-z_{n+1}) = (n+\beta-1)(y_n-z_n) - (\beta-\alpha-1)(y_n-z_n) + \frac{k(n+\alpha)}{n+\gamma} y_n.$$

Geven we aan n achtereenvolgens de waarden $1, 2 \ldots m$ en tellen we de verkregen gelijkheden samen, dan vinden we

$$(m+\beta)(y_{m+1} - z_{m+1}) = -(\beta-\alpha-1)\,V + k \sum_{n=1}^{n=m} \frac{n+\alpha}{n+\gamma} y_n,$$

$$V = \frac{k}{\beta-\alpha-1} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{n+\alpha}{n+\gamma} y_n - \frac{m+\beta}{\beta-\alpha-1} (y_{m+1} - z_{m+1})$$

en dus met behulp van 4)

$$\sum_{n=1}^{n=m} y_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-1} y_1 - \frac{m+\beta}{\beta-\alpha-1} y_{m+1} + \frac{k}{\beta-\alpha-1} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{n+\alpha}{n+\gamma} y_n \,.\, 5).$$

Zoowel in het geval dat $y_{m+1} = 0$ is, als in het geval dat de reeks oneindig voortloopend is en convergeert, heeft men derhalve

$$\Sigma y_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-1} y_1 + \frac{k}{\beta-\alpha-1} \Sigma \frac{n+\alpha}{n+\gamma} y_n \ldots \; 6).$$

Stellen we nu

$$\frac{n+\alpha}{n+\gamma} y_n = y'_n,$$

dan is

$$\frac{y'_{n+1}}{y'_n} = \frac{n+\alpha+1}{n+\alpha} \cdot \frac{n+\gamma}{n+\gamma+1} \cdot \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+\alpha+1}{n+\beta} \cdot \frac{n+\gamma+k}{n+\gamma+1}.$$

De formule 6) gevonden voor Σy_n mag dus worden toegepast om $\Sigma y'_n$ te bepalen; men verkrijgt

$$\Sigma y'_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-2} y'_1 + \frac{k-1}{\beta-\alpha-2} \Sigma \frac{n+\alpha+1}{n+\gamma+1} y'_n.$$

Stellen we verder

$$\frac{n+\alpha+1}{n+\gamma+1} y'_n = y''_n,$$

dan is

$$\frac{y''_{n+1}}{y''_n} = \frac{n+\alpha+2}{n+\alpha+1} \cdot \frac{n+\gamma+1}{n+\gamma+2} \cdot \frac{y'_{n+1}}{y'_n} = \frac{n+\alpha+2}{n+\beta} \cdot \frac{n+\gamma+k}{n+\gamma+2}.$$

De formule 6) kan dus ook dienen om $\Sigma y''_n$ te bepalen. Men vindt

$$\Sigma y''_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-3} y''_1 + \frac{k-2}{\beta-\alpha-3} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{n+\alpha+2}{n+\gamma+2} y''_n.$$

Zoo kan men voortgaan; telkens vindt men het quotient van twee op elkaar volgende termen van de te sommeeren reeks van denzelfden vorm als bij de oorspronkelijke reeks. Echter wordt het verschil van teller en noemer in den tweeden factor telkens ééne eenheid kleiner; daar nu die teller en noemer een geheel getal verschillen, zoo zullen zij ten slotte aan elkaar gelijk worden. Men zal dus na k-maal de formule 6) te hebben toegepast de bepaling van Σy_n hebben teruggebracht tot die van $\Sigma y_n^{(k)}$, waarbij de betrekking

$$\frac{y_{n+1}^{(k)}}{y_n^{(k)}} = \frac{n+\alpha+k}{n+\beta} \cdot \frac{n+\gamma+k}{n+\gamma+k} = \frac{n+\alpha+k}{n+\beta}$$

geldt. Men vindt dan uit de formule 2)

$$\Sigma y_n^{(k)} = \frac{\beta}{\beta-\alpha-k-1} y_1^{(k)}.$$

Met behulp van de voorgaande uitkomsten verkrijgt men nu

$$\Sigma y_n = \frac{\beta}{\beta-\alpha-1} y_1 + \frac{k}{\beta-\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{\beta-\alpha-2} y'_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)}{(\beta-\alpha-1)(\beta-\alpha-2)} \cdot \frac{\beta}{\beta-\alpha-3} y''_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)\ldots 1}{(\beta-\alpha-1)(\beta-\alpha-2)\ldots(\beta-\alpha-k)} \cdot \frac{\beta}{\beta-\alpha-k-1} y_1^{(k)},$$

en verder door te letten op de waarden van y'_n, y''_n, ... $y_n^{(k)}$

$$\Sigma y_n = \frac{\beta y_1}{\beta-\alpha-1} \Big\{ 1 + \frac{k}{\beta-\alpha-2} \frac{1+\alpha}{1+\gamma} +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\gamma)(2+\gamma)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)\ldots 1}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)\ldots(\beta-\alpha-k-1)} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(k+\alpha)}{(1+\gamma)(2+\gamma)\ldots(k+\gamma)} \Big\} \quad 7).$$

Het sommatieteeken in deze formule kan uitgestrekt worden tot alle termen van de reeks:

1°. in het geval dat één term van de reeks nul is; dit zal ten gevolge hebben dat ook alle volgende termen nul zijn en zal alleen plaats vinden als α een negatief geheel getal is;

2°. als de reeks oneindig voortloopend is en convergeert; tot de convergentie is noodig dat $\beta - \alpha - 1 > k$ is.

Wil men de som van de eerste m termen der reeks bepalen in de onderstelling dat y_{m+1} van nul verschilt, dan zal men bij herhaling de formule 5) moeten toepassen, even als nu met de formule 6) geschied is. Men komt dan tot het resultaat dat men om de verlangde som te verkrijgen het tweede lid van 7) moet verminderen met

$$\frac{m+\beta}{\beta-\alpha-1} y_{m+1} \Big\{ 1 + \frac{k}{\beta-\alpha-2} \frac{m+\alpha+1}{m+\gamma+1} +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)} \frac{(m+\alpha+1)(m+\alpha+2)}{(m+\gamma+1)(m+\gamma+2)} +$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)\ldots 1}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)\ldots(\beta-\alpha-k-1)} \frac{(m+\alpha+1)(m+\alpha+2)\ldots(m+\alpha+k)}{(m+\gamma+1)(m+\gamma+2)\ldots(m+\gamma+k)} \Big\} \ldots 8).$$

De uitkomsten 7) en 8) stemmen voor $k = 0$ overeen met hetgeen door de formule 1) wordt uitgedrukt.

Beschouwen we in het bijzonder nog het geval dat $\gamma = 0$ is. Alsdan wordt

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta} \cdot \frac{n+k}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9).$$

De formule 7) gaat nu over in

$$\Sigma y_n = \frac{\beta y_1}{\beta - \alpha - 1}\left\{ 1 + \binom{k}{1}\frac{1+\alpha}{\beta-\alpha-2} + \binom{k}{2}\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)} + \ldots \right.$$
$$\left. + \binom{k}{k}\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(k+\alpha)}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)\ldots(\beta-\alpha-k-1)} \right\}.$$

De uitdrukking tusschen accolades kan met behulp van de identiteit in Vraagstuk 89 worden herleid tot

$$\frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-k)}{(\beta-\alpha-2)(\beta-\alpha-3)\ldots(\beta-\alpha-k-1)}$$

zoodat de formule voor de som van de reeks nu wordt

$$\Sigma y_n = \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k)}{(\beta-\alpha-1)(\beta-\alpha-2)\ldots(\beta-\alpha-k-1)}\, y_1 \quad \ldots 10).$$

VOORBEELDEN. 1. De te sommeeren reeks zij

$$\frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{2}{(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \ldots$$
$$\frac{n}{\{a+(n-1)b\}(a+nb)\{a+(n+1)b\}} + \ldots$$

Men heeft

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+1}{n}\,\frac{a+(n-1)b}{a+(n+2)b} = \frac{n+\dfrac{a-b}{b}}{n+\dfrac{a+2b}{b}}\,\frac{n+1}{n}.$$

Het quotient $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ is dus van den vorm 9); men vindt nu uit 10) voor $k = 1$, $\alpha = \frac{a-b}{b}$, $\beta = \frac{a+2b}{b}$, $S = \frac{1}{2ab^2}$.

2°. Voor de reeks, waarvan de n^{de} term is

$$y_n = \frac{a+(n-1)b}{\{p+(n-1)q\}(p+nq)\{p+(m+n-1)q\}}$$

(zie LOBATTO-RAHUSEN, *Lessen der Hoogere Algebra*, bl. 293)

heeft men

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{p+(n-1)q}{p+(n+m)q}\cdot\frac{a+nb}{a+(n-1)b}=\frac{n+\frac{p-q}{q}}{n+\frac{p+mq}{q}}\cdot\frac{n+\frac{a}{b}}{n+\frac{a-b}{b}}.$$

Het quotient $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ is van den vorm 3); men vindt uit 7) door te stellen $\alpha=\frac{p-q}{q}$, $\beta=\frac{p+mq}{q}$, $\gamma=\frac{a-b}{b}$, $k=1$

$$S=\frac{p+mq}{mq}\left\{1+\frac{1}{m-1}\frac{pb}{qa}\right\}y_1=\frac{(m-1)aq+pb}{m(m-1)q^2\,p(p+q)\ldots\{p+(m-1)q\}}.$$

3°. De reeks

$$p\frac{a}{b}+(p+1)\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+(p+2)\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots$$

heeft volgens formule 7) tot som

$$\frac{a}{b-a-1}\left(p+\frac{1+a}{b-a-2}\right),$$

in het geval ze convergeert. Onafhankelijk van deze voorwaarde vindt men de som van de eerste m termen, als deze uitdrukking wordt verminderd met

$$\frac{a+m}{b-a-1}\cdot\frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{b(b+1)\ldots(b+m-1)}\left\{m+p+\frac{m+a+1}{b-a-2}\right\},$$

hetgeen uit 8) wordt afgeleid.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Stel

$$f(\alpha,\beta,\gamma,k)=1+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma+k}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\ldots$$

Dan is

$$\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-1}f(\alpha,\beta,\gamma,k)=$$

$$=\left[1-\frac{\alpha}{\beta-1}\right]+\frac{\alpha}{\beta-1}\left[1-\frac{\alpha+1}{\beta}\right]\frac{\gamma+k}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta-1)\beta}\left[1-\frac{\alpha+2}{\beta+1}\right]\frac{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\ldots$$

$$=1-\frac{\alpha}{\beta-1}\left[1-\frac{\gamma+k}{\gamma}\right]-\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta-1)\beta}\frac{\gamma+k}{\gamma}\left[1-\frac{\gamma+k+1}{\gamma+1}\right]-\ldots$$

$$=1+\frac{\alpha k}{(\beta-1)\gamma}\left\{1+\frac{\alpha+1}{\beta}\frac{\gamma+k}{\gamma+1}+\frac{(\alpha+1(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)}\frac{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}+\ldots\right\}.$$

Derhalve is ook

$$f(\alpha, \beta, \gamma, k) = \frac{\beta - 1}{\beta - \alpha - 1} + \frac{\alpha k}{(\beta - \alpha - 1)\gamma} f(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, k - 1).$$

Voor $k = 0$ geeft deze het antwoord op vraag *a*. Door herhaalde toepassing leert zij de reeks *b* vinden, als k geheel positief is, en wel

$$f(\alpha, \beta, \gamma, k) = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha - 1} f(\alpha, \alpha - \beta + 2, \gamma, \gamma - k).$$

Wil men een reeks met y_n afbreken, dan zijn deze uitkomsten ook toe te passen, wegens de betrekking

$$f(\alpha, \beta, \gamma, k) = y_0 + y_1 + \ldots + y_n + y_{n+1} f(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, \gamma + n + 1, k).$$

Vraagstuk XCI.

Gegeven is een bundel kwadratische oppervlakken, die elkaar volgens een kegelsnee aanraken, en een vlak V. Men vraagt

a. de meetkundige plaats der polen van V ten opzichte van de oppervlakken des bundels,

b. de congruentie der raaklijnen uit elke pool aan het overeenkomstig kwadratisch oppervlak te trekken.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL.

Oplossing.

a). Zij α het vlak der gemeenschappelijke raakkegelsnee c^2 en l de snijlijn van α en V. Met betrekking tot een oppervlak des bundels is de weerkeerige poollijn l' van l dan de verbindingslijn van den top F des gemeenschappelijken raakkegels met de pool A van l ten opzichte van c^2. Dus is l' voor alle oppervlakken des bundels dezelfde; werkelijk is deze rechte de snijlijn van de gemeenschappelijke raakvlakken ρ en σ in de snijpunten R en S van l met c^2, die echter onbestaanbaar kunnen zijn. Deze lijn l' is de gezochte meetkundige plaats.

b). De bundel van oppervlakken F^2 wordt door V gesneden volgens een bundel van kegelsneden, die elkaar in de gemeenschappelijke punten R en S van V en c^2 aanraken; deze kegelsneden k^2 vormen dus steeds een bundelschaar (k^2). Met deze kegelsneden komen de op l' gelegen polen P van V in dier

voege projectief overeen, dat met het snijpunt A′ van l' en V de vereeniging der rechten A′R en A′S overeenstemt. Hieruit volgt eerst onmiddellijk, dat de gezochte congruentie van de tweede klasse is. Want een willekeurig vlak bevat slechts een enkel punt P van l' en snijdt den bij P behoorenden kegel volgens twee beschrijvende lijnen. En om te onderzoeken hoeveel stralen der congruentie door een willekeurig aangenomen punt Q gaan, beschouwen we in het vlak (Q l') de door de bundelschaar (k^2) in het vlak ingesneden involutie van puntenparen op de snijlijn met V en de met deze projectief verwante puntenreeks (P) der polen. Projecteeren we beide uit Q, dan hebben we met twee projectieve concentrische stelsels, een straleninvolutie en een stralenbundel, te doen, die den straal QA′ overeenkomstig gemeen hebben. Dus gebeurt het tweemaal, dat een straal der involutie met den overeenkomstigen straal des bundels samenvalt en gaan er door Q twee stralen der congruentie. Derhalve is de congruentie ook van den tweeden graad.

3. De rechte l' is een meetkundige plaats van uitzonderingselementen, zoowel wat de door haar gaande vlakken, als wat de op haar gelegen punten betreft. Gemakkelijk bewijst men, dat de meetkundige plaats der kegelsneden, die in de door l' gaande vlakken door de stralen der congruentie worden omhuld, een oppervlak O^2 van den tweeden graad is, dat in A en A′ de vlakken (Al) en (A′l) aanraakt, en ditzelfde oppervlak omhuld wordt door de kegels gevormd door de stralen der congruentie, die door de punten P van l' gaan.

Dus is de congruentie de meetkundige plaats der raaklijnen uit de punten van l' aan O^2 te trekken. Voor elk punt van O^2 en elk raakvlak van O^2 vallen de twee stralen der congruentie samen.

Vraagstuk XCII.

Stelt men de vergelijking $y^3 + 2x^3 - 3y = 0$ door $F(x, y) = 0$ voor, dan vraagt men de som te bepalen van $\frac{1}{\frac{dF}{dy}}$ voor de beide in het punt (1, 1) samenvallende punten.

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* W. Bouwman *en* Dr. W. Kapteyn.

Oplossing.

Stelt men $\frac{dF}{dy} = 3(y^2 - 1)$ door t voor, dan geeft een eenvoudige eliminatie van y uit

$$y^3 + 2x^3 - 3y = 0\,, \quad t = 3(y^2 - 1)$$

de betrekking

$$t^3 - 9t^2 + 108(1 - x^6) = 0.$$

Hieruit volgt, dat voor de drie bij een zelfde x behoorende waarden van t, die we t_1, t_2, t_3 noemen, $\sum \frac{1}{t} = 0$ is, terwijl deze som onbepaald wordt voor $x = 1$. Alleen door $x = 1$ te beschouwen als een grensgeval, waartoe we naderen, mogen we dus beweren, dat de gevraagde som gelijk is aan $-\frac{1}{t_3}$, als t_1 en t_2 de samenvallende waarden van t zijn. Nu is $y_3 = -2$ en dus $-\frac{1}{t_3} = -\frac{1}{9}$.

Vraagstuk XCIII.

Gevraagd de coördinaten (x_1, y_1) van het tangentiaalpunt van het punt (x, y) der kromme $y^3 + 2x^3 - 3y = 0$ te bepalen.

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, Dr. W. KAPTEYN, J. C. KLUYVER *en* W. A. POORT.

Oplossingen.

I. Is $U = y^3 + 2x^3 - 3yz^2 = 0$ de vergelijking der kromme in homogene coördinaten en $H = x(y^2 + z^2) = 0$ dus de vergelijking der kromme van HESSE, dan zijn (zie SALMON, *Higher plane curves*, p. 156) de gezochte coördinaten x_1, y_1, z_1 evenredig met de waarden

$$\frac{dU}{dy}\frac{dH}{dz} - \frac{dU}{dz}\frac{dH}{dy}\,, \quad \frac{dU}{dz}\frac{dH}{dx} - \frac{dU}{dx}\frac{dH}{dz}\,, \quad \frac{dU}{dx}\frac{dH}{dy} - \frac{dU}{dy}\frac{dH}{dx}$$

en hier dus met

$$2xz(3y^2 - z^2)\,, \quad -2z(y^3 + yz^2 + 2x^3)\,, \quad 4x^3y - y^4 + z^4.$$

Stelt men hierin z_1 en z weer $= 1$, dan vindt men

$$x_1 = \frac{2x(3y^2-1)}{4x^3y - y^4 + 1}, \quad y_1 = \frac{-2(y^3+2x^3+y)}{4x^3y - y^4 + 1},$$

of in verband met de vergelijking der kromme

$$x_1 = -\frac{2x(3y^2-1)}{3y^4-6y^2-1}, \quad y_1 = \frac{8y}{3y^4-6y^2-1}. \quad \text{(W. K.)}$$

II. Stellen we in de vergelijking $x = \alpha y$, dan vinden we

$$x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{\sqrt{4\alpha^3+2}}, \quad y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\alpha^3+2}}.$$

Door de substitutie $\alpha = \wp u$ en $\wp' u = \sqrt{4\wp^3 u + 2}$ gaat dit over in

$$x = \frac{\wp u}{\wp' u}\sqrt{6}, \quad y = \frac{1}{\wp' u}\sqrt{6}.$$

Drie punten der kromme liggen op een rechte, als de som der overeenkomstige elliptische argumenten nul is. Het tangentiaalpunt (x_1, y_1) van (x, y) heeft dus een argument $v = -2u$. Voor dit argument geeft de verdubbelingsformule (HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, I, blz. 95)

$$\wp v + 2\wp u = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^2, \quad \frac{\wp' v - \wp' u}{\wp v - \wp u} = \frac{\wp'' u}{\wp' u}.$$

Hier is $g_2 = 0$, $\wp'' u = 6\wp^2 u$. Dus geeft eenvoudige substitutie der waarden van $\wp u$ en $\wp' u$ na eenige herleiding eerst

$$\wp v = \frac{\wp^4 u - 4\wp u}{4\wp^3 u + 2} = \tfrac{1}{4}\wp u - \frac{9\wp u}{2\wp'^2 u} = \frac{x}{4y}(1-3y^2),$$

daarna

$$\wp' v = \wp' u + (\wp v - \wp u)\frac{6\wp^2 u}{\wp' u} = \wp' u - \tfrac{3}{8}(1+y^2)\frac{\wp'^2 u - 2}{\wp' u} = \frac{3y^4-6y^2-1}{8y}\sqrt{6},$$

waaruit de boven vermelde uitkomsten volgen (J. C. K.)

III. De vergelijking der raaklijn in het punt (x, y) der kromme $Y^3 + 2X^3 - 3Y = 0$ is

$$2x^2X - (y^2-1)Y - 2y = 0$$

Door eliminatie van Y tusschen deze beide vergelijkingen vindt men

$$4(x^2X - y)^3 - (y^2-1)^3X^3 - 3(y^2-1)^2(x^2X - y) = 0,$$

van welke derdemachtsvergelijking in X de drie wortels zijn x, x, x_1. Het product der drie wortels levert na deeling door x^2 de waarde van x_1 op. Dit product is $-\frac{4y^3 - 3y(y^2-1)^2}{3y^4 - 6y^2 + 1}$. Hieruit volgt de boven voor x_1 gevonden waarde. En door het elimineeren van X of wel door middel van substitutie der voor x_1 gevonden waarde in de vergelijking der raaklijn vindt men y_1 (W. A. P.)

Vraagstuk XCIV.

Een veranderlijk punt P van een vlakke kromme C^3 van den derden graad wordt met twee vaste punten A_1 en A_2 der kromme verbonden. De verbindingslijnen snijden de kromme opnieuw in de veranderlijke punten P_1 en P_2. Te bewijzen, dat de lijn P_1P_2 een kromme K^6 van de zesde klasse omhult en de vier lijnen $P_1 P_2$, die een zelfde punt Q van C^3 tot derde snijpunt met C^3 hebben, een van Q onafhankelijke dubbelverhouding bezitten.

(J. C. KLUYVER).

Opgelost *door* J. C. KLUYVER, W. A. POORT en DR. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

1. Stellen we met behulp van de vergelijkingen

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\wp u} = \frac{z}{\wp' u}$$

de coördinaten (x, y, z) van een punt der C^3 door de elliptische functies van het argument u voor, dan bestaan er tusschen de argumenten a, b, u, v, w van de punten A_1, A_2, P, P_1, P_2 de betrekkingen

$$a + u + v = 0 \quad , \quad b + u + w = 0,$$

wijl A_1PP_1 en A_2PP_2 drietallen van punten op een rechte gelegen zijn. Hieruit volgt

$$v - w = b - a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Wil de lijn P_1P_2 bovendien het punt Q met het argument t tot derde snijpunt hebben, dan is tevens

$$v + w = -t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Dus vindt men, als 2ω en $2\omega'$ de periodiciteitsmoduli zijn van u, voor v de vier waarden

$$v_1 = \frac{b - a - t}{2},$$

$$v_2 = v_1 + \omega \quad , \quad v_3 = v_1 + \omega' \quad , \quad v_4 = v_1 + \omega + \omega'.$$

Derhalve hebben vier lijnen P_1P_2 het punt Q tot derde snijpunt, terwijl Q bovendien éénmaal als P_1 en éénmaal als P_2 optreedt. Dus gaan er door Q zes raaklijnen der gezochte omhullende en is deze van de zesde klasse.

2. Schrijven we de vergelijkingen der vier lijnen (t, v_i, w_i) in de gedaante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & pt & p't \\ 1 & pv_i & p'v_i \end{vmatrix} = 0, \ (i = 1, 2, 3, 4),$$

dan blijkt, dat de dubbelverhouding $\dfrac{\text{Sin}\,(tv_1, tv_3)}{\text{Sin}\,(tv_1, tv_4)} : \dfrac{\text{Sin}\,(tv_2, tv_3)}{\text{Sin}\,(tv_2, tv_4)}$ voorgesteld wordt door de waarde

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & pt & p't \\ 1 & pv_1 & p'v_1 \\ 1 & pv_3 & p'v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & pt & p't \\ 1 & pv_1 & p'v_1 \\ 1 & pv_4 & p'v_4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & pt & p't \\ 1 & pv_2 & p'v_2 \\ 1 & pv_3 & p'v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & pt & p't \\ 1 & pv_2 & p'v_2 \\ 1 & pv_4 & p'v_4 \end{vmatrix}}.$$

Noemt men deze dubbelverhouding D, dan vindt men nog in σ-functies

$$D = -\frac{\sigma(t + v_1 + v_3)\sigma(t + v_2 + v_4)\sigma(v_1 - v_3)\sigma(v_2 - v_4)}{\sigma(t + v_1 + v_4)\sigma(t + v_2 + v_3)\sigma(v_1 - v_4)\sigma(v_2 - v_3)}$$

en, als men v_2, v_3, v_4 uitdrukt in v_1 en tevens voor $t + 2v_1$ de waarde $b - a$ of c schrijft,

$$D = \frac{\sigma^2\,\omega'}{\sigma^2(c + \omega + \omega')} \cdot \frac{\sigma(c + \omega')\sigma(c + \omega' + 2\omega)}{\sigma(\omega - \omega')\sigma(\omega + \omega')}.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

3. Ziehier een geheel meetkundig bewijs van de voorgelegde stelling.

Als het schema

A	B	C
D	E	F
G	H	

acht punten voorstelt, waarvan de drietallen (ABC), (DEF), (ADG), (BEH) op rechte lijnen liggen, dan zal elke C^3 door deze acht punten noodzakelijk het snijpunt K van CF en GH bevatten.

Duiden we nu (fig. 40) den volgenden stand van P en P_1P_2 door P' en $P_1'P_2'$, het derde snijpunt van A_1A_2 met C^3 door A_3 en het tangentiaalpunt van P door Π aan, dan kunnen we de beide schema's

P	P'	Π
A_1	A_2	A_3
P_1	P_2'	

,

P	P'	Π
A_2	A_1	A_3
P_2	P_1'	

opstellen en uit deze afleiden, dat de kruiswijze verbindingen P_1P_2' en P_2P_1' de kromme C^3 in hetzelfde op de rechte ΠA_3 gelegen punt Q snijden. Dus zal P_1P_2 door Q gaan, als het tangentiaalpunt Π van P op QA_3 ligt. Wijl Π nu het tangentiaalpunt is van vier punten P, gaan er door Q ook vier lijnen P_1P_2, waarvoor Q het derde snijpunt met de kromme is. Dus wordt als boven besloten, dat de omhullende van P_1P_2 een K^6 van de zesde klasse is.

4. Uit de eigenschappen der volledige vierzij blijkt, dat de lijn P_1P_2 haar omhullende aanraakt in het punt R, dat met Q harmonisch ligt ten opzichte van de beide punten P_1 en P_2. Hieruit volgt het tweede deel der stelling. Immers, het punt R is dan het snijpunt van P_1P_2Q met de poolkegelsnee C^2_q van Q met betrekking tot C^3. En als men nu tot het volgende punt Q overgaat, beweegt Q zich langs deze poolkegelsnee, terwijl de vier lijnen P_1P_2Q om haar snijpunten R met deze kegelsnee draaien; ten gevolge van een bekende

eigenschap blijft de dubbelverhouding dezer vier lijnen daarbij volstrekt onveranderd.

5. We zoeken de overige kenmerkende getallen der omhullende K^6 en bepalen daartoe het aantal der dubbelraaklijnen en het geslacht.

Als A_1 en A_2 hetzelfde tangentiaalpunt hebben en deze punten dus een STEINER'sch puntenpaar van de tweede orde vormen, zal er een oneindig aantal in C^3 beschreven vierzijden mogelijk zijn, waarvan de zijden achtereenvolgens door A_1, A_2, A_1, A_2 gaan. In dit geval, dat we voorloopig uitzonderen, is elke raaklijn dubbelraaklijn en wordt de omhullende K^6 een dubbelgetelde K^3. In elk ander geval kan een rechte, die C^3 snijdt in S_1, S_2, S_3, alleen dan dubbelraaklijn zijn, als S_1S_2 en S_2S_3 standen van P_1P_2 zijn en dit gebeurt slechts als S_2 een buigpunt van C^3 is. Dus heeft K^6 negen dubbelraaklijnen. Daar de raaklijnen P_1P_2 van K^6 één aan één overeenkomen met de punten P van C^3, is K^6 van het eerste geslacht.

Uit deze getallen volgt in verband met de formules van PLÜCKER

$$n = 12, \quad d = 36, \quad k = 18, \quad b = 0.$$

6. In het uitzonderingsgeval van K^3 is deze kromme de omhullende der verbindingslijn P_1P_2 van de paren van toegevoegde punten van een der drie MACLAURIN'sche reeksen. Hieruit volgt, dat deze K^3 een C^6 is; omtrent haar vergelijke men SCHRÖTER's leerboek: *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung.*

AANMERKING. Tusschen de punten P_1 en P_2 bestaat een overeenkomst (1; 1) op een drager van den derden graad. Dus omhult P_1P_2 (vergelijk CLEBSCH-LINDEMANN's *Vorlesungen* I, blz. 383) een kromme van de zesde klasse (W. A. P.).

Vraagstuk XCV.

Te bewijzen dat de integraal

$$I = \int \frac{\left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{14}\right)dx}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + (\sqrt{5}-1)^2 x}}$$

door logarithmen kan worden uitgedrukt (ABEL, *Oeuvres complètes* I, blz. 143). (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

1. Om het elliptisch argument u in te voeren bediene men zich van de inversie-formules van HALPHEN (*Traité des fonctions elliptiques* I, blz. 118).

Als men $\sqrt{5} - 1 = R$ stelt, vindt men

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \tfrac{1}{6}R,\ a_3 = \tfrac{1}{4}R^2,\ a_4 = \tfrac{1}{4}R^2,\ g_2 = \tfrac{1}{3}R^2$$

en dus

$$x = \tfrac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},\quad \sqrt{\left(x^2 + \frac{R}{2}\right)^2 + R^2 x} = \sqrt{X} = \wp u - \wp(u+v)$$

waarbij het constante argument v bepaald is door de betrekkingen

$$\wp(v) = -\tfrac{1}{6}R,\quad \wp' v = \tfrac{1}{4}R^2.$$

Met behulp van de waarde van g_2 vindt men $\wp'' v = 0$ en daarna met behulp van de multiplicatieformules

$$\wp(2v) = \tfrac{1}{3}R,\quad \wp'(2v) = -\tfrac{1}{4}R^2,\quad \wp(3v) = 1 - \tfrac{2}{3}R = \wp(4v).$$

Stelt $2\bar{\omega}$ een of andere periode voor, dan is dus $v = \dfrac{2\bar{\omega}}{7}$

2. De invoering van u geeft $dI = f(u)du$, waarin

$$f(u) = \tfrac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} + \tfrac{1}{14}(\sqrt{5}+1) = \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) + \tfrac{1}{14}(\sqrt{5}+1).$$

Ter onderzoeking, of I werkelijk een pseudo-elliptische integraal is, berekent men met het oog op de bijzondere waarde van v de som

$$S = f(u) + f(u+v) + f(u-v) + f(u+2v) + f(u-2v) + f(u+3v) + f(u+3v).$$

Hiervoor vindt men als $\zeta\bar{\omega} = \bar{\eta}$ gesteld wordt $2\bar{\eta} - 7\zeta v + \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Dus is I een pseudo-elliptische integraal. Want als men de beide leden van vergelijking $S = 0$ met $7f(u)$, dat wil zeggen met $7\zeta(u+v) - 7\zeta u - 7\zeta v + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ vermindert en dan integreert, vindt men ten slotte

$$7\,\mathrm{I} = \log \frac{\wp v - \wp u}{\wp v - \wp(u+v)} + \log . \frac{\wp(2v) - \wp u}{\wp(2v) - \wp(u+v)} + \log . \frac{\wp(3v) - \wp u}{\wp(3v) - \wp(u+v)},$$

of

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2} \log . \frac{\mathrm{X}_2 + 2\mathrm{X}_1 \sqrt{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}_2 - 2\mathrm{X}_1 \sqrt{\mathrm{X}}},$$

als men stelt

$$2x^2 - \mathrm{R}x + \mathrm{R} = \mathrm{X}_1\,, \quad 4x^4 - 2\mathrm{R}x^3 + 4\mathrm{R}x^2 + \mathrm{R}^2 x + \mathrm{R}(3\mathrm{R} - 4) = \mathrm{X}_2.$$

Vraagstuk XCVI.

Te bewijzen de stelling van LIE, volgens welke een oppervlakte constante kromming heeft, als het door de asymptotische lijnen in oneindig kleine ruiten van constante zijdenlengte verdeeld kan worden.

(J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

In de notatie van GAUSS is het lijnelement voorgesteld door

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2.$$

Stellen u = constant en v = constant de asymptotische lijnen voor, dan is bovendien $\mathrm{E}' = 0$, $\mathrm{G}' = 0$ (SALMON-FIEDLER, *Anal. Geom. des Raumes*, art. 57 en 174). Opdat de verdeeling in ruiten van constante zijdenlengte mogelijk zij, moet $\mathrm{E} = 1$, $\mathrm{G} = 1$ wezen.

In de notatie van SALMON heeft men dus

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \;\ldots\ldots\; 1), \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \;\ldots\ldots\; 2),$$

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = 1 - \mathrm{F}^2 \;.\; 3), \qquad \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma = 0 \;\ldots\; 4),$$

$$\mathrm{A}\alpha'' + \mathrm{B}\beta'' + \mathrm{C}\gamma'' = 0 \;.\; 5), \qquad \mathrm{A}\alpha' + \mathrm{B}\beta' + \mathrm{C}\gamma' = \mathrm{F}' \;.\; 6),$$

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0 \;\ldots\; 7), \qquad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = 0 \;..\; 8),$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \;\ldots\ldots\; 9), \qquad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = 0 \;.\; 10),$$

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} \;..\; 11), \qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} \;..\; 12).$$

Dus volgt uit 7) en 8)

$$\frac{\alpha'}{\mathrm{A}} = \frac{\beta'}{\mathrm{B}} = \frac{\gamma'}{\mathrm{C}} = \rho\,,$$

uit 4) en 9)

$$\frac{a' - a\mathrm{F}}{\alpha} = \frac{b' - b\mathrm{F}}{\beta} = \frac{c' - c\mathrm{F}}{\gamma} = \sigma$$

en uit 5) en 10)

$$\frac{a - a'\mathrm{F}}{\alpha''} = \frac{b - b'\mathrm{F}}{\beta''} = \frac{c - c'\mathrm{F}}{\gamma''} = \sigma_1.$$

Verder geeft differentiatie van 4) naar v

$$\sum \mathrm{A} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \sum \alpha \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = 0,$$

waaruit, wijl

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \alpha'}{\partial u}, \quad \sum \mathrm{A} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial u} \sum \mathrm{A}^2 + \rho \sum \mathrm{A} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}$$

is, volgt

$$-\left(\alpha \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + \beta \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + \gamma \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v}\right) = (1 - \mathrm{F}^2) \frac{\partial \rho}{\partial u} - \mathrm{F}\rho \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}.$$

Het linker lid dezer vergelijking kan vervormd worden. Men heeft

$$\sum \alpha \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a', & b', & c' \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sigma_1} \begin{vmatrix} a'-a\mathrm{F}, & b-'b\mathrm{F}, & c'-c\mathrm{F} \\ a & b & c \\ a-a'\mathrm{F}, & b-b'\mathrm{F}, & c-c'\mathrm{F} \end{vmatrix} + \frac{\rho}{\sigma} \begin{vmatrix} a'-a\mathrm{F}, & b'-b\mathrm{F}, & c'-c\mathrm{F} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ a', & b', & c' \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{F}(1-\mathrm{F}^2)\rho}{\sigma}.$$

Dus is

$$-(1 - \mathrm{F}^2) \frac{\partial \rho}{\partial u} + \mathrm{F}\rho \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = \frac{\mathrm{F}(1 - \mathrm{F}^2)\rho}{\sigma}.$$

Uit 4), 9), 12) volgt echter

$$\sigma(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = 1 - \mathrm{F}^2 = \sigma \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}.$$

Dus is

$$\frac{\mathrm{F}(1 - \mathrm{F}^2)\rho}{\sigma} = \mathrm{F}\rho \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$$

en de uitkomst

$$(1 - \mathrm{F}^2) \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0.$$

Wijl nu $1 - F^2 \neq 0$ is, als de asymptotische lijnen niet in elk punt samenvallen, heeft men met de voorwaarden $\frac{\partial\rho}{\partial u} = 0$ en $\frac{\partial\rho}{\partial v}$ te doen. Dus vinden we $\rho =$ constant.

De kromming in een willekeurig punt is $\frac{E'G' - F'^2}{(EG - F^2)^2} = - \rho^2$ en dus eveneens constant, wat te bewijzen was.

Vraagstuk XCVII.

Gegeven zijn twee symmetrisch congruente driehoeken ABC en A′B′C′. Gevraagd A′B′C′ zoo in het vlak te verplaatsen, dat de gelijkstandige hoekpunten weer even ver van elkaar verwijderd zijn als in de gegeven figuur. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, W. BOUWMAN *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. De gegeven driehoeken ABC en A′B′C′ zijn met elkaar tot samenvalling te brengen door ABC (fig. 41) om een zekere lijn l om te slaan (het spiegelbeeld A″B″C″ van ABC ten opzichte van l te construeeren) en in de richting van l te verschuiven. In verband hiermee liggen de middens A_0, B_0, C_0 van AA′, BB′, CC′ op een rechte lijn l (en zijn A′A″, B′B″, C′C″ aan elkaar gelijk) [1]).

2. Met behulp van deze bekende stelling, bewijst men gemakkelijk, dat het vraagstuk *twee symmetrisch congruente driehoeken ABC en A′B′C′ te construeeren, als de zijden en de afstanden der gelijknamige hoekpunten gegeven zijn*, drie oplossingen toelaat. Heeft men nl. ABC geconstrueerd, dan beschrijve men uit A, B, C cirkels met ½ AA′, ½ BB′, ½ CC′ tot stralen. Op deze zullen dan de drie punten A_0, B_0, C_0 in een rechte lijn gelegen zijn. Bovendien zal deze lijn l de drie cirkels ten tweeden male snijden in punten A_0' B_0' C_0' zoo op l gelegen, dat de drie segmenten A_0A_0', B_0B_0', C_0C_0',

[1]) Omtrent deze zoogenaamde „omlegging" vergelijke men E. STUDY's voortreffelijke verhandeling „Von den Bewegungen und Umlegungen" in de *Math. Ann.*, deel 39, blz. 441. (RED.).

ook als men op het teeken let, aan elkaar gelijk zijn (want deze koorden zijn aan AA″, BB″, CC″ gelijk. Dus is het vraagstuk der constructie van A′B′C′ teruggebracht tot de bepaling eener lijn l, waarvan drie gegeven cirkels gelijke stukken afsnijden.

3. De omhullende der lijn $ux + vy = 1 = 0$, op welke *twee* gegeven cirkels $x^2 + y^2 = r^2$ en $(x - a)^2 + y^2 = s^2$ koorden van gelijke lengte bepalen, is door de tangentiaalvergelijking

$$r^2 - \frac{1}{u^2 + v^2} = s^2 - \frac{(au + 1)^2}{u^2 + v^2}$$

gekenmerkt als een kromme van de tweede klasse. Gemakkelijk blijkt, dat ze een parabool is met de machtlijn m der cirkels (fig. 42) tot topraaklijn en het midden tusschen beide middelpunten gelegen punt F tot brandpunt. Vooreerst bepalen de beide cirkels op de machtlijn en op de lijn in het oneindige koorden met samenvallende uiteinden. Dus is de kromme een parabool (in bovenstaande vergelijking ontbreekt ook de bekende term), die de verbindingslijn AB der middelpunten tot as en de machtlijn der cirkels tot raaklijn loodrecht op de as, d. i. tot topraaklijn heeft. Verder zijn de vier gemeenschappelijke raaklijnen (koorden nul) raaklijnen der parabool en is het midden F van het segment AB tusschen de middelpunten dus brandpunt, wijl dit punt zich op deze raaklijnen in de topraaklijn projecteert.

Het vraagstuk der constructie van de lijn l, die in drie gegeven cirkels C_1, C_2, C_3 gelijke koorden bepaalt, is dus teruggebracht tot de bepaling der drie gemeenschappelijke raaklijnen van de drie parabolen $P_{2,3}$, $P_{3,1}$, $P_{1,2}$, die op de aangegeven wijs met de cirkelparen C_2C_3, C_3C_1, C_1C_2 in verband staan.

Elk der lijnen l doet twee oplossingen van het nieuwe vraagstuk kennen. Immers men kan van de drie gelijke segmenten A_0A_0', B_0B_0', C_0C_0' zoowel de uiteinden A_0' B_0' C_0' als de uiteinden A_0, B_0, C_0 voor de middens van AA′, BB′, CC′ aannemen. Dus heeft dit nieuwe vraagstuk in het algemeen zes oplossingen, die echter niet alle bestaanbaar behoeven te zijn.

4. De drie lijnen l van het nieuwe vraagstuk vormen een driehoek $l_1l_2l_3$, waarvan de omgeschreven cirkels de brand-

punten der drie parabolen d. w. z. de middens der zijden van driehoek ABC bevat; dus is de om driehoek $l_1 l_2 l_3$ beschreven cirkel de negenpuntscirkel van driehoek ABC.

Het hoogtepunt H van driehoek $l_1 l_2 l_3$ is een gemeenschappelijk punt der richtlijnen van de drie parabolen en als zoodanig gemakkelijk te construeeren.

5. Keeren we thans tot het oorspronkelijke vraagstuk terug, dan blijkt dat we een der drie lijnen l, bijv. l_1 kennen, wijl daar een der standen van driehoek $A_1B_1C_1$ gegeven is. Het tegenover l_1 gelegen hoekpunt van driehoek $l_1 l_2 l_3$ is dan een der beide snijpunten van den negenpuntscirkel van driehoek ABC met de loodlijnen uit H op l_1 neergelaten. Een van deze snijpunten ligt symmetrisch met H ten opzichte van l_1; het andere snijpunt is het bedoelde hoekpunt. Door dit hoekpunt met de beide snijpunten van l_1 en den negenpuntscirkel te verbinden vindt men l_2 en l_3.

6. De lijnen l_2, l_3 kunnen onbestaanbaar zijn. Dit gebeurt als l_1 den negenpuntscirkel niet snijdt. En al zijn l_1, l_2, l_3 alle bestaanbaar, dan nog kunnen de beide bij een der lijnen behoorende oplossingen van het vraagstuk onbestaanbaar worden, door dat deze lijn l op de drie cirkels onbestaanbare koorden bepaalt.

Wijl een der standen A′B′C′ gegeven is, snijdt een der lijnen l (fig. 41) de drie overeenkomstige cirkels zeker en is er zeker minstens een oplossing bestaanbaar, die welke verkregen wordt door driehoek A′B′C′ in de richting van l een translatie $A_0A_0' = B_0B_0' = C_0C_0'$ te geven.

Dit vraagstuk en vraagstuk 57 van deel II maken bijzondere gevallen uit van het volgende meer algemeene: *Een zeshoek te construeeren, als de negen diagonalen gegeven zijn.*

In het onderhavige geval is AC′BA′CB′ de zeshoek.

Aanmerking der Redactie. I. Denken we behalve driehoek ABC slechts de verschillen der vierkanten van AA′, BB′, CC′ gegeven, dan zijn $P_{2,3}$, $P_{3,1}$, $P_{1,2}$ even goed bepaald en dus ook het punt H. De driehoeken $l_1 l_2 l_3$ zijn dan veranderlijk doch steeds beschreven in den negenpuntscirkel van ABC en om den cirkel, waarin deze overgaat door de voerstralen van de negenpuntscirkel van H uitgaande tot op de helft te herleiden.

II. Door Mej. A. G. WIJTHOFF en den Heer W. BOUMAN is alleen de oplossing aangewezen, die door translatie van driehoek A′B′C′ ontstaat.

Vraagstuk XCVIII.

Een volkomen tweedemacht te vinden, die in eenig talstelsel met louter éénen wordt geschreven. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

a. Elk getal kan met TWEE eenen worden geschreven door voor het grondtal van het talstelsel het met een verminderde gegeven getal aan te nemen. Zoo zouden dus alle tweedemachten aan de vraag voldoen.

b. Geen tweedemacht wordt ooit met DRIE eenen geschreven. Noemt men x het grondtal van het talstelsel, y^2 het getal, dan zou de betrekking

$$x^2 + x + 1 = y^2,$$

of

$$(x + \tfrac{1}{2})^2 < y^2 < (x + 1)^2,$$

of

$$x + \tfrac{1}{2} < y < x + 1$$

moeten bestaan en dit is in geheele getallen onmogelijk.

c. Het getal 400 wordt in het zeventallig stelsel met VIER eenen geschreven, en dit geval is waarschijnlijk eenig. Het komt er namelijk op aan de vergelijking

$$x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

in geheele getallen op te lossen. Op het oog vindt men de oplossingen $(-1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, \pm 2)$. De rechte door de punten $(0, -1)$ en $(1, +2)$ snijdt de kromme 1) nog in het punt $(7, 20)$, waarmede bovengemelde oplossing van ons vraagstuk is gevonden. Het schijnt, dat elke andere wijze om rationale oplossingen te vinden, tot gebrokens leidt. Zoo is bijv. het tangentiaalpunt met de abscis x bepaald door de abscis $(x^4 - 2x^2 - 8x - 3) : (4x^3 + 4x^2 + 4x + 4)$, wat altijd een gebroken getal is, zooals men verifieert door achtereen-

volgens $x = \frac{p}{q}$, $x = 2a$, $x = 2a + 1$ te stellen en de deelbaarheid van teller en noemer door q en door 8 na te gaan.

d. Het getal 121 wordt in het drietallig stelsel met VIJF eenen geschreven, en dit geval is eenig. De vergelijking

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$$

leidt tot de ongelijkheden:

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x < y < x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1.$$

In geheele getallen is dit mogelijk, als x oneven en $y = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ is; substitueerende in de vergelijking vindt men $x = 3$ als eenige bruikbare wortel.

e. Er zijn geen tweedemachten, die met ZEVEN eenen worden geschreven; want men heeft

$$x^6 + x^5 + \ldots + 1 > (x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{5}{16})^2$$

en voor $x > 5$

$$x^6 + x^5 + \ldots + 1 < (x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{6}{16})^2.$$

Door beproeving vindt men, dat er geene oplossingen zijn met $x \leqq 5$, en voor $x > 5$ zijn zij er niet, omdat er geen geheel getal ligt tusschen

$$8x^3 + 4x^2 + 3x + \tfrac{5}{2} \text{ en } 8x^3 + 4x^2 + 3x + 3.$$

Vraagstuk XCIX.

In een vlak zijn negen punten gegeven. Men vraagt deze punten te verbinden door elkaar niet snijdende krommen, waarvan er vier van elk punt uitgaan en geen twee de beide uiteinden gemeen hebben. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

1. Heeft men een oplossing van zulk een vraagstuk, dan kan men blijkbaar een der punten in een willekeurige richting een weinig verplaatsen zonder het karakter der oplossing te wijzigen. Hieruit volgt, dat de onderlinge ligging der punten niets ter zake doet, hoe verward de figuur voor het ongeoefend oog moge schijnen. De lijnen verdeelen het vlak in een zeker aantal velden; bij deze rekenen wij ook het oneindige deel,

dat de figuur omringt. Van deze velden kan men er een tot een rechtlijnigen veelhoek maken, daarna een aangrenzend veld eveneens, enz. De figuur wordt dan een aaneenschakeling van veelhoeken, en kan beschouwd worden als de perspectief van een convex veelvlak op een der zijvlakken, als de distantie zeer klein is. Uit elk veelvlak is dus een figuur als de hier bedoelde af te leiden.

2. Het veelvlak voor ons vraagstuk heeft negen hoekpunten en achttien ribben, dus elf zijvlakken. Zijn er a_3 driehoeken, a_4 vierhoeken, enz, dan gelden de vergelijkingen:

$$a_3 + a_4 + \ldots = 11,$$
$$3a_3 + 4a_4 + \ldots = 2 \times 18 = 36.$$

In geheele positieve getallen bestaan de oplossingen:

$$A \ldots . \; a_3 = 8, \quad a_4 = 3.$$
$$B \ldots . \; a_3 = 9, \quad a_4 = 1, \; a_5 = 1.$$
$$C \ldots . \; a_3 = 10, \quad a_6 = 1.$$

Alleen A geeft ons werkelijk een veelvlak. Dit (fig. 43) stelle men zich voor door drie vierkanten 1234, 3975 en 8761 begrensd, waarvan de diagonalen 24, 95 en 86 vertikaal mogen staan; de driehoeken 456 en 298 zijn grondvlak en bovenvlak.

3. De oplossing van het gestelde vraagstuk is nu als volgt te beschrijven: Benoem de gegeven punten met de cijfers 1 tot 9; construeer achtereenvolgens (fig. 44) de figuren 1234, 239, 289, 128, 789, 3579, 567, 146, 345 zoodanig, dat zij geen der gegeven punten insluiten; een van alle mag echter de geheele figuur insluiten.

In de volgorde kan natuurlijk vrij wat variatie worden toegelaten; men moet ze echter zoo opgeven, dat er nooit een gebied van dubbelen samenhang ontstaat, omdat dit enkele punten onwillekeurig zou kunnen scheiden, die later moeten worden verbonden.

Vraagstuk C.

De inhoud van een gesloten kromme is gelijk aan het verschil der inhouden van de voetpuntskrommen van een willekeurig punt O met betrekking tot de gesloten kromme en haar ontwondene. Men vraagt dit te bewijzen. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. Mantel.

Als een rechte lijn oneindig weinig in een vlak wordt bewogen, dan beschrijft zij een perk gelijk aan den inhoud van het parallelogram met de lijn en het element der baan van haar midden tot zijden; daarbij behoeft de lengte der lijn zelfs niet standvastig te zijn.

Als een parallelogram zoo veranderd en bewogen wordt, dat het middelpunt zich evenwijdig aan een paar zijden beweegt, dan doorloopen de diagonalen gelijke perken, want de elementen der perken zijn beide gelijk aan den afstand van die twee zijden maal het element van den weg van het middelpunt.

Deze stelling toepassende op den rechthoek, gevormd door de raaklijn, de normaal en de loodlijnen daarop uit een vast punt, overtuigt men zich van het gestelde.

Aanmerking. In de figuren 45 en 46 zijn beide banen (Q) en (R) aangegeven voor het geval de oorspronkelijke kromme een ellips (P) is; in de eerste is O willekeurig gekozen, in de tweede is O een brandpunt der ellips (T. J. A.).

Vraagstuk CI.

Gevraagd een willekeurigen drievlakshoek zoo door een plat vlak te snijden, dat de doorsnee een rechthoekige driehoek is.

(Dr. P. Molenbroek.)

Opgelost *door* Mej. A. G. Wijthoff, T J. Allersma, Dr. P. Molenbroek, Dr. A. J. A. Prange, W. A. Poort *en* Dr. C. Stolp.

Oplossingen.

I. Trek in een der zijvlakken een willekeurige rechte, die de in dit zijvlak geleggen ribben in A en B snijdt. Plaats in A een vlak loodrecht op AB, dat de derde ribbe snijdt in C. Dan is de doorsnee met het vlak ABC rechthoekig in A.

II. Neem op twee der ribben de punten A en B zoo aan, dat de bol op AB als middellijn beschreven de derde ribbe in twee bestaanbare punten C snijdt; dan is de doorsnee ABC rechthoekig in C. (A. G. W.).

III. Laat uit een willekeurig punt A van de opstaande ribbe OA een loodlijn AA′ op het grondvlak neer. Vereenig A′ met een willekeurig punt B van de ribbe CB en trek in het grondvlak door B de lijn BC loodrecht op A′B; dan is de doorsnee ABC rechthoekig in B. (T. J. A.).

Aanmerking der Redactie. Houdt men het hoekpunt van den rechten hoek vast, dan omhult het vlak van doorsnee een kwadratischen kegel, die dit punt tot top heeft en de beide door dit punt gaande zijvlakken aanraakt volgens de loodlijnen in dit punt op de snijlijn dier vlakken opgericht.

Houdt men een der andere hoekpunten vast, bijv. in de derde oplossing het hoekpunt A, dan omhult BC een parabool, die A′ tot brandpunt en OB tot topraaklijn heeft. Dus omhult het vlak ABC dan eveneens een kwadratischen kegel.

Als de gegeven drievlakshoek een rechthoekigen standhoek heeft, zullen de beide omhullenden veranderingen ondergaan.

Vraagstuk CII.

Er zijn steeds drie bestaanbare punten aan te wijzen, die als centrum van inversie van gegeven macht kunnen dienst doen om een gegeven bol uit A als middelpunt beschreven te transformeeren in een anderen, die B tot middelpunt heeft. Men vraagt de ligging dezer drie punten ten opzichte van A en B te bepalen.

(Dr. P. Molenbroek.)

Opgelost *door* Dr. P. Molenbroek.

Oplossing.

1. Zij gegeven $AB = a$, de macht der inversie $\pm b^2$ en de straal r van bol (A). We stellen nu den straal van den bol (B) door r' en den in den zin van AB positief getelden afstand AX van A tot het inversiecentrum X door x voor. Dan gelden de beide betrekkingen

$$\frac{x}{r} = \pm \frac{x-a}{r'}, \quad \pm b^2 = \sqrt{x^2 - r^2}\,\sqrt{(x-a)^2 - r'^2},$$

waarin van de dubbele teekens steeds dezelfde genomen moeten worden (+ voor een uitwendig, — voor een inwendig inversiecentrum).

Uit de eerste volgt met dezelfde opmerking ten opzichte van het dubbele teeken

$$\pm \frac{x}{x-a} = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{(x-a)^2 - r^2}}$$

en dus in verband met de tweede voor beide gevallen

$$b^2 x = (x^2 - r^2)(x - a).$$

Nu heeft de derdemachtsvergelijking

$$(x^2 - r^2)(x - a) - b^2 x = 0$$

drie bestaanbare wortels. Want het eerste lid neemt voor

$$x = -\sqrt{b^2 + r^2},\ -r,\ 0,\ r,\ \sqrt{b^2 + r^2},\ \infty$$

de teekens $-$, $+$, $+$, $-$, $-$, $+$ aan. Zijn de wortels $x_1 < x_2 < x_3$, dan gelden dus de voorwaarden

$$-\sqrt{b^2 + r^2} < x_1 < -r,\ 0 < x_2 < r,\ \sqrt{b^2 + r^2} < x_3 < \infty,$$

waaruit men de ligging der drie bestaanbare inversiecentra X_1, X_2, X_3 onmiddellijk afleidt.

Vraagstuk CIII.

Van een driehoek is gegeven de basis, de tophoek en de hoek van Brocard. Men vraagt den driehoek te construeeren.

(Dr. P. H. Schoute.)

Opgelost *door* Mej. A. G. Wijthoff, T. J. Allersma, W. Bouwman, J. C. Kluyver *en* Dr. A. J. A. Prange.

Oplossingen.

I. We nemen een hoek XAY (fig. 47) gelijk aan den tophoek aan en op het been AX (ter constructie van een driehoek gelijkvormig met den gevraagden) een punt B willekeurig; daarna bepalen we het punt ω van Brocard door de hoeken ABω en YAω gelijk te maken aan den gegeven hoek V van Brocard. Door dan een cirkel te beschrijven door ω, die AB in B aanraakt, vindt men twee driehoeken ABC en ABC′ gelijkvormig met den gevraagden, enz.

De constructie is alleen mogelijk, als de cirkel de lijn AY snijdt. Dit gebeurt als Cot V $>$ Cot A $+$ 2 Tg$\frac{1}{2}$A is (W. B.)

II. Uit de betrekking Cot V = Cot A + Cot B + Cot C blijkt, dat in het opgegeven vraagstuk Cot B + Cot C of $\frac{a}{h_a}$ en dus ook h_a bekend is. Hiermede is het vraagstuk tot een ander bekend vraagstuk teruggebracht (A. G. W).

AANMERKING. Uit de betrekking

$$\frac{h_a}{a} = \frac{1}{\text{Cot V} - \text{Cot A}} = \frac{\text{Sin V} . \text{Sin}(180^\circ - \text{A})}{\text{Sin}(180^\circ - \text{A} + \text{V})}$$

volgt, dat h_a tevens de hoogte is van een driehoek BCD (fig. 48), die dezelfde basis en 180° — A en V tot basishoeken heeft. Ook uit de constructie van een driehoek, waarvan basis, hoogte en tophoek gegeven zijn, blijkt nu de bovengegeven mogelijksvoorwaarde (J. C. K.).

Vraagstuk CIV.

Op de zijden van een driehoek ABC worden binnen of buitenwaarts gelijkvormige driehoeken A_1BC, AB_1C, ABC_1 beschreven. Daarna laat men uit A loodlijnen neer op A_1B en A_1C en evenzoo op BC_1 en B_1C en verbindt men de voetpunten van elk der beide paren van loodlijnen. Te bewijzen, dat men door op overeenkomstige wijs in B en C te handelen zes lijnen van gelijke lengte verkrijgt. (N. CH. SPIJKER.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, W. BOUWMAN, W. MANTEL *en* N. CH. SPIJKER.

Oplossingen.

I. Duiden we in fig. 49 achtereenvolgens door

E_a, F_a, d_b, d_c de projecties van A op A_1C, A_1B, B_1C, BC_1,
F_b, D_b, e_c, e_a „ „ „ B „ B_1A, B_1C, C_1A, CA_1,
D_c, E_c, f_a, f_b „ „ „ C „ C_1B, C_1A, A_1B, AB_1

aan, dan zijn E_aF_a, F_bD_b, D_cE_c, d_bd_c, e_ce_a, f_af_b de zes bedoelde lijnen.

Zijn nu de hoeken A_1, B_1, C_1 door α, β, γ voorgesteld, dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken BAB_1 en C_1AC, die de hoeken in A gelijk hebben, terwijl de om die

hoeken gelegen zijden evenredig zijn, de betrekking

$$AA_1 \text{ Sin } \alpha = BB' \text{ Sin } B.$$

Dus is ook

$$AA_1 \text{ Sin } \alpha = BB_1 \text{ Sin } \beta = CC_1 \text{ Sin } C.$$

Wijl $AE_aA_1F_a$ een koordenvierhoek is, vindt men

$$AA_1 \text{ Sin } \alpha = E_aF_a\,;$$

dus is hiermee in verband met het bovenstaande de gelijkheid van E_aF_a, F_bD_b, D_cE_c aangetoond.

Verder zijn de driehoeken BAB_1 en d_cAd_b gelijkvormig, om dezelfde reden als boven; hieruit volgt $d_bd_c = BB_1 \text{ Sin } \beta$, enz.

(T. J. A.)

II. Het vraagstuk is opgelost, als we de betrekkingen $E_aF_a = d_bd_c$, $E_aF_a = e_ce_a$ aantoonen. Dit doen we door aan te wijzen, dat E_aF_a en d_bd_c elkaars spiegelbeelden zijn met betrekking tot de verbindingslijn M_bM_c der middens van CA en AB en E_aF_a en e_ce_a dezelfde ligging hebben met betrekking tot de loodlijn uit M_c op A_1C neergelaten.

De cirkel op AB als middellijn beschreven gaat o.a. door F_a. Hieruit volgt, dat de hoeken d_cF_aB en d_cAB gelijk zijn en dus, als we d_cF_aB met F_aBC en d^cAB met den daaraan gelijken hoek ABd_c vermeerderen, dat F_ad_c loodrecht staat op BC en derhalve door M_bM_c loodrecht middendoorgedeeld wordt. Met behulp van den op AC als middellijn beschreven cirkel vindt men geheel op dezelfde wijs, dat ook E_ad_b door M_bM_c loodrecht middendoorgedeeld wordt. Dus zijn E_aF_a en d_bd_c symmetrisch gelegen ten opzichte van M_bM_c.

Evenzoo wordt gemakkelijk bewezen, dat F_ae_c evenwijdig loopt met A_1C, terwijl e_aE_a langs A_1C valt. Wijl de loodlijn uit M_c op A_1C de beide segmenten e_aE_a en F_ae_c klaarblijkelijk loodrecht middendoordeelt, is derhalve $E_aF_a = e_ce_a$ (W. M.).

Aanmerking. Omtrent de ligging der projecties geldt nog het volgende:

a) De uiteinden der zes lijnen liggen *vier* aan *vier* op zes cirkels, die twee aan twee de punten M_a, M_b, M_c tot middelpunt hebben.

b) Elk der drie lijnen E_aF_a, F_bD_b, D_cE_c vormt met elk der drie lijnen d_bd_c, e_ce_a, f_af_b òf de beenen òf de diagonalen van een gelijkbeenig trapezium. Hierdoor ontstaan negen trapezia, waarvan de hoekpunten op negen nieuwe cirkels liggen.

(T. J. A.)

Vraagstuk CV.

Bewijs, dat de vorm

$$x - \binom{x+y}{2} + \binom{x+y+z}{3}$$

alle geheele positieve getallen en wel elk getal slecht éénmaal oplevert, als x, y, z onafhankelijk van elkaar alle geheele positieve waarden doorloopen. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* DR. J. DE VRIES.

Oplossing.

We stellen ons voor, dat er een reeks van getallen

$$F(x, y, z) = x + \phi(x+y) + \psi(x+y+z)$$

zoo bepaald moet worden, dat de reeks der natuurlijke getallen ontstaat, indien we onder $x+y+z$ den graad, onder $x+y$ de klasse en onder x den rang van het getal verstaande de getallen rangschikken, *eerst* naar den opklimmenden graad, daarna onder dezen naar de afdalende klasse en eindelijk in deze naar den opklimmenden rang.

Is de waarde van het getal $F(m-1, 1, n)$ door k voorgesteld, dan moet $F(1, m-2, n+1)$ volgens het bovenstaande de waarde $k+1$ hebben. Uit de twee vergelijkingen

$$k+1 = 1 + \phi(m-1) + \psi(m+n),$$
$$k = m - 1 + \phi(m) + \psi(m+n)$$

volgt dan door aftrekking

$$\phi(m-1) - \phi(m) = m - 1$$

en dus

$$\phi(2) - \phi(m) = \binom{m}{2} - 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1).$$

Wijl verder $F(1, n-1, 1)$ volgt op $F(1, 1, n-2)$ vindt men door aftrekking van de vergelijkingen

$$l + 1 = 1 + \phi(n) + \psi(n+1)$$
$$l = 1 + \phi(2) + \psi(n)$$

eveneens

$$\psi(n+1) - \psi(n) = 1 + \phi(2) - \phi(n) = \binom{n}{2}$$

en dus

$$\psi(n) - \psi(3) = \binom{n}{3} - 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2).$$

Voor het eerste getal wordt $1 + \phi(2) + \psi(3)$ gevonden. Daar dit de eenheid zijn moet is $\phi(2) + \psi(3) = 0$ en dus $\phi(2) = -\psi(3)$. Nemen we dus

$$\phi(2) = -1, \quad \psi(3) = 1,$$

dan vinden we uit 1) en 2

$$\phi(m) = -\binom{m}{2}, \quad \psi(n) = \binom{n}{3},$$

als in het vraagstuk is opgegeven.

Uit het bovenstaande volgt, dat de verzameling van punten met geheele positieve coördinaten met behulp van deze formule gerangschikt worden kan en dus een „abzählbare" verzameling is.

Aanmerking van den heer Mantel. Om bijv. het getal 31 door dien vorm voor te stellen, schrijve men de figuurlijke getallen aldus op:

1	2	3	4	5	....
1	3	6	10	15	....
1	4	10	20	35	....

In de laatste rij is 31 niet; het naast grootere is 35, dat 4 te veel is. In de tweede rij is 4 niet; het naast grootere is 6, dat 2 te veel is. In de bovenste rij is 2. Nu is gevonden

$$31 = 35 - 6 + 2 = \binom{7}{3} - \binom{4}{2} + \binom{2}{1}.$$

Zoo kan elk getal worden ontbonden in figuurlijke getallen met afwisselende teekens; door steeds het naast grootere te nemen worden de rangcijfers nooit klimmende, dus y en z positief. Begon men met een te groot getal, dan zou dit niet het geval zijn, bijv.

$$11 = 35 - 28 + 4 = \binom{7}{3} - \binom{8}{2} + \binom{4}{1}.$$

Vraagstuk CVI.

Maakt men van de notatie $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ gebruik en duidt men omgekeerd door $\varphi^{(-1)}(x)$ de functie $f(x)$ aan, waarvoor $\Delta f(x) = \varphi(x)$ is, dan geldt de betrekking

$$[\psi(x)\,\varphi(x)]^{-1} = \psi^{(-1)}(x)\,\varphi(x-1) - \psi^{(-2)}(x)\,\Delta\varphi(x-2) + \\ + \psi^{(-3)}(x)\,\Delta^2\varphi(x-3)\ldots.$$

Men vraagt deze betrekking te bewijzen zonder van de rekening met symbolen (BOOLE, *Treatise on the calculus of finite differences*, 3[de] ed., pag. 74) gebruik te maken. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

Volgens definitie is

$$\Delta\,[f(x)\,\phi\,(x-1)] = f(x+1)\,\phi\,(x) - f(x)\,\phi\,(x-1).$$

Vervangt men rechts $f(x+1)$ door $f(x) + \Delta\, f(x)$ en $\phi\,(x-1)$ door $\phi\,(x) - \Delta\,\phi\,(x-1)$, dan gaat de formule over in:

$$\Delta\,[f(x)\,\phi\,(x-1] = \phi\,(x)\,\Delta\,f(x) + f(x)\,\Delta\,\phi\,(x-1).$$

Hieruit vindt men door omkeering

$$[\phi\,(x)\,\Delta\,f(x)]^{(-1)} = \phi\,(x-1)\,f(x) - [f(x)\,\Delta\,\phi\,(x-1)]^{-1}.$$

Wordt nu $\Delta\,f(x)$ door $\psi\,(x)$, dus $f(x)$ door $\psi^{(-1)}(x)$ vervangen, dan levert herhaalde toepassing der laatste vergelijking achtereenvolgens

$$[\psi\,(x)\,\phi\,(x)]^{(-1)} = \psi^{(-1)}(x)\,\phi\,(x-1) - [\psi^{(-1)}(x)\,\Delta\,\phi\,(x-1)]^{(-1)},$$

$$-[\psi^{(-1)}(x)\Delta\phi(x-1)]^{(-1)} = -\psi^{(-2)}(x)\Delta\phi(x-2) + [\psi^{(-2)}(x)\Delta^2\phi(x-2)]^{(-1)},$$

$$[\psi^{(-2)}(x)\,\Delta^2\phi\,(x-2)]^{(-1)} = \psi^{(-3)}(x)\Delta^2\phi(x-3) - [\psi^{(-3)}(x)\Delta^3\phi(x-3)]^{(-1)},$$

enz. Door optelling vindt men dan:

$$[\psi\,(x)\,\phi\,(x)]^{(-1)} = \psi^{(-1)}(x)\,\phi\,(x-1) - \psi^{(-2)}(x)\,\Delta\,\phi\,(x-2) + \\ + \psi^{(-3)}(x)\,\Delta^2\phi\,(x-3) - \ldots.$$

Vraagstuk CVII.

Gaan de loodlijnen uit de middens van drie zijden van een vierhoek op de overstaande zijden neergelaten door een zelfde punt, dan kan om dien vierhoek een cirkel beschreven worden. Men vraagt het bewijs. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Mej. S. S. BOUWMEESTER, Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, W. BOUWMAN, W. MANTEL, W. A. POORT, Dr. A. J. A. PRANGE, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossingen.

I. Zoo als bekend is, hebben de drie lijnen, die de middens van de drie paren overstaande zijden van een volledigen

13*

vierhoek verbinden, een gemeenschappelijk midden O. Draait men nu den vierhoek om dit punt in zijn vlak een halven slag rond, dan gaan de drie gegeven lijnen, die we onbewegelijk denken, van „uit de middens op de overstaande zijden neergelaten loodlijnen" over in „in de middens dier overstaande zijden opgerichte loodlijnen"; van deze is het snijpunt juist het middelpunt des omgeschreven cirkels (W. M.)

II. Zijn (x_i, y_i) de coördinaten van het hoekpunt A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, dan zullen de vergelijkingen der drie uit de middens der zijden A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 op de zijden A_3A_4, A_4A_1, A_1A_2 neergelaten loodlijnen door

$$\{2y-(y_i+y_{i+1})\}(y_{i+2}-y_{i+3})+\{2x-(x_i+x_{i+1})\}(x_{i+2}-x_{i+3})=0$$

voor te stellen zijn, als men voor x_5, y_5 en x_6, y_6 weer x_1, y_1 en x_2, y_2 schrijft. Deze drie lijnen gaan door een zelfde punt onder de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} y_3-y_4, & x_3-x_4, & (y_1+y_2)(y_3-y_4)+(x_1+x_2)(x_3-x_4) \\ y_4-y_1, & x_4-x_1, & (y_2+y_3)(y_4-y_1)+(x_2+x_3)(x_4-x_1) \\ y_1-y_2, & x_1-x_2, & (y_3+y_4)(y_1-y_2)+(x_3+x_4)(x_1-x_2) \end{vmatrix}=0.$$

Trekken we dit af van de identiteit, die we verkrijgen, als we in dezen determinant de derde kolom vervangen door

$$\left.\begin{matrix} (y_3-y_4)\,\Sigma y+(x_3-x_4)\,\Sigma x \\ (y_4-y_1)\,\Sigma y+(x_4-x_1)\,\Sigma x \\ (y_1-y_2)\,\Sigma y+(x_1-x_2)\,\Sigma x \end{matrix}\right\},$$

dan vinden we

$$\begin{vmatrix} y_3-y_4, & x_3-x_4, & y_3^2-y_4^2+x_3^2-x_4^2 \\ y_4-y_1, & x_4-x_1, & y_4^2-y_1^2+x_4^2-x_1^2 \\ y_1-y_2, & x_1-x_2, & y_1^2-y_2^2+x_1^2-x_2^2 \end{vmatrix}=0.$$

Noemen we het eerste lid dezer vergelijking D, dan is

$$D=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2, & y_1+y_2, & x_1+x_2, & y_1^2+y_2^2+x_1^2+x_2^2 \\ 0, & y_3-y_4, & x_3-x_4, & y_3^2-y_4^2+x_3^2-x_4^2 \\ 0, & y_4-y_1, & x_4-x_1, & y_4^2-y_1^2+x_4^2-x_1^2 \\ 0, & y_1-y_2, & x_1-x_2, & y_1^2-y_2^2+x_1^2-x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & y_2, & x_2, & y_2^2+x_2^2 \\ 0, & y_3-y_4, & x_3-x_4, & y_3^2-y_4^2+x_3^2-x_4^2 \\ 0, & y_4-y_1, & x_4-x_1, & y_4^2-y_1^2+x_4^2-x_1^2 \\ 0, & y_1-y_2, & x_1-x_2, & y_1^2-y_2^2+x_1^2-x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & y_2, & x_2, & y_2^2 + x_2^2 \\ 1, & y_3, & x_3, & y_3^2 + x_3^2 \\ 1, & y_4, & x_4, & y_4^2 + x_4^2 \\ 1, & y_1, & x_1, & y_1^2 + x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Hieruit blijkt, dat de vergelijking $D = 0$ de voorwaarde uitdrukt, dat de vier punten op een cirkel liggen (A. J. A. P.)

AANMERKINGEN. I. Het snijpunt O van de drie verbindingslijnen der middens van overstaande zijden ligt:

a) Op de verbindingslijnen van de hoekpunten des koordenvierhoeks met de hoogtepunten der door de overige drie hoekpunten gevormde driehoeken.

b) Op de negenpuntscirkels dier driehoeken.

c) Op de lijnen van SIMSON van de hoekpunten ten opzichte van de driehoeken der andere hoekpunten (J. d. V.)

II. De oplossingen van Mej. BOUWMEESTER en de Heeren ALLERSMA, BOUWMAN, VAN RAAY en DE VRIES komen met de eerste, de oplossingen van Mej. WIJTHOFF en den Heer POORT komen met de tweede overeen. Alleen bij den Heer MANTEL echter is het denkbeeld van de draaiing aangegeven.

Vraagstuk CVIII.

Men vraagt twee kwadratische kegels zoo aan te nemen, dat de horizontale projectie hunner doorsnee een STEINER'sche hypocycloïde met drie keerpunten wordt. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES.

Oplossing.

We nemen in het verticale vlak een parabool (Fig. 50) aan, waarvan de as AX evenwijdig is aan de as van projectie en beschouwen deze parabool als de loodrechte doorsnee van een cylinder (kegel met oneindig ver gelegen top), die het eene oppervlak uitmaakt.

Het tweede oppervlak zal een kegel zijn, die een willekeurig gekozen punt M (M′, M″) van het cylinderoppervlak tot top en een nader te bepalen cirkel in het horizontale vlak tot richtlijn heeft. Deze cirkel (B) raakt de lijnen $M'R_1$ en

$M'R_2$, door M' onder 30° met de as van projectie getrokken, in de punten R_1 en R_2, waarin deze lijnen gesneden worden door den horizontalen doorgang van het vlak door M en de topbeschrijvende des cylinders, en is hierdoor bepaald.

Eerstens kan nu gemakkelijk bewezen worden, dat het raakvlak in M aan den cylinder den kegel aanraakt langs de beschrijvende lijn MT gelegen in het symmetrievlak evenwijdig aan het verticale vlak. Want uit de gelijkheid van DA en AC volgt de gelijkheid van TR_0 en R_0M', als T het snijpunt van $M'C$ met den horizontalen doorgang van het raakvlak aan den cylinder voorstelt, enz. Dus is M een keerpunt van de doorsnee en M' een keerpunt van de horizontale projectie. Verder is de raaklijn in elk der beide punten E_1, E_2, die door het hulpvlak $M''A_0R_0$ worden opgeleverd, loodrecht op het horizontale vlak gericht en zijn de punten E'_1, E'_2 dus keerpunten der projectie. Eindelijk snijdt de cirkel B de op den cylinder gelegen lijn l_∞ van het horizontale vlak in de onbestaanbare cirkelpunten en liggen deze dus op de projectie. Derhalve bezit de kromme van den vierden graad, die de horizontale projectie der doorsnee is, al de kenmerkende eigenschappen der STEINER'sche hypocycloïde met drie keerpunten.

Vraagstuk CIX.

Van een vlakke kromme van den vierden graad met een drievoudig punt zijn gegeven het drievoudig punt O en de beide paren toegevoegd onbestaanbare asymptoten. Men vraagt de kromme te construeeren. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES.

Oplossing.

1. Waren de vier asymptoten a_1, a_2, a_3, a_4 bestaanbaar, dan zou men volgens de stelling van Vraagstuk 65 de kromme punt voor punt kunnen construeeren door op iedere rechte r door O een punt P aan te nemen, dat aan de betrekking $OP = OA_1 + OA_2 + OA_3 + OA_4$ (A_i snijpunt van r met a_i) voldoet. Nu dit niet het geval is, kan men echter door middel van twee hulpkegelsneden tot hetzelfde doel geraken. Deze hulpkegelsneden gaan door O en hebben de paren van

toegevoegd onbestaanbare asymptoten der gezochte kromme tot asymptoten. Zijn nl. (a_1, a_2) en (a_3, a_4) de paren toegevoegde asymptoten en snijdt r de beide kegelsneden ten tweeden male in A′ en A″, dan is

$$OA_1 + OA_2 = OA', \quad OA_3 + OA_4 = OA''$$

en dus OP als som der bestaanbare segmenten OA′ en OA″ te bepalen.

2. Zijn de toegevoegd onbestaanbare asymptoten a_1, a_2 gegeven als de dubbelstralen eener elliptische involutie met de top M_1 bepaald door de paren (b_1, b_2), (c_1, c_2), dan is de overeenkomstige hulpkegelsnee K′ de kegelsnee door O, die M′ tot middelpunt en (b_1, b_2), (c_1, c_2) tot paren van toegevoegde middellijnen heeft. Met behulp van deze gegevens bepaalt men onmiddellijk zes punten van K′, zoodat deze punt voor punt kan worden geconstrueerd. In het bijzonder kan men met behulp van de stelling van PASCAL het tweede snijpunt A′ met een willekeurige rechte door O bepalen, enz.

3. De drie raaklijnen in O verkrijgt men door de symmetrische kegelsnee van K′ ten opzichte van O te bepalen en de drie van O verschillende snijpunten van deze met K″ te verbinden met O.

AANMERKINGEN. I. Hebben de asymptoten a_1 en a_3 en ook a_2 en a_4, onverschillig of ze bestaanbaar zijn of onbestaanbaar, dezelfde oneindig verre punten I′ en I″, dan zijn deze punten dubbelpunten der C^4. De rechten OI′ en OI″ hebben dan vijf punten met de kromme gemeen, zoodat de kromme zich in deze rechten en een kegelsnee splitsen moet.

II. Is een kromme C_n met een $n - 1$-voudig punt door haar gedeeltelijk paarsgewijs toegevoegd onbestaanbare asymptoten gegeven, dan kan zij langs dezen weg met behulp der stelling van Vraagstuk 65 worden geconstrueerd.

Vraagstuk CX.

Wordt een oppervlak F^n van den n^{den} graad door een kwadratisch oppervlak F^2 gesneden, dan ontstaat er een ruimtekromme R^{2n}, die $n(n-1)$ door een willekeurig punt P gaande koorden toelaat. Te bewijzen, dat deze koorden liggen op een kegel van den $n - 1^{sten}$ graad. (H. DE VRIES)

Opgelost *door* J. CARDINAAL *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* H. DE VRIES.

1. De kegel K^{2n} van den graad $2n$, die P tot top en R^{2n} tot richtlijn heeft, snijdt F^2 volgens een tweede kromme S^{2n} van den graad $2n$; want de volledige doorsnede van K^{2n} en F^2 is een kromme van den graad $4n$. Deze kromme S^{2n} is de meetkundige plaats van het tweede snijpunt B van F^2 met de rechte, die P verbindt met de punten A van R^{2n}. Twee overeenkomstige punten A en B van R^{2n} zijn dus op een rechte r door P harmonisch gescheiden van P en het snijpunt P_r van r met het poolvlak π van P ten opzichte van F^2; anders gezegd R^{2n} en S^{2n} zijn overeenkomstige krommen van twee perspectivische collineaire ruimtestelsels met P en π tot centrum en vlak van perspectief.

Uit het bovenstaande volgt, dat de snijpunten van R^{2n} en S^{2n} zich in twee groepen rangschikken. Eerstens is elk snijpunt van R^{2n} met π tevens een punt van S^{2n}. Ten tweede zal elk punt C buiten π gemeen aan R^{2n} en S^{2n} een tweede punt gemeen aan beide krommen opleveren, nl. het punt D, dat in de aangewezen overeenkomst involutorisch bij C behoort. Dus zullen de gemeenschappelijke punten buiten π paarsgewijs voorkomen en het aantal dier paren tevens het aantal door P gaande koorden van R^{2n} doen kennen.

Het aantal snijpunten van R^{2n} en S^{2n} is tevens dat van S^{2n} en F_n en als zoodanig $2n^2$. Trekt men hiervan de $2n$ in π gelegen punten van R^{2n} af, dan blijven er $n\,(n-1)$ buiten π gelegen paren gemeenschappelijke punten over. Dus gaan er door P een aantal van $n\,(n-1)$ koorden van R^{2n}.

De gevonden uitkomst, die hier met eenvoudige hulpmiddelen afgeleid is, is een bijzonder geval eener meer algemeene. Zoo als men weet, laat de snijkromme R^{mn} van F^m en F^n een aantal van $\frac{1}{2}\,mn\,(m-1)\,(n-1)$ door P gaande koorden toe (SALMON-FIEDLER, *Anal. Geom. des Raumes*, Auflage 3, Band 2, Art 106.)

2. Het in de aangewezen verwantschap met F^n overeenkomende oppervlak G^n heeft met F^n een ruimtekromme van den graad n^2 gemeen, die zich splitst in de vlakke doorsnee C^n van F^n met π en in een ruimtekromme van den graad $n(n-1)$. Deze ruimtekromme snijdt F^2 volgens de $2n\,(n-1)$ niet in π gelegen gemeenschappelijke punten van R^{2n} en S^{2n}.

In den bundel (F^n, G^n) komt een oppervlak voor, dat zich splitst in het vlak π en een oppervlak H^{n-1}. Dit oppervlak H^{n-1} gaat door de $2n(n-1)$ buiten π gelegen snijpunten van R^{2n} en S^{2n}. De doorsnee van F^2 en H^{n-1}, een ruimtekromme $T^{2(n-1)}$, gaat dus ook door die punten en heeft met betrekking tot P dus dezelfde koorden als R^{2n} en S^{2n}. Dus wordt zij uit P door een kegel L^{n-1} geprojecteerd. Op dezen kegel liggen nu ook de $n(n-1)$ koorden, enz.

Aanmerking van J. Cardinaal. Omtrent de ligging der $n(n-1)$ dubbelstralen des kegels, die R^{2n} uit P projecteert, geeft de te bewijzen stelling slechts ten deele uitkomst. Volgens een verhandeling van Cayley (*Journal von Crelle*, deel 111, blz. 347) schijnt Halphen zich met deze kwestie het eerst beziggehouden te hebben, ofschoon de plaats, waar hij dit doet, niet wordt vermeld. Cayley merkt op, dat de ligging dezer dubbelstralen niet volledig wordt omschreven door den graad aan te geven van den kegel van den hoogsten graad, waarop zij gelegen zijn, maar dat zij ook op kegels van hoogere graden gelegen zijn. Waaruit dan volgt, dat de $n(n-1)$ dubbelstralen in het algemeen geen willekeurige stralen van een kegel van den $(n-1)^{sten}$ graad zijn. Als voorbeeld geeft Cayley o.a. den kegel aan, gevormd door de 12 dubbelstralen van het geval $n = 4$. De kegel van den laagsten graad door deze 12 stralen is van den derden graad; maar de genoemde stralen liggen ook op een kegel van den vierden graad en hebben dus de bijzondere ligging aan de doorsnijdingsstralen dezer twee kegels eigen. Overigens geldt de stelling niet alleen voor de doorsnijdingen, gevormd door kwadratische oppervlakken, maar voor elke willekeurige kromme. Zijn m en n de graden van de oppervlakken, dan is de laagste graad van den kegel door de dubbelstralen $(m-1)(n-1)$. Het bewijs wordt door Cayley gegeven voor een oppervlak van den derden en een van den vierden graad. Past men zijn methode toe op het gegeven geval, dan verkrijgt men het volgende bewijs, dat dus als een omzetting van het zijne te beschouwen is:

Men schrijve de vergelijkingen der oppervlakken F^2 en F^n in den vorm

$$a_0 x_4^2 + a_1 x_4 + a_2 = 0\,,$$
$$b_0 x_4^n + b_1 x_4^{n-1} + b_2 x_4^{n-2} + \ldots . \; b_{n-1} x_4 + b_n = 0\,;$$

hierin stellen a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 .... b_n algebraische vormen in x_1, x_2, x_3 voor van den graad, door den index aangeduid. Elimineert men x_4 tusschen deze vergelijkingen en gaat men tot cartesische coördinaten over, dan heeft men de vergelijking van den kegel met den oorsprong als top en R^{2n} als richtkromme. Deze kan, gelijk bekend is, in den vorm van een determinant geschreven worden. Vormt men evenwel in plaats van den volledigen determinant, den onvolledigen, ontstaan door de eerste vergelijking met x_4^{n-2}, x_4^{n-3} ... x_4, 1 te vermenigvuldigen en de tweede onveranderd te laten, dan verkrijgt men:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & a_0 \quad a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_0 \quad a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Deze determinant, die uit n rijen en $n+1$ kolommen bestaat, geeft tot $n+1$ determinanten aanleiding; stelt men elk dezer determinanten afzonderlijk nul, dan geeft elk een kegel van zekeren graad, die door de $n(n-1)$ dubbelstralen gaat. De determinant van den laagsten graad wordt verkregen door weglating der laatste kolom; zijn graad is $n-1$. De overige geven de kegels van hoogere graden. Slechts als $n = 3$ is zijn de $n(n-1) = 6$ dubbelstralen 6 willekeurig gelegen stralen van een kwadratischen kegel.

Voor verdere bijzonderheden wordt naar het aangehaalde stuk verwezen.

Vraagstuk CXI.

Op de zijden BC, CA, AB van een gegeven driehoek ABC construeert men de driehoeken A'BC, B'CA, C'AB gelijkvormig met een anderen gegeven driehoek $\alpha\beta\gamma$. Te bewijzen, dat men een driehoek A"B"C" construeeren kan, waarvan de zijden gelijk en evenwijdig zijn aan AA', BB', CC', en dat deze driehoek A"B"C" alleen dan gelijkvormig is met driehoek A'B'C', als A', B', C' de middelpunten zijn van de in- of uitwendig op de zijden van ABC beschreven vierkanten. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* J. NEUBERG.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

1. De methode der equipollenties kan een eenvoudige oplossing van dit vraagstuk verschaffen.

Stellen a, b, c naar richting en grootte de zijden BC, CA, AB van den gegeven driehoek ABC voor, dan kunnen we stellen

$$BA' = \lambda a \quad , \quad A'C = \mu a ,$$
$$CB' = \lambda b \quad , \quad B'A = \mu b ,$$
$$AC' = \lambda c \quad , \quad C'B = \mu c ,$$

waarin λ en μ constante complexe grootheden zijn, die van den vorm van driehoek $\alpha\beta\gamma$ afhangen. Wijl $BC = BA' + A'C$ is, geldt de betrekking $\lambda + \mu = 1$.

Hieruit volgt dadelijk

$$AA' = c + \lambda a, \quad BB' = a + \lambda b, \quad CC' = b + \lambda c$$

en dus

$$AA' + BB' + CC' = (a + b + c)(1 + \lambda),$$

wat nul is, omdat $a + b + c$ verdwijnt. Dus zijn AA′, BB′, CC′ equipollent met de zijden van een driehoek A″B″C″.

2. Men vindt verder

$$B'C' = \mu b + \lambda c \quad , \quad C'A' = \mu c + \lambda a.$$

Nu zijn de driehoeken A″B″C″ en A′B′C′ gelijkvormig onder de voorwaarde

$$\frac{B'C'}{C'A'} = \frac{B''C''}{C''A''}, \text{ of } \frac{B'C'}{C'A'} = \frac{AA'}{BB'},$$

of

$$\frac{\mu b + \lambda c}{\mu c + \lambda a} = \frac{c + \lambda a}{a + \lambda b} = \frac{c(\lambda + \mu) + \lambda a}{a(\lambda + \mu) + \lambda b} = \frac{\mu c - \lambda b}{\mu a - \lambda c}.$$

Deze voorwaarde laat zich schrijven in den vorm

$$(\lambda^2 + \mu^2)(ab - c^2) = 0.$$

Aan de vergelijking $ab - c^2 = 0$ is alleen voldaan, als de gegeven driehoek ABC gelijkzijdig is. Want met behulp van de betrekking $a + b + c = 0$ gaat zij over in $a^2 + ab + b^2 = 0$, of $\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, die zich splitst in mod. $\frac{a}{b} = 1$ en arg. $\frac{a}{b} = 120^\circ$. In het algemeene geval van een ongelijkzijdigen driehoek ABC treedt de verlangde gelijkvormigheid

dus alleen in onder de voorwaarde $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ of $\lambda = \pm \mu\sqrt{-1}$, dat is als de driehoek $\alpha\beta\gamma$ gelijkbeenig rechthoekig is en de rechte hoek zich in α bevindt.

3. In het bijzonder geval $\lambda = \pm \mu\sqrt{-1}$ zijn de lijnen AA′, BB′, CC′ achtereenvolgens loodrecht gericht op B′C′, C′A′, A′B′ en gelijk aan deze. Dan is nl. $AA' = B'C'\sqrt{-1}$. Dit wordt (fig. 51) ook gemakkelijk meetkundig aangetoond. Want als D, E, F de middens zijn van BC, CA, AB, zijn AA′ en B′C′ de sluitlijnen der segmentenveelhoeken AEDA′ en B′EFC, waarvan de samenstellende segmenten twee aan twee gelijk zijn en in behoorlijken zin loodrecht op elkaar staan ($AE = iB'E$, $ED = iFC'$, $DA' = iEF$).

Aanmerkingen. I. Omtrent dit vraagstuk vergelijke men o.a. de „Notes de géométrie" van den voorsteller (*Annuaire de l'association française*, Congres van Besançon, 1893, blz. 34).

II. Construeert men het parallelogram AC′CD (fig. 52) en vereenigt men D met A′ en B′, dan bewijst men gemakkelijk, dat de driehoeken B′CD en CAB gelijkvormig zijn. Hieruit volgt dan spoedig, dat B′BA′D een parallelogram is en de zijden van driehoek DAA′ gelijk en evenwijdig zijn met AA′, BB′, CC′. Dit is de gang van de door den Heer Allersma ingezonden oplossing van het eerste gedeelte.

Vraagstuk CXII.

De vergelijking $y = \dfrac{\sin^5 x}{\sin 5x}$ te onderzoeken.

(J. Neuberg.)

Opgelost *door* T. J. Allersma *en* P. de Wijs.

Oplossing *van* P. de Wijs.

1. De functie $\dfrac{\sin^5 x}{\sin 5x}$ is periodiek (periode $= \pi$); de kromme bestaat dus uit oneindig veel congruente deelen. Het onderzoek kan zich echter bepalen tot het gedeelte begrepen tusschen $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$, want vervanging van x door $\pi - x$ verandert de vergelijking niet. Dus is de kromme symmetrisch met betrekking tot de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

Wij vinden

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5 \operatorname{Sin}^4 x \operatorname{Sin} 4x}{\operatorname{Sin}^2 5x},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 10\, \frac{\operatorname{Sin}^3 x}{\operatorname{Sin}^3 5x} (2 \operatorname{Sin}^2 x + 2 \operatorname{Sin}^2 4x - \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} 4x \operatorname{Cos} 3x).$$

2. Het verloop der kromme (fig. 53) wordt gevonden uit de constructie der volgende punten

$$\begin{array}{llll}
x = 0, & y = 0 & , y' = 0 , & (y \text{ minimum}), \\
x = \frac{1}{6}\pi, & y = \frac{1}{16} & , & \\
x = \frac{1}{5}\pi, & y = \pm \infty & , y' = \infty & \\
x = \frac{1}{4}\pi, & y = -\frac{1}{4} & , y' = 0 , & (y \text{ maximum}), \\
x = \frac{1}{3}\pi, & y = -\frac{9}{16}, & & \\
x = \frac{2}{5}\pi, & y = \mp \infty & , y' = \infty & \\
x = \frac{1}{2}\pi, & y = 1 & , y' = 0 , & (y \text{ minimum}).
\end{array}$$

Wijl $2(\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Sin}^2 4x)$ grooter is dan $4 \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} 4x$ en dus a fortiori grooter is dan $\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} 4x \operatorname{Cos} 3x$, komt y'' in teeken steeds met $\frac{\operatorname{Sin}^5 x}{\operatorname{Sin} 5x}$, d. i. met y overeen. Dus keert de kromme overal de bolle zijde naar de x-as (geen buigpunten.)

Aanmerking. Men bewijst gemakkelijk, dat het oppervlak tusschen de kromme en de x-as niet tot een eindige grens nadert door voor elk der intervallen

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}\right), \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}\right), \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$$

de integraal van $\frac{\operatorname{Sin}^5 x}{\operatorname{Sin} 5x}\, dx$ te vergelijken met de integraal van $\frac{1}{\operatorname{Sin} 5x}\, dx$, de laatste telkens vermenigvuldigd met de kleinste volstrekte waarde van $\operatorname{Sin}^5 x$ over het interval. In elk dier gevallen wordt nl. zelfs de integraal van $\frac{1}{\operatorname{Sin} 5x}\, dx$ oneindig.

Vraagstuk CXIII.

Men vraagt de coefficienten a_{rs} der vergelijkingen

$$x_r = a_{r1} y_1 + a_{r2} y_2 + \ldots + a_{rs} y_s + \ldots a_{rn} y_n \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

zoo te bepalen, dat men de oplossingen naar y_s $(s = 1, 2, \dots n)$ vindt door x en y te verwisselen. (C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* C. VAN ALLER.

We sporen aanvankelijk de voorwaarden op, waaraan de coëfficiënten in de oorspronkelijke vergelijkingen, die we de vergelijkingen 1) zullen noemen, moeten voldoen, opdat de lineaire uitdrukkingen, die men na oplossing der grootheden y_s verkrijgt, coëfficiënten hebben, die *evenredig* zijn met die van de tweede leden der vergelijkingen 1). Onderstellen we derhalve

$$y_s = m\,(a_{s_1}x_1 + a_{s_2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n)\,,\ (s = 1, 2 \dots n) \,..\, 2),$$

dan zullen deze waarden de vergelijkingen 1) identiek moeten maken. Door substitutie van 2) in de vergelijking

$$x_r = a_{r_1}y_1 + a_{r_2}y_2 + \dots + a_{rn}y_n$$

vindt men in het tweede lid als coëfficiënt van x_s

$$m\,(a_{r_1}a_{1s} + a_{r_2}a_{2s} + \dots + a_{rn}a_{ns}) \quad \dots \quad 3),$$

welke uitdrukking gelijk nul moet zijn, als r en s ongelijk zijn en voorts voor de n verschillende waarden van r dezelfde waarden moet aannemen, als r en s aan elkaar gelijk zijn.

In de eerste plaats zal dus, daar m niet nul kan zijn,

$$a_{r_1}a_{1s} + a_{r_2}a_{2s} + \dots + a_{rn}a_{ns} = 0 \quad \dots \quad 4)$$

moeten zijn, als voor r en s twee ongelijke getallen uit de rij $1, 2 \dots n$ worden gesubstitueerd. Nemen we $r = 1$ en $s = 2$, dan vindt men uit de verkregen betrekking

$$a_{11} + a_{22} = -\frac{a_{13}a_{32} + a_{14}a_{42} + \dots + a_{1n}a_{n2}}{a_{12}} \quad \dots \quad 5)$$

en als we stellen $r = 2$, $s = 1$

$$a_{22} + a_{11} = -\frac{a_{23}a_{31} + a_{24}a_{41} + \dots + a_{2n}a_{n1}}{a_{21}} \quad \dots \quad 6).$$

De gevraagde coëfficiënten moeten zoodanig worden gekozen, dat de beide uitdrukkingen voor $a_{11} + a_{22}$ gevonden aan elkaar gelijk worden. Men kan hieraan voldoen door ze afhankelijk te maken van nieuw in te voeren grootheden $p_1, p_2, \dots p_n$, $q_1, q_2, \dots q_n$ en te stellen

$$a_{rs} = p_r q_s \quad \dots \dots \quad 7),$$

waarbij we blijven aannemen, dat r en s verschillen. De betrekkingen 5) en 6) gaan daardoor beide over in

$$a_{11} + a_{22} = -(p_3q_3 + p_4q_4 + \dots + p_nq_n),$$

of, als we stellen

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8),$$

in

$$a_{11} + a_{22} = -S + p_1q_1 + p_2q_2.$$

Even als voor $a_{11} + a_{22}$ kan men uit 4) in het algemeen voor $a_{rr} + a_{ss}$ twee verschillende uitdrukkingen vinden; de substitutie 7) doet beide overgaan in

$$a_{rr} + a_{ss} = -S + p_rq_r + p_sq_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9).$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af

$$a_{11} - p_1q_1 = a_{22} - p_2q_2 = a_{rr} - p_rq_r = \dots = -\frac{S}{2},$$

of voor eene willekeurige waarde van r

$$a_{rr} = p_rq_r - \frac{S}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10).$$

In de tweede plaats moet de uitdrukking 3) onafhankelijk zijn van r als r en s gelijk zijn. Substitueeren we nu in deze onderstelling de waarden voor a_{rs} en a_{rr} uit 7) en 10) in die uitdrukking, dan vinden we met weglating van den factor m

$$a_{r1}a_{1r} + a_{r2}a_{2r} + \dots + a_{rn}a_{nr} =$$

$$= p_rq_r\{p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_{r-1}q_{r-1} + p_{r+1}q_{r+1} + \dots + p_nq_n\} +$$

$$+ \left(p_rq_r - \frac{S}{2}\right)^2 = p_rq_r(S - p_rq_r) + \left(p_rq_r - \frac{S}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{4} \; . \; . \; 11)$$

een waarde, die werkelijk niet verandert met r.

Het blijkt dus dat de substituties 7) en 10) de uitdrukking 3) aan de beide haar gestelde eischen doen beantwoorden. De gevraagde vergelijkingen hebben derhalve den vorm:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \left(p_1q_1 - \frac{S}{2}\right)y_1 + p_1q_2y_2 + p_1q_3y_3 + \dots \\ x_2 = p_2q_1y_1 + \left(p_2q_2 - \frac{S}{2}\right)y_2 + p_2q_3y_3 + \dots \\ x_3 = p_3q_1y_1 + p_3q_2y_2 + \left(p_3q_3 - \frac{S}{2}\right)y_3 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \; . \; . \; 12),$$

waarin de grootheden p en q willekeurig kunnen gekozen worden en S gevonden wordt uit 8).

Lost men nu uit deze vergelijkingen $y_1 \ldots . y_n$ op, dan verkrijgt men dezelfde vergelijkingen terug met verwisseling van x en y en slechts met dit onderscheid, dat alle coëfficiënten in de tweede leden met een zekeren factor m zijn vermenigvuldigd. Hierbij zij opgemerkt, dat de gestelde opgave met het voorgaande reeds opgelost is, als slechts wordt gelet op de onderlinge verhoudingen van de grootheden x en van de grootheden y; dit is b.v. het geval als $x_1 \ldots . x_n$ en $y_1 \ldots . y_n$ homogene coördinaten zijn van punten in de ruimte met $n-1$ afmetingen.

Men kan echter gemakkelijk bereiken, dat de bedoelde factor m gelijk aan de eenheid wordt, waardoor zonder eenig voorbehoud aan de voorwaarde in de opgave wordt voldaan. Noemen we Δ den determinant van het stelsel 12), dan is de determinant van het stelsel, dat door de oplossing van $y_1\, y_2 \ldots . y_n$ wordt verkregen, gelijk aan $\frac{\Delta^{n-1}}{\Delta^n} = \frac{1}{\Delta}$. Zoodra $\Delta = \pm 1$ is, wordt dus de overeenstemming in coëfficiënten van de vergelijking 12) met die van haar oplossingen in y volkomen. Ten einde

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - \frac{S}{2} & p_1 q_2 & p_1 q_3 & \ldots . \\ p_2 q_1 & p_2 q_2 - \frac{S}{2} & p_2 q_3 & \ldots . \\ p_3 q_1 & p_3 q_2 & p_3 q_3 - \frac{S}{2} & \ldots . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

te berekenen, verwisselen we rijen met kolommen en passen we op beide determinanten den regel voor de vermenigvuldiging van determinanten toe. We vinden dan, lettende op 4) en 11),

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{4} & 0 & 0 & \ldots . \\ 0 & \frac{S}{4} & 0 & \ldots . \\ 0 & 0 & \frac{S_2}{4} & \ldots . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \left(\frac{S^2}{4}\right)^n,$$

of $\Delta = \pm \left(\frac{S}{2}\right)^n$. Worden dus alle elementen van Δ met $\frac{2}{S}$ vermenigvuldigd, dan wordt de determinant gelijk aan $\pm$ 1; met denzelfden factor behooren derhalve ook de tweede leden van de vergelijking 12) te worden vermenigvuldigd om aan de eischen der opgave te voldoen.

VOORBEELD. Nemen we $n = 3$, $p_1 = 3$, $p_2 = 6$, $p_3 = 5$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $q_3 = -2$, dan wordt $S = 2$; de vergelijkingen worden nu

$$x_1 = 5\,y_1 + 3\,y_2 - 6\,y_3,$$
$$x_2 = 12\,y_1 + 5\,y_2 - 12\,y_3,$$
$$x_3 = 10\,y_1 + 5\,y_2 - 11\,y_3.$$

Werkelijk worden nu y_1, y_2 en y_3 hieruit opgelost, als men slechts de letters x en y verwisselt.

OPMERKING. In het geval, dat $x_1 \ldots x_n$ en $y_1 \ldots y_n$ homogene coördinaten zijn van punten in de ruimte met $n - 1$ afmetingen, zooals we boven onderstelden, wordt door de vergelijkingen 12) een transformatie uitgedrukt, die zoowel het punt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ overbrengt naar het punt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, als het laatste naar het eerste. Deze transformatie is een *homologie*. Het punt $(p_1, p_2 \ldots p_n)$ is nl. een dubbelpunt; want voor $y_1 = p_1$, $y_2 = p_2, \ldots y_n = p_n$ wordt gevonden $x_1 = \frac{S}{2} p_1$, $x_2 = \frac{S}{2} p_2, \ldots x_n = \frac{S}{2} p_n$. Voorts is nog $q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots q_n y_n = 0$ een meetkundige plaats van dubbelpunten. Het laatste blijkt o. a. gemakkelijk, als men 12) in den vorm

$$x_1 = -\frac{S}{2} y_1 + p_1 (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots q_n y_n),$$

$$x_2 = -\frac{S}{2} y_2 + p_2 (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots q_n y_n),$$

$$x_3 = -\frac{S}{2} y_3 + p_3 (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots q_n y_n)$$

schrijft. In het geval van $n = 3$ b.v. is dus (p_1, p_2, p_3) het middelpunt van homologie en $q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0$ de vergelijking van de as van homologie. Daar de transformatie involutorisch is, is blijkbaar de anharmonische verhouding, die bij de homologe transformatie optreedt, gelijk aan $-$ 1.

Vraagstuk CXIV.

Men neemt van de ruimtekromme R^{pq}, volgens welke twee oppervlakken F^p en F^q elkaar snijden, twee koorden a en b aan; gevraagd hoeveel koorden van R^{pq} bovendien a en b snijden.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL, W. A. POORT *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* H. DE VRIES.

Door een willekeurig punt in de ruimte gaan in het algemeen $\frac{1}{2}pq(p-1)(q-1)$ koorden van de doorsnede R^{pq} van twee oppervlakken van de graden p en q; door een willekeurig punt van de gegeven koorde a zelf gaan er dus behalve a nog $\frac{1}{2}pq(p-1)(q-1)-1$. Van het oppervlak F, dat gevormd wordt door de koorden van R^{pq} die a snijden, is de lijn a dus een $\{\frac{1}{2}pq(p-1)(q-1)-1\}$-voudige rechte.

Ieder plat vlak V door a snijdt R^{pq} in $pq-2$ punten, die niet op a liggen en die twee aan twee verbonden kunnen worden door $\frac{1}{2}(pq-2)(pq-3)$ koorden van R^{pq} die a snijden; deze koorden vormen met de lijn a de volledige doorsnede van het vlak V met het oppervlak F. Want door ieder willekeurig punt P dezer doorsnede, dat niet op a ligt, moet een koorde van R^{pq} gaan, die a snijdt en derhalve geheel in het vlak V ligt. De graad m van het oppervlak F is dus

$$\frac{1}{2}pq(p-1)(q-1)-1+\frac{1}{2}(pq-2)(pq-3)$$

of

$$p^2q^2-\frac{1}{2}pq(p+q)-2pq+2.$$

Eigenlijk zouden aan het oppervlak F nog toegevoegd moeten worden de beide kegels van den graad $(pq-1)$, waardoor R^{pq} uit haar beide snijpunten met a geprojecteerd wordt; want de beschrijvende lijnen dezer kegels zijn ook koorden van R^{pq} die a snijden. Wij zullen echter deze kegels weglaten, wijl zij oneigenlijke oplossingen van het vraagstuk bevatten.

Aangezien een willekeurige rechte b het oppervlak F in m punten snijdt, is m het aantal koorden van R^{pq}, die de koorde a en een willekeurige rechte b snijden. Is echter ook b een koorde van R^{pq}, dan moeten van dit aantal m nog de $2(pq-3)$ oneigenlijke oplossingen worden afgetrokken, die men verkrijgt, als men door elk der beide snijpunten B_1, B_2 van b met R^{pq}

en a een vlak brengt, R^{pq} door deze vlakken snijdt en de $(pq-3)$ snijpunten in het vlak door B_i met B_i $(i=1,\ 2)$ verbindt. Het aantal oplossingen van het vraagstuk is dus

$$\{p^2q^2 - \tfrac{1}{2}pq(p+q) - 2pq + 2\} - 2(pq-3)$$

of

$$p^2q^2 - \tfrac{1}{2}pq(p+q+8) + 8.$$

Vraagstuk CXV.

Hoeveel driepuntige koorden van de kromme R^{pq} uit het vorige vraagstuk (rechten, die met R^{pq} drie punten gemeen hebben) snijden tevens de koorde a? (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL.

Oplossing.

Stelt men den graad der kromme door m, het aantal harer schijnbare dubbelpunten door h voor, dan duidt $(m-2)[h-\frac{1}{6}m(m-1)]$ den graad van het oppervlak der driepuntige koorden, $h-m+2$ den graad van veelvoudigheid van R^m op dit oppervlak aan.

Het gevraagde aantal wordt dus voorgesteld door

$$(m-2)[h-\tfrac{1}{6}m(m-1)] - 2(h-m+2),$$

wat zich na invoeging der waarden

$$m = pq, \qquad h = \tfrac{1}{2}pq(p-1)(q-1)$$

herleidt tot

$$\tfrac{1}{6}(pq-4)\{3pq(p-1)(q-1) - (pq-2)(pq+3)\}$$

Dit aantal verkrijgt de kleinste waarde, die van nul verschilt, nl. 4, voor $p=2$, $q=4$.

Vraagstuk CXVI.

Men vraagt de waarde te bepalen van

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax\,dx}{e^{bx}-1}$$ (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER, W. A. POORT, Dr. C. STOLP *en* P. DE WIJS.

Oplossing *van* J. C. KLUYVER.

We beschouwen de functie $f(z) = \dfrac{\text{Sin}\, az}{e^{bz} - 1}$ van de complexe veranderlijke $z = x + iy$. Deze functie is eenwaardig en eindig binnen den rechthoek OABC (fig. 54) met de hoekpunten 0, k, $k + \dfrac{2\pi i}{b}$, $\dfrac{2\pi i}{b}$, mits men het laatste hoekpunt C met behulp van een kleinen kwartcirkel DE van den rechthoek afsnijdt. Het punt C toch is een enkelvoudige pool van $f(z)$.

De integraal, genomen langs den omtrek OABDEO, is nul. Derhalve heeft men

$$\int_0^k \frac{\text{Sin}\, ax}{e^{bx} - 1} dx + i \int_0^{\frac{2\pi}{b}} \frac{\text{Sin}\, a\,(k + iy)}{e^{b\,(k+iy)} - 1} dy + \int_k^{\delta} \frac{\text{Sin}\, a\left(x + \dfrac{2\pi i}{b}\right)}{e^{bx} - 1} dx$$

$$+ i \int_{\frac{2\pi}{b} - \delta}^{0} \frac{\text{Sin}\, aiy}{e^{biy} - 1} dy + \int_{\widehat{\text{DE}}} f(z)\, dz = 0.$$

Nu is de laatste integraal volgens de stelling van CAUCHY

$$-\frac{\pi}{2} i \,\text{Lim} \left[\frac{\text{Sin}\, ax\left(x - \dfrac{2\pi i}{b}\right)}{e^{bx} - 1}\right]_{x = \frac{2\pi i}{b}} = \frac{\pi}{4b}\left(e^{\frac{2\pi a}{b}} - e^{-\frac{2\pi a}{b}}\right).$$

Laat men nu in de som der randintegralen k oneindig worden, dan vindt men door de beschouwing der bestaanbare gedeelten

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}\, ax}{e^{bx} - 1} dx + \text{Cos}\, \frac{2\pi a i}{b} \int_{\infty}^{\delta} \frac{\text{Sin}\, ax}{e^{bx} - 1} dx + \frac{1}{4} \int_{\frac{2\pi}{b} - \delta}^{0} (e^{ay} - e^{-ay})\, dy$$

$$+ \frac{\pi}{4b}\left(e^{\frac{2\pi a}{b}} - e^{-\frac{2\pi a}{b}}\right) = 0.$$

Laat men thans δ tot nul naderen, dan wordt dit

$$-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}\right)\int_0^\infty\frac{\text{Sin }ax}{e^{bx}-1}dx-\frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}\right)^2+\frac{\pi}{4b}\left(e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}\right)=0.$$

Hieruit volgt ten slotte

$$\int_0^\infty\frac{\text{Sin }ax}{e^{bx}-1}dx=-\frac{1}{2a}+\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{\frac{\pi a}{b}}+e^{-\frac{\pi a}{b}}}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}$$

in overeenstemming met BIERENS DE HAAN, *Exposé de la théorie des intégrales définies*, blz. 557.

Oplossing *van* W. A. POORT, Dr. C. STOLP *en* P. DE WIJS.

De gegeven integraal heeft blijkbaar alleen voor positieve waarden van b eenige beteekenis. In deze onderstelling past men de formule

$$\int_0^\infty e^{-nbx}\,\text{Sin }ax\,dx=\frac{a}{n^2b^2+a^2}$$

(BIERENS DE HAAN, *Nouvelles tables d'intégrales définies*, *Table* 261, 1) toe. Geeft men hierin aan n achtereenvolgens alle geheele positieve waarden en telt men vervolgens alle vergelijkingen bij elkaar op, dan vindt men

$$\int_0^\infty\frac{\text{Sin }ax}{e^{bx}-1}dx=\frac{\pi}{2b}\cdot\frac{e^{\frac{2a\pi}{b}}+1}{e^{\frac{2a\pi}{b}}-1}-\frac{1}{2a},$$

in overeenstemming met *Table* 264, 2).

Vraagstuk CXVII.

Bepaal de waarde van de uitdrukking

$$\text{Lim}\left[\text{Cos }\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty\frac{e^{\pi x}-1}{e^{\pi x}+1}\cdot\frac{dx}{x^{a+1}}\right]$$

in de onderstelling, dat het positieve getal $a < 1$ meer en meer tot de eenheid nadert. (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Maken wij gebruik van de reeksontwikkeling

$$\frac{e^{\pi x}-1}{e^{\pi x}+1}=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{x}{1^2+x^2}+\frac{x}{3^2+x^2}+\frac{x}{5^2+x^2}+\text{enz.}\right\},$$

dan wordt

$$\operatorname{Cos}\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty\frac{e^{\pi x}-1}{e^{\pi x}+1}\cdot\frac{dx}{x^{a+1}}=\frac{4}{\pi}\operatorname{Cos}\frac{a\pi}{2}\sum_{m=0}^{m=\infty}\int_0^\infty\frac{dx}{[(2m+1)^2+x^2]x^a}.$$

We stellen het eerste lid dezer vergelijking kortheidshalve door $f(a)$ voor en substitueeren in het tweede lid $x=(2m+1)y$; dit geeft

$$f(a)=\frac{4}{\pi}\operatorname{Cos}\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y^2)y^a}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{(2m+1)^{a+1}}\cdot\quad .\quad 1).$$

In BIERENS DE HAAN, *Nouvelles tables d'intégrales définies*, *Table* 18, 1) vinden we de vergelijking

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)x^p}=\frac{\pi}{\operatorname{Sin}p\pi},\ (p<1).$$

Schrijven we hierin $\frac{a+1}{2}$ voor p, waardoor $\operatorname{Sin}px$ of $\operatorname{Sin}\left(\frac{a\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ in $\operatorname{Cos}\frac{a\pi}{2}$ overgaat, en stellen we $x=y^2$, dan wordt de laatste vergelijking

$$2\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y^2)y^a}=\frac{\pi}{\operatorname{Cos}\frac{a\pi}{2}},\ (a<1),$$

zoodat voor 1) ook geschreven kan worden

$$f(a)=2\left\{\frac{1}{1^{a+1}}+\frac{1}{3^{a+1}}+\frac{1}{5^{a+1}}+\text{enz.}\right\}=$$

$$=\frac{2^{a+1}-1}{2^a}\left\{\frac{1}{1^{a+1}}+\frac{1}{2^{a+1}}+\frac{1}{3^{a+1}}+\frac{1}{4^{a+1}}+\text{enz.}\right\}.$$

De gezochte limiet is dus

$$f(1)=\frac{2^2-1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Vraagstuk CXVIII.

In een bundel $F + \lambda F' = o$ van kwadratische oppervlakken vindt men zes oppervlakken, waarop scheeve vierhoeken gelegen zijn, die in de basiskromme van den bundel zijn beschreven. Gevraagd de waarde van λ voor deze oppervlakken. (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

Wij maken gebruik van de volgende stelling, voorkomende in SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, dritte Aufl., I, S. 260:

„Als twee paar overstaande ribben van een viervlak, beschreven in een oppervlak F', gelegen zijn op een oppervlak F, voldoen de onderlinge invarianten dezer oppervlakken aan de voorwaarde:

$$4\Delta\theta\phi = \theta^3 + 8\Delta^2\theta'."$$

De oppervlakken $F + \lambda F'$, in plaats van F gesteld, voldoen aan deze voorwaarde, welk oppervlak $F + \mu F'$ ook in plaats van F' worde genomen. Wij hebben dus in bovenstaande vergelijking de invarianten van F en F' door die van $F + \lambda F'$ en $F + \mu F'$ te vervangen en uit te drukken, dat deze vergelijking bevredigd is voor elke waarde van μ.

In de eerste plaats moet voor Δ gesubstitueerd worden

$$\Delta + \lambda\theta + \lambda^2\phi + \lambda^3\theta' + \lambda^4\Delta' = G(\lambda).$$

De uitdrukking voor de andere invarianten worden wat eenvoudiger, als men λ door $x_1 : x_2$ en μ door $y_1 : y_2$ vervangt, zoodat men voor $G(\lambda)$ de symbolische uitdrukking a^4_x kan schrijven. In deze onderstelling toch nemen de bedoelde invarianten de volgende gedaante aan

$$\theta = 4a_x^3 a_y, \quad \phi = 6a_x^2 a_y^2, \quad \theta' = 4a_x a_y^3.$$

De voorwaarde ter bepaling van $\lambda = x_1 : x_2$ kan derhalve in den vorm

$$6a_x^4 b_x^2 b_y^2 c_x^3 c_y = 4a_x^3 a_y b_x^3 b_y c_x^3 c_y + 2a_x^4 b_x^4 c_y^3 c_x$$

geschreven worden, waarin a, b, c symbolen van gelijke beteekenis zijn. Deze vergelijking kan zoodanig herleid worden, dat $\mu = y_1 : y_2$ wordt geëlimineerd.

Hiertoe schrijve men haar eerst in den vorm

$$2a_x^4b_x^2c_xc_y(b_y^2c_x^2 - b_x^2c_y^2) + 4a_x^3b_x^2c_x^3b_yc_y(a_xb_y - a_yb_x) = 0.$$

Na deeling door (xy) wordt zij dan

$$-2a_x^4b_x^2c_xc_y(bc)(b_yc_x + b_xc_y) + 4a_x^3b_x^2c_x^3b_yc_y(ab) = 0.$$

Als men in den eersten term b met c verwisselt, keert deze van teeken om; hij is dus nul. Dus blijft er

$$-2a_x^4b_x^3c_xc_y^2(bc) + 4a_x^3b_x^2c_x^3b_yc_y(ab) = 0.$$

Verwisseling in den eersten term van b en c, in den tweeden van a en b geeft

$$-2a_x^4b_xc_x(bc)^2(b_xc_y + b_yc_x) + 4c_x^3c_ya_x^2b_x^2(ab)^2 = 0,$$

of korter en met verwisseling van a en c in den eersten term

$$-c_x^4b_x^2a_xa_y(ab)^2 + c_x^3c_ya_x^2b_x^2(ab)^2 = c_x^3b_x^2a_x(ab)^2(a_xc_y - a_yc_x) = 0.$$

De eindvergelijking wordt dus

$$c_x^3b_x^2a_x(ab)^2(ac) = 0.$$

Het eerste lid is de covariant T van den zesden graad van a_x^4. De gezochte waarden van den parameter λ zijn dus de wortels van de vergelijking, verkregen door den covariant T van den bikwadratischen vorm

$$G(\lambda) = \Delta + \lambda\theta + \lambda^2\phi + \lambda^3\theta' + \lambda^4\Delta'$$

nul te stellen. Tevens is nu aangetoond, dat de zes gezochte oppervlakken in drie paren verdeeld kunnen worden, zoodanig dat van elk paar de onderlinge invarianten θ en θ' tegelijk nul zijn. Immers, zijn $x_1 : x_2$ en $y_1 : y_2$ twee toegevoegde wortels van den covariant T van den grondvorm a_x^4, dan is zoowel $a_x^3a_y$ als $a_y^3a_x$ identiek nul.

Men vergelijke aangaande deze zes oppervlakken, die ten opzichte der basiskromme nog zeer belangrijke eigenschappen vertoonen, AMESEDER, Ueber Configurationen auf der Raumcurve 4ter Ordnung 1ster Species (*Sitzungsberichte der Wiener Akad. der W.*, 87). Door AMESEDER worden zij de oppervlakken van Voss genoemd.

Vraagstuk CXIX.

Als de betrekking

$$\frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 3}} = \frac{dy}{\sqrt{y^4 - 3y^2 + 3}}$$

geldt, bestaat er tusschen x en y een stelkundige betrekking

(ABEL, *Oeuvres complètes* I, blz. 619). Men vraagt deze betrekking af te leiden. (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER.

Oplossing.

De bikwadratische vorm $x^4 + 3x^2 + 3$ heeft twee invarianten $g_2 = \frac{15}{4}$, $g_3 = \frac{11}{8}$. De inversieformules van HALPHEN (*Fonctions elliptiques* I, blz. 120) geven hier na invoering van het constante argument v, bepaald door $\wp v = -\frac{1}{2}$, $\wp' v = 0$,

$$x = \frac{1}{2}\frac{\wp' u_1}{\wp u_1 - \wp v},\ du_1 = \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 3}},\ \wp'^2 u_1 = 4\wp^3 u_1 - \frac{15}{4}\wp u_1 - \frac{11}{8},$$

$$\sqrt{x^4 + 3x^2 + 3} = \wp u_1 - \wp(u_1 + v).$$

De wortels der $\wp$-functie zijn $e_1 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{3})$, $e_2 = -\frac{1}{2}$, $e_3 = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{3})$, waaruit blijkt, dat het argument v gelijk is aan de halve periode ω''.

Als men nu op dezelfde wijze de betrekkingen

$$y = \frac{i}{2}\frac{\wp' u_2}{\wp u_2 - \wp v},\ i du_2 = \frac{dy}{\sqrt{y^4 - 3y^2 + 3}},\ i\sqrt{y^4 - 3y^2 + 3} = \wp u_2 - \wp(u_2 + v)$$

aanneemt, gaat de differentiaalvergelijking over in

$$du_1 \sqrt{-3} = du_2,$$

of

$$u_1 \sqrt{-3} = u_2 + c.$$

Tusschen x en y zal een algebraïsche betrekking bestaan, als die bestaat tusschen $\wp u_1$ en $\wp u_2$. Dit zal blijkbaar alleen dan het geval kunnen zijn, als de imaginaire perioden $2\omega'$ en $2\omega\sqrt{-3}$ dezer beide $\wp$-functies in een meetbare verhouding staan.

Inderdaad kan men bewijzen, dat hier $2\omega' = 2\omega\sqrt{-3}$ is.

Wij deelen voor dit bewijs de periode $AD = 2\omega'$ van de functie $\wp u$ met het periodenparallelogram ABCD (fig. 55) in drie gelijke stukken. Dan is door de perioden $AB = 2\omega$, $AE = \frac{2\omega'}{3}$ een functie $\bar{\wp} u$ bepaald, die op eenvoudige wijze van $\wp u$ afhangt.

In ABCD heeft $\bar{\wp}u$ de dubbele polen A, E, en G overeenkomende met $u = 0$, $\frac{2\omega'}{3}$ en $\frac{4\omega'}{3}$; de residuen dezer polen worden alle nul, zoodat men besluit tot de vergelijking (Tannery-Molk, *Théorie des fonctions elliptiques*, I, blz. 224, form. XXI_4)

$$\bar{\wp}u = \wp u + \wp\left(u - \frac{2\omega'}{3}\right) + \wp\left(u + \frac{2\omega'}{3}\right) - 2\wp\frac{2\omega'}{3}.$$

Immers het verschil van de beide leden dezer vergelijking heeft geen polen meer en is nul voor $u = 0$. Als men beide leden naar opklimmende machten van u ontwikkelt — voor de middelste termen van het tweede lid kan men daarbij de ontwikkeling van Taylor gebruiken, — en $\bar{g}_2$ en $\bar{g}_3$ de invarianten van $\bar{\wp}u$ noemt, komt er (Halphen, I, blz. 93)

$$\frac{1}{u^2} + \frac{\bar{g}_2}{20}u^2 + \frac{\bar{g}_3}{28}u^4 \ldots = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots$$
$$+ \wp''\frac{2\omega'}{3} \cdot u^2 + \frac{1}{12}\wp^{IV}\frac{2\omega'}{3} \cdot u^4 + \ldots,$$

waaruit volgt

$$\bar{g}_2 = g_2 + 20\wp''\frac{2\omega'}{3}, \quad \bar{g}_3 = g_3 + \frac{7}{3}\wp^{IV}\frac{2\omega'}{3}.$$

Men berekent $\wp\frac{2\omega'}{3}$ als de grootste negatieve wortel der vergelijking

$$\wp 2u = \wp u = -2\wp u + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''u}{\wp'u}\right)^2,$$

of

$$\wp^4 u - \frac{15}{8}\wp^2 u - \frac{11}{8}\wp u - \frac{75}{256} = 0.$$

Men vindt op deze wijze $\wp\frac{2\omega'}{3} = -\frac{3}{4}$ en daarna $\wp''\frac{2\omega'}{3} = \frac{3}{2}$, $\wp^{IV}\frac{2\omega'}{3} = -\frac{33}{2}$ en ten slotte

$$\bar{g}_2 = \frac{135}{4} = 3^2 g_2, \quad \bar{g}_3 = -\frac{297}{8} = -3^3 g_3.$$

Daarmede is bewezen, dat de periodenparallelogrammen ABFE en ADCB gelijkvormig zijn en de gelijkstandige zijden AB en AD zich verhouden als $1 : \sqrt{3}$.

Wij schrijven nu de betrekking tusschen u_1 en u_2 in den vorm

$$u_2 = (u_1 + a)\sqrt{-3}.$$

Men vindt dan

$$y = \frac{i}{2}\,\frac{\wp'(u_1+a)\sqrt{-3}}{\wp(u_1+a)\sqrt{-3}-e_2}.$$

Deze uitdrukking is ingevolge het voorafgaande een elliptische functie van het argument (u_1+a), die door $\wp(u_1+a)$ en $\wp'(u_1+a)$ kan worden uitgedrukt. Beschouwt men (u_1+a door v_1 vervangende) de functie

$$\frac{y}{\wp' v_1} = \frac{i}{2}\,\frac{\wp' v_1\sqrt{-3}}{\wp' v_1} \cdot \frac{1}{\wp v_1\sqrt{-3}-e_2},$$

dan bemerkt men, dat zij de zes polen $\pm\frac{2\omega'}{3}$, $\pm\omega''$, $\pm\left(\omega''+\frac{2\omega'}{3}\right)$ heeft; daarom kan men stellen

$$\frac{y}{\wp' v_1} = \frac{A}{\wp v_1 - \wp\frac{2\omega'}{3}} + \frac{B}{\wp v_1 - e_2} + \frac{C}{\wp v_1 - \wp\left(\omega''+\frac{2\omega'}{3}\right)} + D.$$

Door v_1 achtereenvolgens te laten naderen tot $\frac{2\omega'}{3}$, ω'', $\omega''+\frac{2\omega'}{3}$ en nul vindt men

$$A = -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad B = \frac{1}{2\sqrt{3}},\quad C = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad D = 0.$$

Wij stellen nu

$$z^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\wp'^2 v_1}{(\wp v_1 - e_2)^2} = \wp v_1 + \wp(v_1+\omega'') + e_2,$$

$$\sqrt{z^4+3z^2+3} = \sqrt{Z} = \wp v_1 - \wp(v_1+\omega''),$$

dan is z hetgeen x wordt als men het argument u_1 door u_1+a of v_1 vervangt. Achtereenvolgens komt er nu

$$\wp v_1 = \frac{1}{4}(2z^2+1+2\sqrt{Z}),\quad \wp v_1 - e_2 = \frac{1}{4}(2z^2+3+2\sqrt{Z}),$$

$$\wp v_1 - \wp\left(\omega''+\frac{2\omega'}{3}\right) = \frac{1}{2}(z^2+\sqrt{Z}),\quad \wp v_1 - \wp\frac{2\omega'}{3} = \frac{1}{2}(z^2+2+\sqrt{Z}),$$

$$\wp' v_1 = \frac{1}{2}z(2z^2+3+2\sqrt{Z}) \text{ en ten laatste}$$

$$y = \frac{z}{\sqrt{3}} - \frac{z}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2z^2+3+2\sqrt{Z}}{z^2+2+\sqrt{Z}} + \frac{z}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2z^2+3+2\sqrt{Z}}{z^2+\sqrt{Z}},$$

of

$$y = \frac{z(z^2+3)}{(z^2+1)\sqrt{3}}.$$

Er blijft nog over z in de veranderlijke x en in de integratieconstante a uit te drukken. Neemt men $a = 0$, dan wordt $z = x$ en

$$y = \frac{x(x^2+3)}{(x^2+1)\sqrt{3}}$$

is een particuliere integraal, waarvan men zich spoedig overtuigt. In het algemeen echter zal z een willekeurige oplossing zijn der differentiaalvergelijking

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

en dus met x verbonden zijn door de betrekking

$$\frac{x^2z^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2xz + \frac{1}{2}x^2 + 3 + \sqrt{X}\,.\,\sqrt{Z}}{(x-z)^2} = \text{constant}$$

(HALPHEN II, blz. 359); immers deze vergelijking is de algebraïsche vertolking der vergelijking $a_1 = v_1 - u_1$.

De algemeene oplossing der gegeven differentiaalvergelijking wordt nu door de eliminatie van z verkregen.

Vraagstuk CXX.

Men vraagt de integratie van de gedeeltelijke differentiaalvergelijking der derde orde

$$z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} - zz\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$$

terug te brengen tot de integratie van een gewone differentiaalvergelijking der eerste orde. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* W. A. POORT.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Voor de afgeleiden van z naar het algemeen gebruik de letters p, q, r, s, t stellende, schrijven wij voor de gegeven vergelijking

$$zpq\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} - 2zqs^2 - zpst + 2pq^2s = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Wij zoeken een eerste integraal van den vorm

$$s = f(x, y, z, p, q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2).$$

In deze zijn r en t weggelaten, omdat een eerste proeve haar overbodigheid in het licht stelt.

Door 2) te differentieeren hebben wij

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} q + \frac{\partial s}{\partial p} s + \frac{\partial s}{\partial q} t.$$

Dit overgebracht in 1) geeft

$$zpq \frac{\partial s}{\partial y} + zpq^2 \frac{\partial s}{\partial z} + zpqs \frac{\partial s}{\partial p} + zpqt \frac{\partial s}{\partial q} = 2zqs^2 + zpst - 2pq^2 s.$$

Het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen, door welke deze wordt opgelost, is

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{zpq} = \frac{dz}{zpq^2} = \frac{dp}{zpqs} = \frac{dq}{zpqt} = \frac{ds}{2zqs^2 + zpst - 2pq^2 s} \quad . . \ 3).$$

Alle redens zijn ook gelijk aan

$$\frac{sdq - qds}{-2zq^2 s^2 + 2pq^3 s};$$

deze waarde is verkregen door t te verwijderen, wat geschieden moet, omdat uit 2) geen waarde voor t kan volgen.

2. Er zijn drie integralen van 3) te vinden. Vooreerst vindt men dadelijk $x = C$.

Vervolgens kan men aldus herleiden

$$2(qp - zs)\, sdz = pz(sdq - qds), \quad sdz = qdp;$$

$$2(qp - zs)\, qdp = (zs - pq)\, pdq + p^2 qdq - pqzds;$$

$$2(qp - zs)\, qdp = (zs - pq)\, pdq + pq\,(pdq + qdp - sdz - zds);$$

$$2\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} + \frac{d(qp - zs)}{qp - zs}$$

en vindt men alzoo

$$zs - pq = p^2 q C_1.$$

Eindelijk heeft men de herleiding

$$2\frac{dz}{z} - 2\frac{sdz}{pq} = \frac{dq}{q} - \frac{ds}{s}, \quad sdz = qdp;$$

$$2\frac{dz}{z} - 2\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} - \frac{ds}{s}$$

en dus

$$z^2 s = p^2 q C_2.$$

Stelt men nu $C_1 = f(C)$, $C_2 = F(C)$, dan heeft men de twee volgende eerste integralen van 1)

$$zs - pq = p^2 q \, f(x), \quad z^2 s = p^2 q \, F(x) \quad \ldots\ldots \; 4).$$

3. Een kortere afleiding van deze integralen volgt uit de herleiding van 1) tot de vormen:

$$p^2 q \left(s \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial s}{\partial y} - q \frac{\partial p}{\partial y} - p \frac{\partial q}{\partial y} \right) - (zs - pq) \left(2pq \frac{\partial p}{\partial y} + p^2 \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{p}{z} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s}{q} \right) - 2 \frac{s}{q} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{z} \right) = 0.$$

Deze kortere afleiding heeft door haar onafhankelijkheid van uitgebreide theorieën het voordeel van duidelijk in het licht te stellen, dat de beide integralen 4) vervuld moeten worden door *elke* oplossing van 1).

4. Elimineert men s tusschen de twee vergelijkingen 4), dan valt ook q weg en blijft er een gewone differentiaalvergelijking tusschen x en z over, die wij schrijven in de gedaante

$$z \frac{dz}{dx} \phi_1(x) + \frac{dz}{dx} \phi_2(x) + z\phi_3(x) = 0 \quad \ldots\ldots \; 5).$$

In de algemeene integraal van deze is de integratieconstante als functie van y aan te merken om haar te maken tot de algemeene integraal van 1). In bijzondere gevallen kan 5) worden geïntegreerd; bijv. voor $\phi_1(x) = n$, $\phi_2(x) = (n-1)\phi(x)$, $\phi_3(x) = \phi'(x)$ vindt men

$$z^n + z^{n-1} \phi(x) + \psi(y) = 0$$

als bijzondere integraal van 1).

5. Een eigenschap, door welke de oppervlakken onzer differentiaalvergelijking worden gekenmerkt, vindt men door 5) te schrijven in den vorm

$$z + \frac{\phi_2}{\phi_1} = - \frac{\phi_3}{\phi_1} \cdot \frac{z}{\frac{dz}{dx}}.$$

Men kan die eigenschap aldus uitspreken. Trekt men in een punt P van het oppervlak een raaklijn evenwijdig aan het vlak ZOX welke XOY in A snijdt, is AB evenwijdig aan OZ en gelijk $\frac{\phi_2}{\phi_1}$, dan zal PB met OX een hoek α maken die $-\frac{\phi_3}{\phi_1}$

tot tangens heeft; AB en α veranderen niet van waarde, als P evenwijdig aan YOZ over het oppervlak wordt verplaatst.

De algemeene integraal van 1) bevat drie willekeurige functies; twee functies van x, die de waarden van AB en van α aangeven, een functie van y, die de doorsnede van het oppervlak met een vast vlak evenwijdig aan YOZ bepaalt. Zonderling is het, dat wij de algemeene integraal niet kunnen opschrijven, ofschoon we de meetkundige beteekenis er van volkomen kennen.

Vraagstuk CXXI.

Door een vast punt O wordt een veranderlijke koorde AB in een gegeven kegelsnee K getrokken. Op deze koorde zet men een stuk OC uit, dat omgekeerd evenredig is met AB. Te onderzoeken onder welke omstandigheden C een kegelsnee beschrijft.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL en W. A. POORT.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

1. We nemen O tot oorsprong en de lijn door O evenwijdig aan een der assen van K (of aan *de* as van K) tot x-as aan. Dan is de vergelijking van K

$$K \equiv Px^2 + y^2 + 2Qx + 2Ry + S = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

of op de gebruikelijke wijs in poolcoördinaten

$$(P \operatorname{Cos}^2 \phi + \operatorname{Sin}^2 \phi)\, r^2 + 2\,(Q \operatorname{Cos} \phi + R \operatorname{Sin} \phi)\, r + S = 0.$$

Hieruit volgt, als r_1 en r_2 de wortels zijn dezer vergelijking,

$$(r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4 r_1 r_2 = 4\,\frac{(Q \operatorname{Cos}\phi + R \operatorname{Sin}\phi)^2 - S(P \operatorname{Cos}^2\phi + \operatorname{Sin}^2\phi)}{(P \operatorname{Cos}^2\phi + \operatorname{Sin}^2\phi)^2}$$

en dus voor de poolvergelijking van de meetkundige plaats K′ van C

$$r'^2 = \frac{4k^4}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{k^4 (P \operatorname{Cos}^2\phi + \operatorname{Sin}^2\phi)^2}{(Q \operatorname{Cos}\phi + R \operatorname{Sin}\phi)^2 - S(P \operatorname{Cos}^2\phi + \operatorname{Sin}^2\phi)},$$

of met weglating van het accent van r

$$K' \equiv [(Q^2 - PS)\operatorname{Cos}^2\phi + (R^2 - S)\operatorname{Sin}^2\phi]\, r^2 - k^4[(P-1)\operatorname{Cos}^2\phi + 1] = 0. \quad 2)$$

2. Vergelijken we 2) met de poolvergelijking

$$(\alpha \operatorname{Cos}^2\phi + 2\beta \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\phi + \gamma \operatorname{Sin}^2\phi) r^2 + 2(\delta \operatorname{Cos}\phi + \varepsilon \operatorname{Sin}\phi) r + \lambda = 0$$

van de kegelsneè

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \lambda = 0,$$

dan zien we onmiddellijk, dat 2) een kegelsnee voorstelt als $P = 1$ en K dus een cirkel is.

3. We kunnen, nu K een cirkel is, de x-as door het middelpunt van K laten gaan; dan is $R = 0$ en worden de vergelijkingen

$$K \equiv x^2 + y^2 + 2Qx + S = 0, \quad K' \equiv (Q^2 - S)x^2 - Sy^2 - k^4 = 0.$$

We vinden dus de volgende gevallen

	K	K′
$S < 0,\ Q \neq 0$ . .	cirkel . .	ellips.
„ $Q = 0$ . .	„ . .	cirkel.
$S = 0$	„ . .	twee evenwijdige rechten.
$0 < S < Q^2$	„ . .	hyperbool.
$S = Q^2$	punt . .	onbestaanbaar.
$Q^2 < S$	onbestaanbaar .	„

Aanmerking. Deze uitkomst wordt toegepast in de graphostatica. Als de ellips K′ de traagheidsellips is voor het punt O eener vlakke figuur, dan zijn haar halve middellijnen omgekeerd en dus de koorden van cirkel K recht evenredig met de gierstralen; deze kunnen dus dadelijk worden opgemeten en het trekken der ellips wordt overbodig. (W. M.)

Vraagstuk CXXII.

Drie stoffelijke punten kunnen zich zoo langs de zijden van een driehoek en haar verlengden bewegen, dat ze steeds met elkaar in een rechte lijn blijven. Aan te toonen, dat onder deze bewegingen slechts een periodieke beweging voorkomt. (W. Mantel.)

Opgelost *door* W. Mantel.

Oplossing.

We stellen door $2a$, $2b$, $2c$ de zijden van den driehoek, door x, y, z de afstanden van elk der stoffelijke punten tot

het midden der overeenkomstige zijde (den driehoek in een bepaalden zin rondgaande positief geteld), door m_1, m_2, m_3 de massa's der punten en door t den tijd voor.

De veranderlijken x, y, z zijn gebonden aan de betrekking

$$\frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{y-b}{y+b} \cdot \frac{z-c}{z+c} = 1 ,$$

of

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

volgens den regel van MENELAÜS. Verder is de levende kracht E van het stelsel bepaald door de vergelijking

$$m_1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + m_3 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2E \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Door X voor $x\sqrt{m_1}$, Y voor $y\sqrt{m_2}$, Z voor $z\sqrt{m_3}$ en a' voor $a\sqrt{m_1}$, b' voor $b\sqrt{m_2}$, c' voor $c\sqrt{m_3}$ te schrijven, gaan deze vergelijkingen over in

$$a'YZ + b'ZX + c'XY + a'b'c' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 3),$$

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 = 2E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Beschouwt men X, Y, Z als rechthoekige coördinaten van een punt P in de ruimte, dan drukken deze vergelijkingen uit, dat dit punt P met de eenheid van massa zich vrij beweegt over het oppervlak der hyperboloïde met één blad, die door 3) wordt voorgesteld. Op dit oppervlak is de baan van P dus een geodetische kromme en de beweging van P in deze baan eenparig. Dus zijn de bewegingen der drie massa's m_1, m_2, m_3 steeds onmiddellijk af te leiden uit die van de projecties van E op de coördinaatassen.

De keelellips der hyperboloïde is de eenige gesloten geoditische kromme op het oppervlak. De hieruit afgeleide beweging der drie massa's is dus de eenige periodieke en wel een samenstel van isochrone schommelingen om de middens der zijden van den gegeven driehoek.

De amplitudines der schommelingen zijn uit de keelellips af te leiden en dus alleen afhankelijk van a, b, c, m_1, m_2, m_3.

De duur der schommelingen is geheel willekeurig, dewijl de keelellips met elke snelheid doorloopen zou kunnen worden.

Vraagstuk CXXIII.

Als een draad zonder einde over twee even hooge gladde pennen hangt, vormt hij gewoonlijk twee ongelijke bogen. Hoe ver zou men de pennen van elkander moeten zetten, opdat er zeker gelijke bogen ontstaan? (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossingen.

I. De spanning in een punt van een kettinglijn is altijd gelijk aan het gewicht van een draad, die zoo lang is als de ordinaat van dat punt; deze ordinaat wordt gemeten tot de x-as van het stelsel, waarvoor de vergelijking der kettinglijn den gewonen vorm $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ heeft. Als een draad over een pen loopt, dan komen daar twee kettinglijnen samen met dezelfde spanning; dus moeten de bases (de x-assen) van die kettinglijnen dezelfde zijn. De twee bogen van ons vraagstuk hebben ook dezelfde verticale as van symmetrie midden tusschen de pennen door. Zij behooren dus tot kettinglijnen, die in een zelfde coördinatenstelsel door de gewone vergelijking worden voorgesteld en verschillen alleen in a. Die kettinglijnen zijn dus gelijkvormige kromme lijnen; de oorsprong is het gelijkvormigheidspunt.

Twee zulke gelijkvormige kettinglijnen snijden elkander in twee even hoog gelegen punten; de twee bogen onder de snijpunten kunnen te zamen een draad zonder einde voorstellen.

Al deze kettinglijnen worden aangeraakt door twee lijnen, die door den oorsprong gaan, en met den horizon hoeken van $56^{\circ}\,27'\,57''$ maken; deze hoek is op te lossen uit de vergelijking

$$2 \operatorname{Sec} \phi = e^{\operatorname{Cosec} \phi} + e^{-\operatorname{Cosec} \phi}.$$

Zet men de pennen op die raaklijnen en neemt men een draad zonder einde, die tweemaal zoo lang is als de boog van de kettinglijn tusschen die raakpunten, dan kan die draad onmogelijk twee ongelijke bogen vormen.

Men kan den afstand der pennen en de lengte van den draad berekenen; voor de verhouding wordt gevonden

$$\frac{1}{4 \operatorname{Tg} \phi} \text{ Nep log.} \frac{1 + \operatorname{Sin} \phi}{1 - \operatorname{Sin} \phi} = 0{,}3975.$$

II. De y-as van een rechthoekig coördinatenstelsel zij verticaal en naar boven gericht. Van een kettinglijn moge het laagste punt A in $0y$ liggen. De spanning in A zij ap; die in een punt P (x, y) zij S. De hoek tusschen de raaklijn in P en $0x$ zij α. Het gewicht der lengte-eenheid draad zij p. De lengte van boog AP zij s.

Het evenwicht van AP vereischt

$$ap = S \operatorname{Cos} \alpha, \quad sp = S \operatorname{Sin} \alpha.$$

Hieruit volgt ter bepaling van de kromme

$$s = a \operatorname{Tg} \alpha, \quad x = \int ds \operatorname{Cos} \alpha = \frac{a}{2} \, l \frac{1 + \operatorname{Sin} \alpha}{1 - \operatorname{Sin} \alpha}.$$

Zijn nu a_1 en a_2 de waarden van a voor de twee kettinglijnen van ons vraagstuk, ϕ_1 en ϕ_2 de waarden van α aan de pen, $2c$ de afstand der pennen, 2L de lengte van den draad zonder einde, dan heeft men ingevolge de bovenstaande formules

$$\frac{a_1}{\operatorname{Cos} \phi_1} = \frac{a_1}{\operatorname{Cos} \phi_2}; \; 2L = 2a_1 \operatorname{Tg} \phi_1 + 2a_2 \operatorname{Tg} \phi_2;$$

$$\frac{a_1}{2} \, l \,. \frac{1 + \operatorname{Sin} \phi_1}{1 - \operatorname{Sin} \phi_1} = \frac{a_2}{2} \, l \,. \frac{1 + \operatorname{Sin} \phi_2}{1 - \operatorname{Sin} \phi_2} = 0.$$

Elimineert men tusschen deze a_1 en a_2, dan houdt men twee vergelijkingen over, die ϕ_1 en ϕ_2 zullen bepalen, als c en L gegeven zijn. Ze zijn

$$\left(\frac{1 + \operatorname{Sin} \phi_1}{1 - \operatorname{Sin} \phi_1}\right)^{\operatorname{Cos} \phi_1} = \left(\frac{1 + \operatorname{Sin} \phi_2}{1 - \operatorname{Sin} \phi_2}\right)^{\operatorname{Cos} \phi_2} = e^{\frac{2c}{a}(\operatorname{Sin} \phi_1 + \operatorname{Sin} \phi_2)}.$$

Aan deze kan voldaan worden door $\phi_1 = \phi_2$ te nemen; er is echter gemeenlijk ook een oplossing, voor welke ϕ_1 en ϕ_2 ongelijk zijn. Om de oplossingen met ongelijke ϕ_1 en ϕ_2 te overzien, construeere men een hulpkromme, die in poolcoördinaten wordt voorgesteld door de vergelijking

$$\rho = \left(\frac{1 + \operatorname{Sin} \phi}{1 - \operatorname{Sin} \phi}\right)^{\operatorname{Cos} \phi}.$$

Als ϕ van 0 toeneemt, dan neemt ρ van 1 toe. Voor $\phi = 56^\circ \, 27' \, 57''$ is ρ maximum $= 14{,}08$. Verder neemt ρ af, om voor $\phi = 90^\circ$ weer 1 te worden. Bij elke ρ tusschen 1 en 14,08 behooren dus twee waarden van ϕ; deze zijn ϕ_1 en ϕ_2

15*

voor bovenstaande beschouwingen, als $\frac{c}{L}$ een passende waarde heeft. Voor $\phi = 56° 27' 57''$ heeft men slechts een waarde van ρ; met deze stemt de waarde $c : L = 0{,}3975$ overeen, welke alzoo geen tweeërlei evenwichtsfiguren toelaat.

Vraagstuk CXXIV.

De einden van een rechte dunne veer worden in twee gegeven punten zoo vastgeklemd, dat de veer daar rechthoekig op de verbindingslijn der gegeven punten is gericht. Hoe lang kan die veer hoogstens wezen, als zij geen buigpunten mag vertoonen.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

Wij gebruiken een rechthoekig coördinatenstelsel; een der gegeven punten is oorsprong, het andere heeft de coördinaten $2h$ en 0. De veer denken wij aan den kant der positieve ordinaten gelegen.

De invloed der inklemming in O is voor te stellen door een kracht P met $(0, -a)$ tot aangrijpingspunt; gemakkelijk ziet men in, dat P evenwijdig aan OX moet werken. De differentiaalvergelijking der elastische lijn is dan

$$P(a+y) + EI\frac{d^2y}{d^2x}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Stel $EI = \frac{1}{2}Pb^2$, $\frac{dy}{dx} = p$, $a + y = z$; dan wordt de vergelijking

$$2z + b^2p\,(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{dp}{dz} = 0.$$

Geïntegreerd, en opmerkende, dat $z = a$ met $p = \infty$ overeenstemt, geeft zij

$$z^2 - a^2 - b^2(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Uit 1) kan blijken, dat a niet negatief mag zijn, zal er geen buigpunt komen; over den boog, door de veer gevormd, verandert z van a tot het met $p = 0$ overeenstemmende maximum

$\sqrt{(a^2 + b^2)}$ en van daar terug naar a. Als er geen buigpunt is, dan verandert x steeds in denzelfden zin; $\frac{dx}{dz}$ is dus positief voor de eerste helft, negatief voor de andere. Bepalen wij ons tot de eerste helft, dan is

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{p} = \frac{z^2 - a^2}{\sqrt{\{b^4 - (z^2 - a^2)^2\}}}, \quad h = \int_a^{\sqrt{(a^2+b^2)}} \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{\sqrt{\{b^4 - (z^2 - a)^2\}^2}}.$$

Voor de lengte van den boog hebben wij

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{b^2}{\sqrt{\{b^4 - (z^2 - a^2)^2\}}}, \quad s = \int_a^{\sqrt{(a^2+b^2)}} \frac{b^2 dz}{\sqrt{\{b^4 - (z^2 - a^2)^2\}}}.$$

In het grensgeval, dat in de opgave bedoeld wordt, is juist $a = 0$, dus

$$h = \int_0^b \frac{z^2 dz}{\sqrt{(b^4 - z^4)}}, \quad s = \int_0^b \frac{b^2 dz}{\sqrt{(b^4 - z^4)}}.$$

Door $z^4 = b^4 u$ te stellen herleidt men deze integralen tot Euleriaansche, en vindt men

$$\frac{s}{h} = \frac{5}{12}\left(\frac{\Gamma\,\frac{1}{4}}{\Gamma\,\frac{3}{4}}\right)^2 = 4{,}80821.$$

Vraagstuk CXXV.

Bij elke in een driehoek beschreven kegelsnede kan steeds één om dien driehoek beschreven kegelsnede gevonden worden, die de eerste dubbel aanraakt en niet in een lijnenpaar ontaard is. Gevraagd de omhullende van de gemeenschappelijke raakkoorde, als de ingeschreven kegelsnede een ellips van standvastigen inhoud is.

(Dr. P. MOLENBROEK.)

Opgelost *door* Dr. P. MOLENBROEK.

Oplossing.

Zijn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ de vergelijkingen van de zijden van den driehoek, dan is

$$F \equiv a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2a_2 a_3 x_2 x_3 - 2a_3 a_1 x_3 x_1 - 2a_1 a_2 x_1 x_2 = 0$$

de vergelijking van een willekeurig daarin beschreven kegelsnede. Is verder

$$L \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

de vergelijking der raakkoorde, dan moet de kegelsnede

$$F + \lambda L^2 = 0$$

om den driehoek beschreven zijn, d. i. er moet een betrekking

$$F + \lambda L^2 \equiv b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1 + b_3x_1x_2$$

bestaan. Hieruit volgt

$$c_1\sqrt{-\lambda} = \pm a_1, \quad c_2\sqrt{-\lambda} = \pm a_2, \quad c_3\sqrt{-\lambda} = \pm a_3,$$

$$b_1 = -2a_2a_3 + 2\lambda c_2c_3, \; b_2 = -2a_3a_1 + 2\lambda c_3c_1, \; b_3 = -2a_1a_2 + 2\lambda c_1c_2.$$

En zal de omgeschreven kegelsnede niet in twee rechten uiteenvallen, dan moeten in de waarden van c_1, c_2, c_3 òf de bovenste òf de onderste teekens te zamen genomen worden. De vergelijking der raakkoorde is dan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1).$$

In tangentieele coördinaten overgebracht is de vergelijking der ingeschreven kegelsnede

$$a_1u_2u_3 + a_2u_3u_1 + a_3u_1u_2 = 0.$$

Het vierkant van het product der assen dezer kegelsnede is (*Mathesis*, 1892 p. 33) evenredig met

$$\frac{a_1a_2a_3}{(a_1 + a_2 + a_3)^3}.$$

Men heeft dus de omhullende van 1) te bepalen onder de voorwaarde

$$\frac{a_1a_2a_3}{(a_1 + a_2 + a_3)^3} = C.$$

Deze vergelijking is dus die der omhullende in tangentieele coördinaten. Zij is een kromme van de derde klasse, die in het algemeen geen dubbel- en geen buigraaklijn heeft en die van de zesde orde is. Voor $C = \frac{1}{27}$ ontstaat een dubbelraaklijn en wordt de kromme van de vierde orde.

In het algemeen zijn de drie hoekpunten van den driehoek keerpunten en loopen de keerraaklijnen daar evenwijdig aan de overstaande zijden.

Vraagstuk CXXVI.

Gegeven een punt P, een kegelsnee K en een kromme C^n van den n^{den} graad. Een rechte L door P snijdt K in A en B en C^n in A_1, A_2, ... A_n. Men bepaalt op L de punten B_1, B_2, ... B_n zoo, dat het paar A_i, B_i, harmonisch ligt tot A, B. Gevraagd de meetkundige plaats der punten B_i, als L om T draait.

(Dr. P. MOLENBROEK.)

Opgelost *door* Dr. P. MOLENBROEK, Dr. P. H. SCHOUTE, H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

De oplossing van dit vraagstuk is geheel begrepen in mijn opstel „Over de constructie van krommen door punten en raaklijnen" (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, deel 12, blz. 1, of *Archives néerlandaises*, deel 20, blz. 49). Daar is onder de algemeene theorie der kwadratische overeenkomst het geval beschouwd, dat deze overeenkomst involutorisch is, waarbij dan twee mogelijkheden optreden, welke als regelmatige en onregelmatige kwadratische involutie gekenmerkt zijn.

De verwantschap der punten A_i en B_i is de onregelmatige kwadratische involutie. Zijn Q en R de snijpunten van K met de poollijn p van P ten opzichte van K, dan zijn P, Q, R de drie fundamentaalpunten met welke de rechten QR, PQ, PR overeenstemmen.

Bij C^n behoort dus een kromme C^{2n}, die de punten P, Q, R tot n-voudige punten heeft en door de snijpunten van K met C^n gaat.

Vraagstuk CXXVII.

In een vlak zijn drie cirkels C_1, C_2, C_3 gegeven. Men beschrijft een cirkel C, die C_1 loodrecht snijdt en C_2 aanraakt, en bepaalt de gemeenschappelijke koorde l van dezen cirkel met C_3. Gevraagd de omhullende van l, als men C achtereenvolgens vervangt door alle cirkels, die C_1 loodrecht snijden en C_2 aanraken.

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* W. A. POORT, Dr. P. H. SCHOUTE *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* P. H. Schoute.

1. Is C (fig. 56) een der cirkels, die C_1 loodrecht snijden en C_2 aanraken, P het machtpunt van C, C_2, C_3 en Q het machtpunt van C, C_3, C_1, dan is P op de machtlijn l_1 van C_2 en C_3, Q op de machtlijn l_2 van C_3 en C_1 gelegen en l dus te beschouwen als de verbindingslijn van een punt P van l_1 met een punt Q van l_2. Het onderzoek naar de verwantschap tusschen de punten P en Q leert ons de klasse der gevraagde omhullende bepalen.

Neemt men het punt P willekeurig aan, dan vindt men twee raaklijnen r aan C_2 en dus twee raakpunten R van C met C_2. Alle cirkels, die C_2 in een bepaald punt R raken, vormen een bundel en deze bevat één cirkel, die C_1 loodrecht snijdt; want de voorwaarde, dat het middelpunt M_1 van C_1 ten opzichte van den gezochten cirkel C een macht heeft gelijk aan het vierkant van den straal van C_1 doet het tweede snijpunt van C met de rechte M_1R kennen. Bij een willekeurig aangenomen punt P behooren dus twee punten Q.

Neemt men het punt Q willekeurig aan, dan moet het middelpunt M van C op de poollijn q van Q met betrekking tot C_1 liggen; want M is ten opzichte van C_1 de pool van de gemeenschappelijke koorde van C en C_1 en ligt dus op de poollijn van een punt Q dier koorde. Verder vormen alle cirkels, die C_1 loodrecht snijden en q tot middellijn hebben, weer een bundel, waarvan de basispunten liggen op de lijn M_1Q; zijn S en T de snijpunten van M_1Q met C_1, dan worden deze basispunten A en B gevonden door de voorwaarden

$$QA \,.\, QB = QS \,.\, QT,\ \ M_1A \,.\, M_1B = \overline{M_1S}^2 = M_1T^2,$$

d. i. als het gemeenschappelijk paar van twee involuties. Deze bundel nu bevat twee cirkels die C_2 aanraken. Dus behooren bij een willekeurig aangenomen punt Q ook twee punten P.

Wijl tusschen de punten P, Q een verwantschap (2, 2) bestaat, is de gezochte kromme volgens het correspondentiebeginsel van Chasles een omhullende O^4 van de vierde klasse.

2. De raaklijnen l der omhullende O^4 komen één aan één met de punten R van C_2 overeen. Dus zijn O^4 en C_2 van hetzelfde geslacht. Verder is het duidelijk, dat O^4 geen buigraaklijnen kan bezitten. Want als R den cirkel C_2 doorloopt, staan de punten P en Q alleen dan stil, als het overeenkom-

stige punt R op l_1 of l_2 ligt en dit vindt niet ter zelfder tijd plaats. Dus heeft O^4 drie dubbelraaklijnen en is zij volgens de formules van PLUECKER een kromme van den zesden graad met vier dubbelpunten en zes keerpunten.

AANMERKING. Is het middelpunt I (fig. 57) eens rechthoeks ABCD tevens het middelpunt van een door de hoekpunten van den rechthoek gaanden bol en wordt deze gesneden door het ringoppervlak, waarvan AD de as en cirkel BCI een meridiaankromme is, dan is de projectie der doorsnee op het vlak van teekening een ellips, die als volgt naar punten en raaklijnen wordt geconstrueerd (JURISCH, *Questions de géométrie descriptive*, blz. 103).

Neem op de as AD een willekeurig punt F als middelpunt van een hulpbol aan, die den bol (I) volgens één, den ring volgens twee cirkels snijdt, en beschouw het bijzondere geval, dat deze laatste cirkels samenvallen en de hulpbol den ring dus volgens een cirkel aanraakt. Dan zal het snijpunt m van de doorgangen gmh en kml der loodrecht op het vlak van teekening staande cirkelvlakken een punt der ellips, de lijn gmh de raaklijn in dit punt aan de ellips aangeven.

Als vraagstuk in het platte vlak beschouwd is deze ellips de omhullende van de gemeenschappelijke koorde gmh van den cirkel ABCD met elken cirkel, die den cirkel BCI aanraakt en de rechte AD loodrecht snijdt. Door vervanging van de rechte AD door een cirkel is het bovenstaande vraagstuk ontstaan.

Vraagstuk CXXVIII.

Te bewijzen, dat een der 60 door het middelpunt gaande diagonalen van een 600-cel achtereenvolgens 15, 12, 20, 12 der anderen onder hoeken van 90°, 72°, 60° en 36° snijdt.

(DR. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* DR. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

De oplossing van dit vraagstuk is gegeven in mijn opstel „Regelmässige Schnitte und Projectionen des 120-Zelles und

„600-Zelles im vierdimensionalen Raume" (*Verh. der Kon. Akad. van Wetensch.*, II, n⁰. 7, p. 9).

In deel A van Tabel I vindt men de coördinaten x_1, x_2, x_3, x_4 van 60 der 120 hoekpunten van Z^{600}, terwijl die van de overigen gevonden worden door alle waarden met het tegengestelde teeken te nemen. Nu heeft x_4 voor het op OX_4 gelegen punt de waarde $2(1+\sqrt{5})$, terwijl zij voor achtereenvolgens 15, 12, 20, 12 punten de waarden 0, 2, $1+\sqrt{5}$, $3+\sqrt{5}$ aanneemt. Wijl $2(1+\sqrt{5})$ dus den afstand voorstelt van het middelpunt tot al de hoekpunten zijn

$$0,\ \frac{1}{1+\sqrt{5}},\ \frac{1}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}$$

de cosinussen der hoeken, die de diagonaal langs OX_4 met 15, 12, 20, 12 der overigen maakt, en deze hoeken zelf dus 90°, 72°, 60°, 30°.

Vraagstuk CXXIX.

Door het punt (R) van Steiner van een driehoek $A_1A_2A_3$ gaan niet alleen de drie cirkels, die de ellips (ε) van Steiner in deze punten osculeeren, maar onder de kegelsneden, die in een dezer punten drie punten met (ε) gemeen hebben ook

1⁰. de hyperbolen met assen evenwijdig aan die van (ε),

2⁰. de hyperbolen met asymptoten evenwijdig aan de gelijke toegevoegde middellijnen van (ε),

3⁰. de parabolen met as en topraaklijn evenwijdig aan de assen van (ε).

Men vraagt het bewijs. (J. W. Tesch.)

Opgelost *door* J. W. Tesch.

Oplossing.

Stelt $\varepsilon \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ de vergelijking eener gegeven ellips voor en zijn $\phi - \frac{2}{3}\pi$, ϕ, $\phi + \frac{2}{3}\pi$ de excentrische anomalieën van drie harer punten A_1, A_2, A_3, dan bestaat er, zooals bekend is, tusschen deze punten het verband, dat de drie osculatiecirkels in deze punten met ε hetzelfde vierde punt R gemeen hebben. Dit punt R is het punt van Steiner, de ellips ε is de ellips van Steiner (ε) voor driehoek $A_1A_2A_3$. Is

driehoek $A_1A_2A_3$ gegeven, dan vindt men (ε) als de ellips door A_1, A_2, A_3 die het zwaartepunt van driehoek $A_1A_2A_3$ tot middelpunt heeft; met behulp van (ε) vindt men dan R.

Bovenstaande constructie van het punt R (vergelijk ook É. VIGARIÉ's Premier inventaire de la géométrie du triangle, *Annuaire de l'association française*, Congrès de Toulouse, 1887) leert, dat alle kegelsneden, die (ε) in A_i osculeeren en door R gaan, met de assen van (ε) evenwijdige assen hebben. Want is $\gamma = 0$ de vergelijking van een dier cirkels, dan komt in $\varepsilon - k\gamma = 0$ de term xy niet voor. Hiermee is het vraagstuk opgelost.

In het volgende bepalen we enkele meetkundige plaatsen, die met het vraagstuk in verband staan.

1. Is $\gamma \equiv x^2 + y^2 - 2Dx - 2Ey + F$, dan vindt men

$$\varepsilon - k\gamma = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 - k(x^2 + y^2 - 2Dx - 2Ey + F)$$

en wordt het middelpunt van $\varepsilon - k\gamma = 0$ dus bepaald door de vergelijkingen $b^2x - k(x - D) = 0$, $a^2y - k(y - E) = 0$. Door eliminatie van k vindt men voor de meetkundige plaats van het middelpunt

$$b^2x(y - E) = a^2y(x - D),$$

waarin men de hyperbool van APOLLONIUS van (ε) voor het middelpunt (D, E) van den osculatiecirkel $\gamma = 0$ herkent.

2. De kegelsnee $\varepsilon - k\gamma = 0$ wordt een gelijkzijdige hyperbool onder de voorwaarde $b^2 - k = k - a^2$ of $2k = a^2 + b^2$. Wijl de coördinaten (D, E) van het krommingsmiddelpunt behoorende bij het punt met de excentrische anomalie ϕ de waarden $\left(\frac{c^2 \operatorname{Cos}^3 \phi}{a}, \frac{c^2 \operatorname{Sin}^3 \phi}{b}\right)$ hebben, is de vergelijking der bedoelde gelijkzijdige hyperbool te brengen in den vorm

$$H' \equiv x^2 - y^2 - \frac{2(a^2 + b^2)}{a} \operatorname{Cos}^3 \phi \,.\, x + \frac{2(a^2 + b^2)}{b} \operatorname{Sin}^3 \phi \,.\, y + F = 0.$$

Bij verandering van ϕ vindt men voor de meetkundige plaats van het middelpunt $\left(\frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{Cos}^3 \phi, \frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{Sin}^3 \phi\right)$ dus de kromme $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$.

3. De kegelsnee $\varepsilon - k\gamma = 0$ gaat over in een hyperbool met asymptoten evenwijdig aan de gelijke toegevoegde middel-

lijnen van (ε) onder de voorwaarde $a^2(b^2 - k) = - b^2(a - k)$ of $(a^2 + b^2)k = 2a^2b^2$. Dus is voor de vergelijking dezer kromme

$$H'' \equiv b^2x^2 - a^2y^2 - 4ab^2x \operatorname{Cos}^3\phi + 4a^2by \operatorname{Sin}^3\phi + F' = 0$$

te schrijven en vindt men bij verandering van hoek ϕ voor het middelpunt $(2a \operatorname{Cos}^3\phi,\ 2b \operatorname{Sin}^3\phi)$ de meetkundige plaats $(bx)^{\frac{2}{3}} + (ay)^{\frac{2}{3}} = (2ab)^{\frac{2}{3}}$.

4. Construeert men de gelijkzijdige hyperbool, die (ε) in A_i driepuntig aanraakt en de assen van (ε) tot asymptotenrichtingen heeft, dan gaat deze kromme, zoo als bekend is, door het middellijnig tegenover R gelegen punt R′ van (ε). Dus zullen de drie op deze wijze bij de punten A_1, A_2, A_3 behoorende hyperbolen hetzelfde vierde snijpunt R′ met (ε) gemeen hebben.

Wijl de bij het punt met de anomalie ϕ behoorende gelijkzijdige hyperbool, waarvan hier sprake is, door de vergelijking

$$xy - b \operatorname{Sin}\phi\,(1 + 2\operatorname{Cos}^2\phi)x - a \operatorname{Cos}\phi\,(1 + 2\operatorname{Sin}^2\phi)y + F'' = 0$$

voorgesteld wordt, is

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 +$$
$$+ k[xy - b \operatorname{Sin}\phi\,(1 + 2\operatorname{Cos}^2\phi)x - a \operatorname{Cos}\phi\,(1 + 2\operatorname{Sin}^2\phi)y + F''] = 0$$

de vergelijking van alle kegelsneden, die (ε) in het punt met de excentrische anomalie ϕ osculeeren en door het overeenkomstige punt R′ gaan. Deze bundel geeft aanleiding tot geheel overeenkomstige beschouwingen.

Vraagstuk CXXX.

Door een punt in het vlak eener kegelsnee gaan, zooals bekend is, in het algemeen vier osculatiekoorden (koorden met osculatiecirkels). Gevraagd in welke gevallen deze koorden met passer en liniaal te construeeren zijn. (J. W. Tesch).

Opgelost *door* J. W. Tesch *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

1. De algemeene vergelijking der kegelsneden, die de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ in het punt (x_1, y_1) osculeeren, heeft den vorm

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)[y - y_1 - \mu(x - x_1)] = 0.$$

Zij stelt een cirkel voor, als λ en μ voldoen aan de voorwaarden

$$b^2(1 - \lambda\mu x_1) = a^2(1 + \lambda y_1), \quad b^2 x_1 = a^2 \mu y_1.$$

Dus is de osculatiekoorde van (x_1, y_1) voorgesteld door

$$b^2 x_1 (x - x_1) = a^2 y_1 (y - y_1)$$

en zijn de punten der ellips, waarvan de osculatiekoorden door het punt (α, β) gaan, de basispunten van den bundel

$$b^2x^2 - a^2y^2 - b^2\alpha x + a^2\beta y + k(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0 \,.\,.\, 1).$$

Indien $c^2k = a^2 + b^2$ is, stelt deze vergelijking den cirkel

$$2a^2b^2(x^2 + y^2) + a^2c^2\beta y - b^2c^2\alpha x - a^2b^2(a^2 + b^2) = 0$$

voor. Dus vinden we de stellingen

„Vier punten der ellips, waarvan de osculatiekoorden door een zelfde punt gaan, zijn concyclisch.''

„Alle cirkels door vier punten met door een zelfde punt gaande osculatiekoorden hebben met betrekking tot het middelpunt der ellips dezelfde negatieve macht.''

2. De lijnenparen van bovengenoemden bundel worden bepaald door de vergelijking

$$4a^2b^2k^3 + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 4a^2b^2)k + (a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) = 0 \,.\,.\, 2).$$

De constructie is met passer en liniaal uitvoerbaar, als één dier ontaarde kegelsneden kan worden geconstrueerd.

De kubische vergelijking in k heeft een wortel nul onder de voorwaarde $a^2\beta^2 = b^2\alpha^2$, d. w. z. als (α, β) ligt op een der beide rechten $ay = \pm bx$. Deze rechten vormen dus een eerste meetkundige plaats van punten, die aan de vraag voldoen.

Stelt men $\beta = bt$, $\alpha = \pm at$, dan vindt men voor de beide lijnen, waarin de kegelsnee ontaardt

$$bx \mp ay = 0, \quad bx \pm ay \mp abt = 0.$$

Hieruit blijkt tevens, dat de gelijke toegevoegde middellijnen der ellips dubbele osculatiekoorden zijn; zij behooren nl. als osculatiekoorde bij elk harer uiteinden.

Voor $\beta = 0$ heeft de kubische vergelijking een wortel $+ 1$; het overeenkomstige lijnenpaar $2x^2 - \alpha x - a^2 = 0$ kan gemakkelijk geconstrueerd worden.

Voor $\alpha = 0$ vindt men $k = -1$ en het lijnenpaar $2y^2 - \beta y - b^2 = 0$.

3. De overeenkomstige beschouwingen voor de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ kunnen gemakkelijk uit het voorgaande worden afgeleid.

Voor de parabool $y^2 - 2px = 0$ vindt men de hulpkromme $y^2 + p(x - \alpha) - \beta y = 0$, zoodat door (α, β) twee osculatiekoorden gaan, behoorende bij de snijpunten van de parabool met de rechte $3px - \beta y - p\alpha = 0$. Hier is de constructie dus steeds met passer en liniaal uit te voeren.

Aanmerking. Als zich van de derdemachtsvergelijking in k een eerstemachtsvergelijking afscheidt en de uit deze af te leiden waarde van k in α en β uitgedrukt bij invoeging in 1) een rechte lijn of een cirkel van punten (α, β) oplevert, is de constructie voor elk punt van die rechte of van dien cirkel mogelijk. Want dan kan men eerst die rechte of dien cirkel en daarna het lijnenpaar 1) construeeren.

Dus staat de oplossing van het vraagstuk in rechtstreeksch verband met het kubisch oppervlak 1) van punten (α, β, k), waarvan we de vergelijking nu in de gedaante

$$F \equiv 4a^2b^2z^3 + (a^2x^2 + b^2y^2 - 4a^2b^2)z + (a^2x^2 - b^2y^2) = 0$$

schrijven. Geeft de substitutie $z = \frac{\phi(x, y)}{\psi(x, y)}$ — waarin ϕ en ψ rationale vormen zijn — de vergelijking van rechte lijn of cirkel, dan hebben we met een oplossing te doen.

Hierbij komt in de eerste plaats — en, zooals gemakkelijk blijken kan, alleen (zie *Wiener Sitzungsberichte*, deel 98, blz. 1521) — het geval $z = px + qy$ in aanmerking. Dit voert ons tot de rechten van het kubisch oppervlak. Wijl dit, zoo als blijkt uit de voorwaarden $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, de toegevoegd onbestaanbare puntenparen

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm\, 2b\sqrt{2} \\ z = -1 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x = \pm\, 2a\sqrt{2} \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\},$$

tot paren van dubbelpunten heeft, bevat het slechts 9 rechten in plaats van 27, wijl onder deze 27 de zes verbindingslijnen van de vier dubbelpunten twee aan twee viermaal tellen.

Dus bevat het oppervlak slechts vijf *bestaanbare* rechten, nl.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} ax - by = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{c} x = \infty,\ y = \infty \\ z = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right\}$$

en wordt het door de vlakken der vijf bundels

$$z = \lambda_1 (ax + by), \quad z = \lambda_2 (ax - by), \quad z = \lambda_3,$$
$$z = 1 + \lambda_4 x, \quad z = -1 + \lambda_5 y$$

volgens ontaardende kubische krommen gesneden. Hieruit vloeien eerst de boven aangegeven oplossingen $z = 0$, $z = \pm 1$ voort. En verder leert een nader onderzoek, dat alleen de onderstelling $z = -\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ den onbestaanbaren cirkel

$$c^4 (x^2 + y^2) + 8a^2b^2 (a^2 + b^2) = 0$$

oplevert. Dus zijn de vermelde uitkomsten werkelijk de eenige mogelijken (RED.)

II. Voor $z = -\frac{c^2}{a^2 + b^2}$ vindt men de gelijkzijdige hyperbool

$$(a^2 + b^2)^2 (x^2 - y^2) = 8a^2b^2c^2,$$

waaraan het lijnenpaar $4 (a^2 y \pm b^2 x) = (a^2 + b^2) (\beta \pm \alpha)$ beantwoordt. Dit geval kan als het analogon van LAUERMANN's cirkel bij het overeenkomstige vraagstuk der normalen beschouwd worden (J. W. T.)

III. Ligt het gegeven punt (α, β) op de gegeven kegelsnee, dan is het natuurlijk een der vier gezochte punten. In het laatst gevonden geval vindt men dan $\alpha^2 = \frac{a^2b^2 (3a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^3}$.

Voor $\alpha = -\frac{ab (3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$ is een der drie andere punten dan gekenmerkt door de betrekking $x = \frac{ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$. Men heeft dus

$$\text{Cos } 3\phi = \frac{-b (3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{Cos } \phi = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

en hierin derhalve een voorbeeld van een meetkundig in drie gelijke deelen verdeelden hoek (J. W. T.).

Vraagstuk CXXXI.

Men vraagt de kegelsnee te construeeren, die door twee toegevoegd onbestaanbare punten en een pooldriehoek bepaald is.

(H. de Vries.)

Opgelost *door* H. de Vries.

Oplossing.

De twee toegevoegd onbestaanbare punten zijn gegeven als de dubbelpunten eener elliptische involutie op een bestaanbare rechte g en deze involutie is de poolinvolutie van g ten opzichte van de gezochte kegelsnee. Snijdt nu g de zijde BC van den gegeven pooldriehoek ABC in een punt X, dan gaat de poollijn van X ten opzichte van de gezochte kegelsnee door A en het in de involutie op g aan X toegevoegde punt X_1, dat men met behulp van de liniaal construeeren kan (*Wiskundige Opgaven*, deel VI, Vraagstuk 4). Snijdt de lijn AX_1 de zijde BC in een punt X_1', dan zijn XX_1', BC twee paren van de poolinvolutie van BC ten opzichte van de gezochte kegelsnee. De dubbelpunten dezer involutie zijn de snijpunten van BC met de kegelsnee, en hun verbindingslijnen met A de raaklijnen in deze punten. Langs denzelfden weg vindt men de poolinvoluties van CA en AB. En nu kunnen zich twee gevallen voordoen. Of de drie involuties zijn alle drie elliptisch, dan is de gezochte kegelsnee onbestaanbaar; òf een er van is elliptisch en de twee andere zijn hyperbolisch, dan is de kegelsnee bestaanbaar en bepaald door vier punten met hun raaklijnen.

Vraagstuk CXXXII.

Een door de onbestaanbare cirkelpunten gaande kromme van den vierden graad met drie fleflecnodaalpunten (dubbelpunten met twee buigraaklijnen) is door deze drie dubbelpunten alleen reeds bepaald. Men verlangt aangegeven te zien, in welke gevallen deze kromme op haar drievoudige punten na geheel onbestaanbaar is, en haar in de andere gevallen punt voor punt te construeeren.

(H. de Vries.)

Opgelost *door* Dr. P. H. Schoute *en* H. de Vries.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

Door middel van de bekende inversie $xx' = yy' = zz'$ met betrekking tot den driehoek ABC der fleflecnodaalpunten gaat de kromme C^4 in een kegelsnee over, waarvan ABC een pooldriehoek is. Gaat C^4 bovendien door de onbestaanbare cirkelpunten, dan zal de overeenkomstige kegelsnee dit ook doen en dus een cirkel zijn. Want deze punten komen wederzijds met elkaar overeen. De bedoelde cirkel heeft dan verder het hoogtepunt van driehoek ABC tot middelpunt en is dus bestaanbaar als de driehoek scherphoekig, onbestaanbaar als de driehoek stomphoekig is. In het eerste geval wordt de kromme C^4 punt voor punt gevonden door van de punten van den cirkel de overeenkomstige punten te bepalen.

Omtrent de toepassing der aangegeven inversie op de krommen C^4 met drie fleflecnodaalpunten vergelijke men mijn opstel „Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten" (*Archiv der Math. und Phys.*, 2[de] reeks, deel 3, blz. 113, enz.).

Vraagstuk CXXXIII.

In een willekeurig punt P eener circulaire kubische kromme (C^3 door de onbestaanbare cirkelpunten) construeert men den kromtecirkel als volgt. Men trekt door het tangentiaalpunt Q van P een willekeurige rechte, die C^3 behalve in Q nog in R en S snijdt, en brengt daarna een cirkel door P, R, S. Deze cirkel snijdt C^3 nog slechts in een enkel punt T; de cirkel door T, die PQ in P aanraakt, is de gezochte. Men vraagt het bewijs.

(H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossingen.

I. Volgens een bekende stelling zullen de kegelsneden door drie vaste punten M, N, P van C^3 en door de paren van snijpunten (R_1, S_1), (R_2, S_2), enz. van door een zelfde punt Q van C^3 gaande rechten l_1, l_2, enz. met C^3 een vierde punt T op C^3 met elkaar gemeen hebben.

Zijn M en N de onbestaanbare cirkelpunten der circulair ondersteld C^3, dan vindt men, dat de cirkels door P en de

paren van punten (R_i, S_i) op lijnen l_i door Q een tweede punt T op C^3 met elkaar gemeen hebben. Is bovendien Q het tangentiaalpunt van P en de raaklijn QP in P aan C^3 dus een der standen van de lijn l_i, dan zal de overeenkomstige cirkel de kromtecirkel van C^3 in P zijn, wijl de punten (R_i, S_i) dan met P samenvallen. Hieruit volgt dan onmiddellijk de aangegeven constructie. (H. D. V.)

II. Worden de coördinaten van een punt eener kubische kromme door elliptische functies van een zelfde argument uitgedrukt, dan is de som der parameters van drie collineaire punten congruent met een constante ten opzichte van de perioden.

Is deze constante nul (wat steeds bereikt kan worden) en stelt men door p den parameter van P voor, enz., dan wordt de gegeven constructie uitgedrukt door de congruenties

$$2p + q \equiv 0, \qquad q + r + s \equiv 0,$$
$$i + j + p + r + s + t \equiv 0,$$

waar i en j de parameters der cirkelpunten zijn.

Hieruit volgt terstond $2p \equiv r + s$, dus

$$i + j + 3p + t \equiv 0,$$

waaruit blijkt, dat de osculatiecirkel van P door het punt T gaat. (J. D. V.)

Vraagstuk CXXXIV.

Een hyperbool H is gegeven door haar beide asymptoten en een punt A. Men vraagt met de liniaal alleen te construeeren:

a) de hyperbool H′, die door een willekeurig punt B′ en door een van de twee oneindig verre punten van H gaat en bovendien deze kromme in haar tweede oneindig verre punt driepuntig aanraakt.

b) de hyperbool H′, die door een willekeurig punt B′ gaat en H in een van haar twee oneindig verre punten vierpuntig aanraakt.

Eindelijk vraagt men in beide gevallen naar de metrische betrekkingen van afhankelijkheid tusschen H en H′. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES.

Oplossing.

a. Twee kegelsneden, die elkaar in een punt P driepuntig aanraken èn in een ander punt Q snijden, kunnen steeds worden opgevat als twee perspectieve figuren; het perspectiefcentrum is het punt P en de perspectiefas *a* de lijn PQ (zie *Wiskundige Opgaven*, deel V, Vraagstuk 148, Aanmerking en H. SEEGER *Die Fundamentaltheorieen der neueren Geometrie, u. s. w.*, blz. 145). Zoo zijn dus ook de beide hyperbolen H en H′ sub *a*) twee perspectieve kegelsneden. Het perspectiefcentrum P (fig. 58) is het oneindig verre raakpunt; het punt Q is het tweede oneindig verre punt van H en de perspectiefas PQ is de oneindig verre rechte van het vlak. De lijn $B'P_\infty$ snijdt de hyperbool H in het overeenkomstige punt B van B′. De lijn BA snijdt haar overeenkomstige B′A′ op PQ, dus in het oneindige, waaruit volgt, dat B′A′ evenwijdig met BA is, terwijl het punt A′ gevonden wordt als snijpunt van B′A′ met de lijn AP_∞ evenwijdig aan BB′. Zooals het punt A′ gevonden werd, kan ook ieder willekeurig ander punt van H′ geconstrueerd worden. Bovendien zijn de raaklijnen *b*, *b*′ in twee overeenkomstige punten B, B′ evenwijdig, omdat zij elkaar op PQ moeten snijden. Men vindt dus H′ door H in de richting der asymptoot, die door P_∞ gaat, te verschuiven, totdat het geconstrueerde punt B op het gegevene B′ valt. Ook de tweede asymptoot *q*′ van H′ ontstaat langs denzelfden weg uit de tweede asymptoot *q* van H. De beide figuren zijn dus congruent en gelijkstandig.

b. Zullen de beide hyperbolen elkaar, in plaats van driepuntig, vierpuntig aanraken, dan moet het punt Q met P samenvallen. Ook dan nog kunnen H en H′ opgevat worden als perspectieve kegelsneden (H. SEEGER, t. a. p.). Terwijl het perspectiefcentrum P (fig. 59) gebleven is, is nu de asymptoot *p* van H, die door P gaat, de as van perspectief. De lijn $B'P_\infty$ snijdt de gegeven kromme H weer in het overeenkomstige punt B van B′, terwijl de twee overeenkomstige lijnen BA, B′A′, in plaats van evenwijdig te zijn, elkaar in A″ op de asymptoot *p* snijden; het punt A′ zelf is weer het snijpunt van B′A″ met AP_∞. En zooals het punt A′ gevonden werd, kunnen ook alle overige punten van H′ met de liniaal alleen geconstrueerd worden. De raaklijnen *b*, *b*′ in twee overeenkomstige

punten B, B' snijden elkaar op p. Wij verbinden, om in het bijzonder de tweede asymptoot van H' te vinden, een willekenrig punt van H, B bijv., met het van P_∞ verschillende oneindig verre punt van H, bepalen het snijpunt van deze lijn met a en verbinden dit met B'; het oneindig verre punt van deze verbindingslijn is dan het tweede oneindig verre punt van H'. En aangezien de tweede asymptoten van H en H' overeenkomstige lijnen zijn, gaat die van H' door het zooeven gevonden oneindig verre punt en het middelpunt van H.

De metrische betrekking van afhankelijkheid tusschen H en H' bestaat nu daarin, dat twee overeenkomstige figuren steeds denzelfden inhoud hebben. Verbindt men nl. twee willekeurige punten R, S van p met twee overeenkomstige punten C, C' van H, H', dan hebben de beide driehoeken RSC, RSC' denzelfden inhoud, omdat de lijn CC' evenwijdig aan a is. Hieruit bewijst men gemakkelijk, dat twee overeenkomstige veelhoeken ABC ...., A'B'C' ...., of twee segmenten van H en H', die door overeenkomstige koorden AB, A'B' begrensd worden, enz., gelijken inhoud hebben.

Vraagstuk CXXXV.

Gegeven een cirkel (C) in een vlak α en een rechte l evenwijdig aan α; de projectie van l op α gaat niet door het middelpunt van (C). Door draaiing van (C) om l ontstaat een omwentelingsoppervlak. Men vraagt

a) een dubbelraakvlak door een gegeven punt,

b) een door een gegeven punt gaande dubbelraaklijn van dit oppervlak te construeeren. (*Nyt Tidsskrift for Matematik*, B).

(C. Juel.)

Oplossing van de Redactie.

Men vindt een oplossing van dit vraagstuk van den Heer J. Petersen in het aangehaalde tijdschrift (deel 4, blz. 95). Wijl de oplossing van de tweede helft een onnauwkeurigheid bevat, plaatsen we alleen die van de eerste. Verder geven we de ons welwillend door den Heer C. Juel toegezonden oplossing der tweede helft.

a) Is M het middelpunt van het omwentelingsvlak en dus

de projectie van het middelpunt C van den cirkel (C) op de omwentelingsas l (fig. 60), dan is het raakvlak in het punt R van (C) bepaald door de raaklijn RS in R aan (C) en door de lijn RT in R loodrecht op het vlak door MR en de as l. Is het raakvlak dubbelraakvlak en gaat het dus door M, dan is SM evenwijdig aan RT en dus hoek RMS recht. Bijgevolg is ook hoek S′MS recht en worden, wijl S en S′ toegevoegd zijn ten opzichte van P en Q, deze punten S en S′ gevonden door den hoek PMQ en zijn nevenhoek middendoor te deelen.

Langs dezen weg vindt men twee omwentelingskegelvlakken, een bestaanbaar en een onbestaanbaar, die het oppervlak aanraken volgens de parallelcirkels, welke de meetkundige plaatsen zijn van de raakpunten der dubbelraakvlakken. Raakvlakken door een willekeurig punt P aan deze kegels zijn dubbelraakvlakken aan het oppervlak. Men vindt dus vier oplossingen, waarvan er hoogstens twee bestaanbaar zijn (J. P.)

b. We onderstellen, dat het gegeven punt P in het vlak α van den cirkel ligt; hierdoor wordt aan de algemeenheid niet te kort gedaan. Vervolgens stellen we ons de hyperbool (H) voor, die de doorsnee is van α met de omwentelingshyperboloïde, die door draaiing van de gevraagde dubbelraaklijn x om de as l ontstaat. Wijl l het gegeven omwentelingsoppervlak dubbel aanraakt, zal deze hyperbool (H) den cirkel (C) tweemaal aanraken, bovendien moet de gezochte hyperbool (H) de projectie van l op α en de loodlijn uit C op deze lijn tot assen hebben. Dus is de constructie van deze hyperbool teruggebracht tot het bekende vraagstuk: „Een kegelsnee te construeeren, die door drie gegeven punten gaat en een gegeven cirkel dubbel raakt". De drie bedoelde punten zijn dan P en de beide symmetrische punten van P met betrekking tot de symmetrieassen [1]). Zijn de twee raakpunten G en H van deze kegelsnee met (C) gevonden, dan is de gevraagde dubbelraaklijn gemeen aan de beide kegels, die P tot

[1]) Door inversie met betrekking tot den driehoek der drie gegeven punten komt de oplossing van dit vraagstuk neer op het construeeren van een der vier dubbelraaklijnen eener rationale C^4 door de cirkelpunten. Hieruit blijkt aan den eenen kant dat er vier oplossingen zijn van dit vraagstuk en er dus acht dubbelraaklijnen door P gaan, aan den anderen kant dat deze niet met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden. (Red.)

top en de bij G en H behoorende parallelcirkels tot richtlijnen hebben.

In den grond is dit gedeelte van dit vraagstuk niet verschillend van het geval, waarbij het omwentelingsoppervlak wordt vervangen door den gewonen ring. (C. J.)

Vraagstuk CXXXVI.

Gevraagd de meetkundige plaats van de punten M en M′ in het vlak van een gegeven driehoek ABC, die voldoen aan de betrekkingen

$$BM = CM', \quad CM = AM', \quad AM = BM'.$$

(É. Lemoine.)

Opgelost *door* Mej. A. G. Wijthoff, T. J. Allersma, W. Bouwman, W. Mantel *en* W. A. Poort.

Oplossing *van* T. J. Allersma.

1. Hoewel zeer gemakkelijk blijkt, dat de beide gevraagde meetkundige plaatsen kegelsneden zijn, die o. a. het middelpunt O van den om ABC beschreven cirkel gemeen moeten hebben, is het noodig bij het kiezen der coördinaatassen omzichtig te werk te gaan, als men de vergelijkingen dier kegelsneden in eenvoudigen vorm hebben wil.

Uit het volgende kan blijken, dat men dit laatste doel zeer goed bereikt, indien men de lijnen door O evenwijdig aan de assen van de traagheidsellips der drie even zwaar belaste hoekpunten A, B, C voor het zwaartepunt Z tot coördinaatassen aanneemt. Deze assen der traagheidsellips worden bepaald door de voorwaarde $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0$, als (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) de coördinaten van A, B, C met betrekking tot deze assen zijn. Zijn (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) de coördinaten van A, B, C ten opzichte van een paar willekeurige rechthoekige assen door Z, dan zullen deze assen gedraaid moeten worden onder een hoek ϕ bepaald door de vergelijking

$$\mathrm{Tg}\ 2\phi = \frac{2\,(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}.$$

2. Zijn (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) als boven de coördinaten van A, B, C ten opzichte van de traagheidsassen door Z,

dan gelden dus de betrekkingen

$$\Sigma\, \xi_i = 0\,, \quad \Sigma\, \eta_i = 0\,, \quad \Sigma\, \xi_i \eta_i = 0 \quad . \; . \; . \; 1),$$

waarin onder elk somteeken drie termen staan. Lossen we uit de derde en telkens een der anderen de verhoudingen tusschen de η's en de verhoudingen tusschen de ξ's op, dan vinden we

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = \lambda\,(\xi_3 - \xi_2) \\ \eta_2 = \lambda\,(\xi_1 - \xi_3) \\ \eta_3 = \lambda\,(\xi_2 - \xi_1) \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} \xi_1 = \mu\,(\eta_3 - \eta_2) \\ \xi_2 = \mu\,(\eta_1 - \eta_3) \\ \xi_3 = \mu\,(\eta_2 - \eta_1) \end{array}\right\} . \; . \; . \; . \; 2).$$

Hierin zijn λ en μ twee van den vorm van driehoek ABC afhankelijke standvastigen. Stellen we kortheidshalve

$$\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2 = \alpha\,, \quad \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 + \eta_1\eta_2 = \beta \quad . \; . \; . \; 3)$$

en dus in verband met 1)

$$\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_2 = -(\xi_3\eta_2 + \xi_1\eta_3 + \xi_2\eta_1) = \gamma \quad . \; . \; . \; 4),$$

dan vindt men door optelling der vergelijkingen van elk der beide stellen van 2) na die van het eerste achtereenvolgens met ξ_2, ξ_3, ξ_1, die van het tweede achtereenvolgens met η_2, η_3, η_1 vermenigvuldigd te hebben:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{3\alpha}, \quad \mu = \frac{\gamma}{3\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5).$$

Telt men de vergelijkingen van elk der stellen 2) bij elkaar na die van het eerste achtereenvolgens met η_2, η_3, η_1, die van het tweede achtereenvolgens met ξ_2, ξ_3, ξ_1 vermenigvuldigd te hebben, dan vindt men bovendien

$$\lambda = -\frac{\beta}{\gamma}, \quad \mu = \frac{\alpha}{\gamma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

en dus in verband met 5) nog

$$3\lambda\mu = -1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7).$$

3. Zijn (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_0, y_0), (X, Y), (X', Y') de coördinaten van A, B, C, Z, M, M' met betrekking tot de assen door O evenwijdig aan de traagheidsassen, dan is

$$\left.\begin{array}{l} x_i = \xi_i + x_0 \\ y_i = \eta_i + y_0 \end{array}\right\} (i = 1, 2, 3), \quad \left.\begin{array}{l} 3x_0 = \Sigma x_i \\ 3y_0 = \Sigma y_i \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; 8).$$

Verder is volgens de voorwaarden van het vraagstuk

$$\left.\begin{array}{l}(X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = (X' - x_3)^2 + (Y' - y_3)^2 \\ (X - x_3)^2 + (Y - y_3)^2 = (X' - x_1)^2 + (Y' - y_1)^2 \\ (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = (X' - x_2)^2 + (Y' - y_2)^2\end{array}\right\}.$$

Wijl O oorsprong is, is $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$ en herleiden deze vergelijkingen zich dus tot

$$\left.\begin{array}{l}X^2 + Y^2 - 2x_2X - 2y_2Y = X'^2 + Y'^2 - 2x_3X' - 2y_3Y' \\ X^2 + Y^2 - 2x_3X - 2y_3Y = X'^2 + Y'^2 - 2x_1X' - 2y_1Y' \\ X^2 + Y^2 - 2x_1X - 2y_1Y = X'^2 + Y'^2 - 2x_2X' - 2y_2Y'\end{array}\right\}.$$

Optelling dezer vergelijkingen geeft in verband met de laatste der vergelijkingen 8)

$$X^2 + Y^2 - 2x_0X - 2y_0Y = X'^2 + Y'^2 - 2x_0X' - 2y_0Y' \;..\; 9),$$

welke vergelijking aanwijst, dat twee bij elkaar behoorende punten M, M′ evenver van Z verwijderd zijn.

Verder geeft aftrekking der drie vergelijkingen twee aan twee de drie van elkaar afhankelijke vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}(x_1 - x_3)X + (y_1 - y_3)Y = (x_2 - x_1)X' + (y_2 - y_1)Y' \\ (x_2 - x_1)X + (y_2 - y_1)Y = (x_3 - x_2)X' + (y_3 - y_2)Y' \\ (x_3 - x_2)X + (y_3 - y_2)Y = (x_1 - x_3)X' + (y_1 - y_3)Y'\end{array}\right\},$$

waarin we in verband met het eerste stel vergelijkingen 8) de x en y ook mogen vervangen door ξ en η. In verband met 2) gaan ze dan over in

$$\left.\begin{array}{l}\mu\eta_2X + \lambda\xi_2Y = \mu\eta_3X' + \lambda\xi_3Y' \\ \mu\eta_3X + \lambda\xi_3Y = \mu\eta_1X' + \lambda\xi_1Y' \\ \mu\eta_1X + \lambda\xi_1Y = \mu\eta_2X' + \lambda\xi_2Y'\end{array}\right\}.$$

Optelling dezer vergelijking na vermenigvuldiging, eerst met η_3, η_1, η_2 en dan met ξ_3, ξ_1, ξ_2, geeft

$$\beta\mu X + \gamma\lambda Y = -2\beta\mu X', \quad -\gamma\mu X + \alpha\lambda\gamma = -2\alpha\lambda\gamma',$$

of in verband met 5)

$$X + 3\lambda Y = -2X', \quad 3\mu X + Y = -2Y' \;...\; 10).$$

Evenzoo vindt men door in bovenstaande bewerking de drietallen η_3, η_1, η_2 en ξ_3, ξ_1, ξ_2 door η_2, η_3, η_1 en ξ_2, ξ_3, ξ_1 te vervangen

$$-2X = X' - 3\lambda Y', \quad -2Y = -3\mu X' + Y' \;..\; 11).$$

Eindelijk geeft invoeging der waarden van 10) en van 11) de vergelijkingen der beide meetkundige plaatsen in den vorm

$$\left.\begin{array}{l}(1-3\mu^2)X^2+(1-3\lambda^2)Y^2-2(\lambda+\mu)XY-4(x_0+\mu y_0)X-4(y_0+\lambda x_0)Y=0\\(1-3\mu^2)X'^2+(1-3\lambda^2)Y'^2+2(\lambda+\mu)X'Y'-4(x_0-\mu y_0)X-4(y_0-\lambda x_0)Y=0\end{array}\right\}.$$

Naar behooren gaan deze beide kegelsneden door O.

Door gebruik te maken van 7) schrijven we voor deze vergelijkingen, als we tevens X en Y en X′ en Y′ door x en y vervangen,

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)(3\mu x^2+2xy+3\lambda y^2)+4(x_0+\mu y_0)x+4(y_0+\lambda x_0)y=0\\(\lambda+\mu)(3\mu x^2-2xy+3\lambda y^2)+4(x_0-\mu y_0)x+4(y_0+\lambda x_0)y=0\end{array}\right\}.$$

Voor de waarde van den aan de gewone vergelijking $ax^2+2bxy+cy^2+\text{enz.}=1$ beantwoordenden vorm b^2-ac vinden we $1-9\lambda\mu$ en dus 4; derhalve zijn beide kegelsneden hyperbolen.

4. We voeren de middelpunten (p, q) en (p', q') der beide hyperbolen in. Deze punten worden langs den gewonen weg bepaald door de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)(3\mu p+q)+2(x_0+\mu y_0)=0\\(\lambda+\mu)(p+3\lambda q)+2(y_0+\lambda x_0)=0\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)(3\mu p'-q')+2(x_0-\mu y_0)=0\\(\lambda+\mu)(-p'+3\lambda q')+2(y_0-\lambda x_0)=0\end{array}\right\}.$$

Hieruit volgt

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)p=\lambda x_0-y_0\\(\lambda+\mu)q=-x_0+\mu y_0\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)p'=\lambda x_0+y_0\\(\lambda+\mu)q'=x_0+\mu y_0\end{array}\right\}.$$

Hierdoor gaan de vergelijkingen der kegelsneden over in

$$\left.\begin{array}{l}K\equiv 3\mu x^2+2xy+3\lambda y^2+4q'x+4p'y=0\\K'\equiv 3\mu x^2-2xy+3\lambda y^2-4qx-4py=0\end{array}\right\}\quad\ldots\ 12),$$

waarbij op te merken valt, dat de coördinaten (p', q') van het middelpunt van K′ in de vergelijking van K en omgekeerd de coördinaten (p, q) van het middelpunt van K in de vergelijking van K′ voorkomen.

5. Uit de termen van den tweeden graad der vergelijkingen 12) volgt onmiddellijk, dat de asymptoten van K en K′ antiparallel zijn met betrekking tot elkaar ten opzichte van de traagheidsassen. We zoeken thans die asymptoten zelve. Door vermenigvuldiging met μ gaat die tweedemachtsvorm over in $3\mu^2x^2\pm 2\mu xy-y^2$, wat in de factoren $(3\mu x\mp y)$ en $(\mu x\pm y)$ of $(\lambda y\mp x)$ en $(\mu x\mp y)$ ontbonden kan worden. In verband

met de coördinaten der middelpunten vinden we dus voor de vergelijkingen der asymptoten f en g van K en f' en g' van K'

$$\left.\begin{array}{l} f \equiv 3(\lambda+\mu)(x+\lambda y)+4y_0=0 \\ g \equiv 3(\lambda+\mu)(y+\mu x)+4x_0=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} f' \equiv 3(\lambda+\mu)(x-\lambda y)-4y_0=0 \\ g' \equiv 3(\lambda+\mu)(y-\mu x)-4x_0=0 \end{array}\right\}.$$

Hieruit volgt derhalve, dat f en f' elkaar snijden in een zeker punt F_0 van de y-as en g en g' een punt G_0 van de x-as gemeen hebben. Trekt men nu uit O de lijnen OF, OF' en OG, OG' zoodanig, dat hierdoor de parallelogrammen OFSG en OF'S'G' ontstaan, dan vindt men onmiddellijk, dat OF en OF', OG en OG' aan elkaar gelijk zijn en dus de producten OG . OF en OG' . OF' van de coördinaten van O met betrekking tot de beide asymptotenparen (f, g), (f', g') der hyperbolen K en K' gelijk zijn. Dus is K' congruent met de toegevoegde hyperbool van K en omgekeerd.

Verder blijkt in verband met de coördinaten der middelpunten S, S' gemakkelijk, dat de tweede diagonaal DE van den rechthoek OZ (fig. 61) den afstand SS' loodrecht middendoordeelt.

6. Passen we op 12) de substitutie $y = tx$ toe, dan vinden we na eliminatie van x met behulp van 7) en van de bekende waarden van (p, q) en (p', q') uitgedrukt in x_0 en y_0 de betrekking

$$t^3 - \frac{y_0}{\lambda^2 x_0} t_2 - \frac{1}{\lambda^2} t + \frac{y_0}{9\lambda^4 x_0} = 0,$$

of, als we $t = \dfrac{u + y_0}{3\lambda^2 x_0}$ stellen,

$$u^3 - 3(y_0^2 + 3\lambda^2 x_0^2)u - 2(y_0^2 + 3\lambda^2 x_0^2)y_0 = 0.$$

Dus is de bekende vorm $a_1^3 - a_2^2$, overeenkomende met de derdemachtsvergelijking $u^3 - 3a_1 u \pm 2a_2 = 0$, hier voorgesteld door $3\lambda^2 x_0^2 (y_0^2 + 3\lambda^2 x_0)^2$ en dus positief, waaruit volgt, dat K en K' behalve O nog drie *bestaanbare* snijpunten M_1, M_2, M_3 gemeen hebben.

7. Door de substitutie $4x_0 = (\lambda + \mu)p_0$, $4y_0 = (\lambda + \mu)q_0$ gaan de vergelijkingen der kegelsneden over in

$$\left.\begin{array}{l} 3\mu x^2 + 2xy + 3\lambda y^2 + (p_0 + \mu q_0)\, x + (q_0 + \lambda p_0)\, y = 0 \\ 3\mu x^2 - 2xy + 3\lambda y^2 + (p_0 - \mu q_0)\, x + (q_0 - \lambda p_0)\, x = 0 \end{array}\right\}.$$

We bepalen thans volgens de door DE LONGCHAMPS aangewezen methode (vergelijk zijn *Géométrie analytique à deux dimensions*, blz. 399) den cirkel, die door de drie overige, hier ook bestaanbare snijpunten der hyperbolen gaat.

Daartoe vervormen we de vergelijkingen eerst tot

$$\left.\begin{array}{l} x\,(3\mu x + 2y + p_0 + \mu q_0) = -\,y\,(3\lambda y + q_0 + \lambda p_0) \\ x\,(3\mu x - 2y + p_0 - \mu q_0) = -\,y\,(3\lambda y + q_0 - \lambda p_0) \end{array}\right\}$$

en daarna tot

$$\left.\begin{array}{l} y\,(3\lambda y + 2x + q_0 + \lambda p_0) = -\,x\,(3\mu x + p_0 + \mu q_0) \\ y\,(3\lambda y - 2x + q_0 - p\lambda_0) = -\,x\,(3\mu x + p_0 - \mu q_0) \end{array}\right\}.$$

Vervolgens leiden we door deeling hieruit de betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} (2y + \mu q_0)\,(3\lambda y + q_0) = \lambda p_0\,(3\mu x + p_0) \\ (2x + \lambda p_0)\,(3\mu x + p_0) = \mu q_0\,(3\lambda y + q_0) \end{array}\right\}$$

af. Tellen we deze vergelijkingen bij elkaar na de eerste met λ, de tweede met μ vermenigvuldigd te hebben, dan wordt voor de vergelijking van den bedoelden cirkel gevonden

$$[x - \tfrac{1}{4}(\lambda + \mu)\, p_0]^2 + [y - \tfrac{1}{4}(\lambda + \mu)\, q_0]^2 = \tfrac{1}{16}(\lambda + \mu)^2\,(p_0^2 + q_0^2) + \\ + \tfrac{1}{6}(1 + 3\lambda^2)\, p_0^2 + \tfrac{1}{6}(1 + 3\mu^2)\, q_0^2,$$

of met terugkeering tot x_0 en y_0

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{8}{3(\lambda + \mu)^2}[(1 + 3\lambda^2)x_0^2 + (1 + 3\mu^2)y_0^2].$$

Dus heeft deze cirkel het zwaartepunt Z tot middelpunt.

Wijl twee overeenkomstige punten M en M′ evenver van Z liggen en deze snijpunten M_1, M_2, M_3 der hyperbolen niet even als het punt O met zich zelf kunnen overeenkomen, volgt hieruit, als de punten M_1, M_2, M_3 in de cyclische volgorde van ABC genomen zijn,

$$\left.\begin{array}{l} AM_1 = BM_2 = CM_3 \\ AM_2 = BM_3 = CM_1 \\ AM_3 = BM_1 = CM_2 \end{array}\right\}.$$

Voor het vierkant van den straal des cirkels vindt men door een eenvoudige herleiding

$$\frac{(3\lambda - \mu)^2 x_0^2 + (3\mu - \lambda)^2 y_0^2}{(\lambda + \mu)^2}.$$

Aanmerkingen der redactie. I. Bovenstaande oplossing van den heer Allersma is zonder twijfel verdienstelijk, wijl het vraagstuk van erkende moeielijkheid is (vergelijk *L'intermédiaire des mathématiciens*, deel I, blz. 146). Toch laat ze in een enkel opzicht te wenschen over. Het is nl. voor de meetkunde van den driehoek van belang λ en μ uit te drukken in de bepalende elementen des driehoeks. Eerst als dit geschied is, kan men komen tot het verband tusschen den vorm van de driehoeken $M_1M_2M_3$ en ABC. En dan kan waarschijnlijk gemakkelijk blijken, of de driehoeken $M_1M_2M_3$ en ABC een zelfden hoek van Brocard hebben, enz. [1])

II In de oorspronkelijke oplossing wordt de vergelijking

$$K'' \equiv x^2 + y^2 + 2Px + 2Qy + R = 0$$

van den cirkel $M_1M_2M_3$ bepaald door over de coëfficiënten S, T, U, S′, T′, U′ in de betrekking

$$K(Sx + Ty + U) + K'(S'x + T'y + U') = yK''$$

zoo te beschikken, dat deze een identiteit wordt. Wijl deze methode, hoewel eenvoudiger in conceptie dan die van de Longchamps, tot langere herleidingen aanleiding geeft, is ze door de bovenstaande vervangen.

Vraagstuk CXXXVII.

In het vlak van een gegeven driehoek ABC een lijn te vinden, die de verbindingslijnen AI, BI, CI van A, B, C met het middelpunt I des ingeschreven cirkels snijdt in drie punten A′, B′, C′, zoodanig gelegen, dat de cirkel door de drie snijpunten A″, B″, C″ der lijnenparen (BC′, B′C), (CA′, C′A), (AB A′B) de omgeschreven cirkel van driehoek ABC wordt. (É. Lemoine.)

Opgelost *door* Mej. A. G. Wijthoff en T. J. Allersma.

[1]) Juist als dit vel door de pers zal gaan, bespeuren we, dat E. Cesàro (*Nouv. Ann. de Math.*, 1887, p. 215), ter bepaling van verschillende merkwaardige punten van den driehoek, van het stelsel der traagheidsassen gebruik gemaakt heeft. Waarschijnlijk is het boven verlangde gemakkelijk uit zijn verhandeling te putten. (Red.)

Oplossing.

Beschouwen we ABC als coördinatendriehoek en nemen we $lx + my + nz = 0$ als de vergelijking der gevraagde lijn aan, dan wordt voor de vergelijkingen van CB′ en BC′ onmiddellijk gevonden $my + (n + l)\,x = 0$ en $nz + (l + m)\,x = 0$. Voor A″ gelden dan de betrekkingen $y = -\dfrac{n+l}{m}\,x$, $z = -\dfrac{l+m}{n}\,x$.

Door deze waarden in de vergelijking $ayz + bzx + cxy = 0$ van den omgeschreven cirkel te substitueeren en evenzoo met de op gelijke wijs gevonden betrekkingen van B″ en C″ te handelen, vinden we dus de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{r} -al^2 + bm^2 + cn^2 - amn - (a-c)\,nl - (a-b)\,lm = 0 \\ al^2 - bm^2 + cn^2 - (b-c)\,mn - bnl - (b-a)\,lm = 0 \\ al^2 + bm^2 - cn^2 - (c-b)\,nm - (c-a)\,nl - clm = 0 \end{array}\right\},$$

waaruit we, voor $a + b + c = 2s$ en $l + m + n = t$ door optelling twee aan twee de betrekkingen

$$at = s\,(t - l),\; bt = s\,(t - m),\; ct = s\,(t - n)$$

afleiden. Hieruit volgt dan weer door oplossing van l, m, n

$$\frac{l}{s-a} = \frac{m}{s-b} = \frac{n}{s-c}.$$

De vergelijking der gevraagde lijn is dus

$$(s-a)\,x + (s-b)\,y + (s-c)\,z = 0,$$

of

$$s\,(x + y + z) = ax + by + cz$$

en dus, in niet-homogenen vorm,

$$x + y + z = 2r,$$

als r de straal is van den ingeschreven cirkel.

Aanmerkingen I. De lijn wordt als volgt geconstrueerd.

Trek door I (fig. 62) de lijnen ID, IE, IF achtereenvolgens loodrecht op AI, BI, CI, waarin D, E, F de snijpunten dier nieuwe lijnen met de zijden BC, CA, AB voorstellen. Dan is DEF de gevraagde lijn.

Want voor elk punt van ID is $y + z = 2r$; voor D is dus $y + z = 2r$ en $x = 0$, enz. (T. J. A.)

II. De lijnen AA″, BB″, CC″ hebben tot vergelijkingen

$$\frac{y}{z} = \frac{n(n+l)}{m(m+l)}, \quad \frac{z}{x} = \frac{l(l+m)}{n(n+m)}, \quad \frac{x}{y} = \frac{m(m+n)}{l(l+n)}.$$

Zij snijden elkaar dus in het punt

$$\frac{lx}{m+n} = \frac{my}{n+l} = \frac{nz}{l+m},$$

d. i. in het inverse punt van het punt van NAGEL (LEMOINE).

Vraagstuk CXXXVIII.

Men vraagt te bewijzen, dat

a) n^2 de som is van n vierkanten voor $n > 2$,

b) $n^2 + 48$ de som is van n vierkanten voor $n > 1$,

c) n^2 de som is van $n + 1 - m^2$ vierkanten voor $n > m^2$

en *d*) $(n + 2m^2)^2$ altijd de som is van $n + m^2 + 1$ vierkanten.

(É. LEMOINE.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossing *van* W. MANTEL.

In het algemeen wordt de stelling bewezen door het verifiëeren der eenvoudige identiteiten:

a) $$n^2 = (n - 1) \cdot 2^2 + (n - 2)^2,$$

b) $$n^2 + 48 = (n - 1) \cdot 4^2 + (n - 8)^2,$$

c) $$n^2 = (n - m^2) \cdot (2m)^2 + (n - 2m^2)^2,$$

d) $$(n + 2m^2)^2 = n^2 + (n + m^2) \cdot (2m)^2.$$

Bij *b*) wordt het geval $n = 8$ aangevuld door

$$8^2 + 48 = 6 \cdot 1^2 + 5^2 + 9^2.$$

Bij *c*) wordt het geval $n = 2m^2$ aangevuld door

$$4m^4 = (2m^2 - 1)^2 + (m + 1)^2 + m^2 + (m - 1)^2 + (m^2 - 3) \cdot 1 .$$

AANMERKING I. Uit *a*) volgt ook

$$\begin{aligned} n^2 &= (n - 1) \cdot 4 + (n - 2) \\ &= (n - 1 - m^2) \cdot 2^2 + (2m)^2 + (n - 2)^2, \end{aligned}$$

wat een andere oplossing van c) is, die alleen geldt voor $n > m^2 + 1$.

Volgens deze oplossing van c) is

$(n + 2m^2)^2 = (n + m^2 - 1) \cdot 2^2 + (2m)^2 + (n + 2m^2 - 2)^2$,
wat een andere oplossing van d) is. (P. D. C. W.)

Vraagstuk CXXXIX.

Men vraagt een punt te vinden, waarvan de projecties op de zijvlakken van een gegeven viervlak ABCD de hoekpunten zijn van een viervlak met den grootsten of kleinsten inhoud (vergelijk STEINER, *Gesammelte Werke* II, blz. 90). (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

1 NOTATIE. We duiden door $x \operatorname{Cos} \alpha_i + y \operatorname{Cos} \beta_i + z \operatorname{Cos} \gamma_i - l_i = 0$, waarin $i = 1, 2, 3, 4$ genomen moet worden, de vergelijkingen der zijvlakken van ABCD, door (x, y, z) het gevraagde punt, door (x_i, y_i, z_i) zijn projecties op de vier zijvlakken en door p_i zijn afstanden tot die vier zijvlakken aan. Verder stellen A_i en h vijf standvastigen voor, waarvan de beteekenis nader zal worden aangewezen.

2. BETREKKING TUSSCHEN DE p_i. Uit de aangenomen notatie volgen de vier betrekkingen $x \operatorname{Cos} \alpha_i + y \operatorname{Cos} \beta_i + z \operatorname{Cos} \gamma_i - l_i = p_i$. De uitkomst der eliminatie van x, y, z uit deze vier vergelijkingen mag door $|\operatorname{Cos} \alpha_i, \operatorname{Cos} \beta_i, \operatorname{Cos} \gamma_i, l_i + p_i| = 0$ worden voorgesteld. Hiervoor schrijven wij

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4 = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

3. INHOUD V VAN HET VOETPUNTSVIERVLAK. Bekend is de vergelijking in determinantenvorm $6V = |x_i, y_i, z_i, 1|$. Schrijven we hierin voor x_i, y_i, z_i haar waarden $x + p_i \operatorname{Cos} \alpha_i$, $y + p_i \operatorname{Cos} \beta_i$, $z + p_i \operatorname{Cos} \gamma_i$ en trekken we de laatste kolom achtereenvolgens met x, y, z vermenigvuldigd van de eerste, tweede en derde af, dan vinden we

$$6V = |p_i \operatorname{Cos} \alpha_i, \; p_i \operatorname{Cos} \beta_i, \; p_i \operatorname{Cos} \gamma_i, \; 1|,$$

of wel

$$6V = p_1 p_2 p_3 p_4 \left(\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Was reeds uit 1) duidelijk met welke grootheden de standvastigen A_i evenredig zijn, uit 2) volgt tevens de volstrekte waarde, die wij ze geven; A_1 is de goniometrische vorm, met welken $p_2p_3p_4$ vermenigvuldigd moet worden om den zesvoudigen inhoud van het viervlak, dat p_2, p_3, p_4 tot in het gevraagde punt samenkomende ribben heeft, te vinden. Dus zijn A_i de grootheden die VON STAUDT de sinussen van de drievlakshoeken noemde.

4. MAXIMUM OF MINIMUM VAN V. Volgens den regel van de betrekkelijke maxima of minima moeten de vier afgeleiden van $V + kh$ naar p_i gelijk nul gesteld worden. Dit geeft

$$A_2p_3p_4 + A_3p_4p_2 + A_4p_2p_3 + 6kA_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

en nog drie andere vergelijkingen van overeenkomstigen vorm. Door de zes vergelijkingen 1), 2), 3) worden de zes grootheden p_i, k, V bepaald. Door 3) door $p_2p_3p_4$ te deelen, de overeenkomstige vergelijkingen op overeenkomstige wijs te behandelen en ze dan bij elkaar te tellen vindt men

$$3\left(\frac{A_1}{p_1}+\frac{A_2}{p_2}+\frac{A_3}{p_3}+\frac{A_4}{p_4}\right)+\frac{6k}{p_1p_2p_3p_4}\,(A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 + A_4p_4) = 0$$

of in verband met 1) en 2)

$$3V + kh = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

Eliminatie van k uit 3) en 4) geeft dan, $V = 2p_1p_2p_3p_4W$ gesteld,

$$12W = \frac{A_1}{p_1} + \frac{36p_1A_1W}{h},$$

of

$$A_1p_1 = \tfrac{1}{6}h\left\{1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{A_1^2}{hW}\right)}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5),$$

waaraan overeenkomstige uitdrukkingen voor A_2p_2, A_3p_3, A_4p_4 beantwoorden.

Voegen we deze in 1) in, dan vinden we

$$\sqrt{1-\frac{A_1^2}{hW}} + \sqrt{1-\frac{A_2^2}{hW}} + \sqrt{1-\frac{A_3^2}{hW}} + \sqrt{1-\frac{A_4^2}{hW}} = 2 \, . \, . \, 6)$$

ter bepaling van W. Is W hieruit berekend, dan worden p_1, p_2, p_3, p_4 uit 5) en de drie overeenkomstige vergelijkingen gevonden en daarna geeft de betrekking $V = 2p_1p_2p_3p_4W$ het gevraagde volume aan.

5. Gelijkbeenig viervlak; onderscheiding tusschen maximum en minimum. In het algemeen is de uitkomst 6) niet eenvoudig; zij wordt dit slechts voor $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$. Dit bijzonder geval doet zich voor, als het viervlak gelijkbeenig is en de overstaande zijden dus gelijk zijn. Dan is er slechts één oplossing; voor deze zijn de afstanden p gelijk. Het gevraagde punt is dan het middelpunt van den omgeschreven bol.

In het algemeen is de onderscheiding tusschen maximum en minimum bezwaarlijk uit te voeren. Voor het geval, dat alle A_i gelijk zijn, is het onderzoek echter uiterst gemakkelijk. We onderstellen dan, dat de afstanden p_i positief zijn. Dan gaan 1) en 2) over in

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = a, \quad p_2p_3p_4 + p_3p_4p_1 + p_4p_1p_2 + p_1p_2p_3 = bV,$$

waarin a en b positieve standvastigen zijn. We vinden dan

$$d(bV + ka) = (p_3p_4 + p_4p_2 + p_2p_3 + k)dp_1 + \text{enz.} = 0,$$

$$d^2(bV + ka) = (p_3p_4 + p_4p_2 + p_2p_3 + k)d^2p_1 + 2(p_3 + p_4)dp_1dp_2 + \text{enz.};$$

dus ook

$$bd^2V = 2(p_3 + p_4)dp_1dp_2 + \ldots$$

Wijl alle p gelijk en positief zijn, is het teeken van d^2V dat van

$$\delta = dp_1dp_2 + dp_1dp_3 + dp_1dp_4 + dp_2dp_3 + dp_2dp_4 + dp_3dp_4$$

met de voorwaarde $dp_1 + dp_2 + dp_3 + dp_4 = 0$. Na verwijdering van dp_1 is

$$\delta = -(dp_2 + dp_3 + dp_4)^2 + dp_2dp_3 + dp_2dp_4 + dp_3dp_4,$$

wat wezenlijk negatief is. Voor dit geval is het volume dus maximum.

Aanmerking van den heer Neuberg. De meetkundige plaats der punten, waarvan de projecties op de zijvlakken van een viervlak in een plat vlak liggen (uitbreiding van het begrip der rechten van Simson), is het kubisch oppervlak

$$S_3 \equiv A_1p_2p_3p_4 + A_2p_3p_4p_1 + A_3p_4p_1p_2 + A_4p_1p_2p_3 = 0,$$

dat door de zes ribben van het viervlak gaat [1]). Dit oppervlak S_3 verdeelt de ruimte in twee streken; in de eene hebben alle punten een voetpuntsviervlak met positief, in de andere

[1]) Welk oppervlak wordt onthuld door de *vlakken* van Simson? (Red.)

hebben alle punten een voetpuntsviervlak met negatief volume. Snijdt een willekeurige lijn l dit oppervlak in de punten L, M, N, dan wisselt het tweede lid van de uitdrukking 1), welke zesmaal het volume van het voetpuntsviervlak voorstelt, driemaal van teeken, als het punt, waarbij dit behoort, l doorloopt; zijn twee der snijpunten onbestaanbaar, dan komt dit wisselen van teeken slechts eenmaal voor. Deze omstandigheid verzwaart de analytische onderscheiding tusschen maximum en minimum. Want, wat absoluut minimum is in de streek der punten met negatieve voetpuntsvlakken, is analytisch maximum en omgekeerd.

De belangrijke bijdrage van den Heer MANTEL wettigt de onderstelling, dat de nadere studie van de ruimteverdeeling door het oppervlak $S_3 = 0$ de vraag omtrent maximum of minimum spoedig beslissend zal oplossen.

Vraagstuk CXL.

In een vlak zijn gegeven een driehoek ABC en een punt M. Gevraagd de meetkundige plaats van een punt P zoo gelegen, dat de lijnen door M evenwijdig aan AP, BP, CP getrokken de zijden BC, CA, AB achtereenvolgens in punten A′, B′, C′ snijden, waarvoor de verbindingslijnen AA′, BB′, CC′ door een zelfde punt gaan. Tevens de meetkundige plaats van dit laatste punt Q te bepalen.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Mej. A. G. WIJTHOFF, T. J. ALLERSMA, W. BOUWMAN, J. NEUBERG *en* W. A. POORT.

Oplossingen.

1. STELKUNDIGE OPLOSSING. Nemen we ABC tot coördinatendriehoek aan en stellen we door (f, g, h) en (x_1, y_1, z_1) de coördinaten van M en P voor, dan zijn de vergelijkingen vau AP en A′M achtereenvolgens

$$z_1 y - y_1 z = 0 \quad , \quad z_1 y - y_1 z + k(ax + by + cz) = 0,$$

waarin k bepaald wordt door de voorwaarde

$$z_1 g - y_1 h + k(af + bg + ch) = 0,$$

die uitdrukt, dat A′M door M gaat. Dus zijn de vergelijkin-

gen van AA′, BB′, CC′ achtereenvolgens

$$\{(af + ch)z_1 + bhy_1)\}y = \{(af + bg)y_1 + cgz_1\}z\,,$$
$$\{(bg + af)x_1 + cfz_1)\}z = \{(bg + ch)z_1 + ahx_1\}x\,,$$
$$\{(ch + bg)y_1 + agx_1)\}x = \{(ch + af)x_1 + bfy_1\}y\,,$$

welke door een punt gaande rechten voorstellen onder de voorwaarde

$$\{(af + ch)z_1 + bhy_1\}\,\{(bg + af)x_1 + cfz_1\}\,\{(ch + bg)y_1 + agx_1\}$$
$$= \{(af + bg)y_1 + cgz_1\}\,\{(bg + ch)z_1 + ahx_1\}\,\{(ch + af)x_1 + bfy_1\},$$

of met weglating der accenten bij de veranderlijken

$$Lx^2y + L'x^2z + My^2z + M'y^2x + Nz^2x + N'z^2y = 0.$$

Dus is de meetkundige plaats (P) van P een kromme van den derden graad gaande door A, B, C.

Door uit de vergelijkingen van AA′, BB′, CC′ de x_1, y_1, z_1 te elimineeren vindt men geheel op dezelfde wijs, dat ook Q een door A, B, C gaande kubische kromme (Q) doorloopt.

(T. J. A., W. B, W. A. P., A. G. W.)

AANMERKINGEN I. Zijn D, E, F de punten, waarin (P) de zijden BC, CA, AB ten derden male snijdt, dan zijn

$$Lx + M'y = 0\,,\quad My + N'z = 0\,,\quad Nz + L'x = 0$$

de vergelijkingen der rechten AD, BE, CF. Wijl $LMN + L'M'N' = 0$ is, gaan deze door een zelfde punt P′.

Zijn D′, E′, F′ de punten, waarin (Q) de zijden BC, CA, AB ten derden male snijdt, dan blijkt op dezelfde wijs, dat AD′, BE′, CF′ door een zelfde punt Q′ gaan (T. J. A.).

II. Het punt M ligt op (P) en (Q).

De raaklijnen in A, B, C aan (P) zijn eenvoudig meetkundig te construeeren. Onderstellen we, dat P met A samenvalt, dan is MB′ evenwijdig aan BA en MC′ evenwijdig aan CA. We vinden dan onmiddellijk B′, C′ en het overeenkomstige punt Q. Trekken we nu AQ, dan snijdt deze BC in A′; de raaklijn in A aan (P) is dan evenwijdig aan MA′.

Het is uit zich zelf duidelijk, dat (P) door A, B, C gaat. Aan den anderen kant vindt men, dat Q met A, B, C samenvalt, als men voor P achtereenvolgens het oneindig ver gelegen punt der lijnen MA, MB, MC aanneemt (W. B.).

III. De lijn PQ omhult een kromme van de derde klasse.
(W. A. P.)

MEETKUNDIGE OPLOSSING VAN DEN HEER NEUBERG. We trekken door A en M twee evenwijdige lijnen AA_1 en MA′, die BC (fig. 63) in A_1 *) en A′ snijden en zoeken de op $AA_1 = l_p$ gelegen punten P, de op $AA' = l_q$ gelegen punten Q. We verbinden daartoe een willekeurig op l_p gekozen punt X met B en C, trekken door M de rechten MB′ en MC′ achtereenvolgens evenwijdig aan BX en CX en verbinden de punten B′ en C′, waarin deze achtereenvolgens CA en AB snijden, met B en C, waardoor het punt Y verkregen wordt. Wijl de stralen BX en CX bij verplaatsing van X langs l_p perspectivische stralenbundels doorloopen, zullen BB′ en CC′ onder gelijke omstandigheden projectieve stralenbundels vormen en Y dus een kegelsnee (Y) beschrijven, die door B en C gaat. Valt X met A of A_1 samen, dan komt Y in twee standen Y′ en Y″, die van de richting der lijn l_p door A onafhankelijk zijn. Als l_p om A draait, doorloopt (Y) dus een bundel van kegelsneden met B, C, Y′, Y″ tot basispunten. Wijl nu de snijpunten van l_q met (Y) klaarblijkelijk twee punten van (Q) zijn en er tusschen de stralen l_q en de kegelsneden (Y) een projectief verband bestaat, is de kromme (Q) de meetkundige plaats van de snijpunten der overeenkomstige elementen van twee projectieve bundels, een stralenbundel en een bundel van kegelsneden. Dus is (Q) een kubische kromme gaande door A, B, C, Y′, Y″ enz.

Geheel langs overeenkomstigen weg vindt men, dat P een kubische kromme (P) door A, B, C doorloopt. Men laat dan een punt Y de lijn AA′ doorloopen, waarbij X een kegelsnee (X) door B, C en twee met de standen A en A′ van Y overeenkomende standen X′ en X″ van X beschrijft, enz.

Men vindt gemakkelijk de drie nieuwe snijpunten van (P) met de zijden van driehoek ABC. Valt nl. P op BC, dan vallen MB′ en MC′ in een zelfde lijn B′MC′ door M samen en is Q steeds het snijpunt Y″ van BB′ en CC′. Snijdt AY″ de zijde BC in α, dan zal de lijn door A evenwijdig aan $M\alpha$ op BC het derde snijpunt D bepalen.

Eveneens vindt men gemakkelijk de drie nieuwe snijpunten

*) Deze letter ontbreekt in de figuur.

van (Q) met de zijden van driehoek ABC. Ligt Q op BC, dan vallen A′, B′, C′ in Q, C, B en zal P dus het snijpunt S van de lijnen BS en CS evenwijdig aan CM en BM zijn; de lijn door M evenwijdig aan AS snijdt BC dan in het gezochte punt D′.

Het punt M ligt op beide krommen. Want, als men P in M aanneemt, valt Q ook in M.

Aanmerkingen. I. Men kan de vraag algemeener maken door de lijn in het oneindige te vervangen door een lijn in het eindige (conische projectie van het vraagstuk). Ook kan men de lijnen AP, BP, CP door de drie hoekpunten D, E, F van een nieuwen driehoek laten gaan. Dan neemt het vraagstuk den volgenden vorm aan:

In een vlak zijn gegeven twee driehoeken ABC, DEF, een lijn l en een punt M. Gevraagd de meetkundige plaats van het punt P zoo gelegen, dat de lijnen door M naar de snijpunten D_1, E_1, F_1 van l met DP, EP, FP de lijnen BC, CA, AB achtereenvolgens in punten A′, B′, C′ snijden, waarvoor de verbindingslijnen AA′, BB′, CC′ door een zelfde punt Q gaan. Tevens de meetkundige plaats van Q te bepalen.

II. Het vraagstuk 12202 van de *Educational Times* van Januari 1894 heeft ons tot het bovenstaand vraagstuk gebracht. Daarin is M het hoogtepunt van ABC en gaat de meetkundige plaats (P) door de middelpunten O en I van om- en ingeschreven cirkel.

III. Hoe kan men, als een kubische kromme gegeven is, op deze vier punten A, B, C en M aanwijzen, voor welke zij als de meetkundige plaats (P) of (Q) verschijnt?

Vraagstuk CXLI.

Gegeven twee willekeurige viervlakken ABCD en A′B′C′D′. Te bewijzen, dat de meetkundige plaats van een punt P, waarvoor A′ en de lijnen achtereenvolgens door B′, C′, D′ evenwijdig aan BP, CP, DP op een zelfde hyperboloïde liggen, een hyperboloïde is, en te onderzoeken, of het mogelijk is P zoo te bepalen, dat de lijnen door A′, B′, C′, D′ evenwijdig aan AP, BP, CP, DP vier tot een zelfde stelsel behoorende beschrijvende lijnen eener hyperboloïde zijn. (J. Neuberg.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, W. Bouwman *en* J. Neuberg.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

1. We nemen A′B′C′D′ als coördinatenviervlak aan en gebruiken normale afstandscoördinaten w, x, y, z. Is V het volume van het viervlak en zijn α, β, γ, δ de inhouden der vier zijvlakken, dan geldt voor elk punt de betrekking

$$\alpha w + \beta x + \gamma y + \delta z = 0.$$

Met behulp van deze identiteit kan men de vergelijkingen van krommen en oppervlakken zoo noodig gelijkslachtig maken.

Laten (w_i, x_i, y_i, z_i) voor $i = 0, 1, 2, 3, 4$ achtereenvolgens de coördinaten van P, A, B, C, D aanduiden en l_i voor $i = 1, 2, 3, 4$ evenzoo de lijnen door A′, B′, C′, D′ evenwijdig aan AP, BP, CP, DP voorstellen. We kunnen dan schrijven voor de vergelijkingen van

$$\left.\begin{array}{l} l_1 \ldots\ldots \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{m_1} = \dfrac{z}{n_1} \\ l_2 \ldots\ldots \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{m_2} = \dfrac{w}{n_2} \\ l_3 \ldots\ldots \dfrac{z}{1} = \dfrac{w}{m_3} = \dfrac{x}{n_3} \\ l_4 \ldots\ldots \dfrac{w}{1} = \dfrac{x}{m_4} = \dfrac{y}{n_4} \end{array}\right\},$$

als we stellen:

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - x_0)\, m_1 = y_1 - y_0 \\ (y_2 - y_0)\, m_2 = z_2 - z_0 \\ (z_3 - z_0)\, m_3 = w_3 - w_0 \\ (w_4 - w_0)\, m_4 = x_4 - x_0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} (x_1 - x_0)\, n_1 = z_1 - z_0 \\ (y_2 - y_0)\, n_2 = w_2 - w_0 \\ (z_3 - z_0)\, n_3 = x_3 - x_0 \\ (w_4 - w_0)\, n_4 = y_4 - y_0 \end{array}\right\}. \quad 1).$$

Zal nu het punt A′ met l_2, l_3, l_4 op een zelfde hyperboloïde liggen, dan moet een door A′ gaande lijn, die we door $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ voorstellen, op l_2, l_3, l_4 kunnen rusten. Dit heeft plaats onder de voorwaarden

$$n = m m_2\,, \quad 1 = n n_3\,, \quad m m_4 = n_4\,,$$

waaruit door eliminatie van m en n de betrekking $m_4 = m_2 n_3 n_4$ gevonden wordt.

Voegen we hierin de waarden voor m_4, m_2, n_3, n_4 uit 1) in en laten we den index nul weg, dan vinden we voor de meetkundige plaats van P de vergelijking

$$(x - x_4)(y - y_2)(z - z_3) = (x - x_3)(y - y_4)(z - z_2).$$

Wijl de termen van den derden graad verdwijnen, stelt deze vergelijking een kwadratisch oppervlak voor. Dit oppervlak moet een éénbladige hyperboloïde zijn, want het bezit de zes rechte lijnen

$$\left.\begin{matrix} y = y_2 \\ z = z_2 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = y_4 \\ z = z_3 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} z = z_3 \\ x = x_3 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} z = z_2 \\ x = x_4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x = x_4 \\ y = y_4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x = x_3 \\ y = y_2 \end{matrix}\right\},$$

waarvan 1 en 2, 3 en 4, 5 en 6 achtereenvolgens evenwijdig zijn aan A′B′, A′C′, A′D′, terwijl 1, 3, 5 achtereenvolgens door B, C, D gaan.

2. Geheel langs den zelfden weg vindt men, dat de meetkundige plaatsen van P, waarvoor B′ met l_3, l_4, l_1, C′ met l_4, l_1, l_2, D′ met l_1, l_2, l_3 op een zelfde hyperboloïde liggen, kwadratische regelvlakken zijn. Stellen we deze vier regelvlakken, de boven gevondene en de drie overeenkomstigen, door H_1, H_2, H_3, H_4 voor en voeren we de volgende notatie in

$$(x - x_4)(y - y_2)(z - z_3) = W, \quad (x - x_3)(y - y_4)(z - z_2) = W',$$
$$(y - y_1)(z - z_3)(w - w_4) = X, \quad (y - y_4)(z - z_1)(w - w_3) = X',$$
$$(z - z_2)(w - w_4)(x - x_1) = Y, \quad (z - z_1)(w - w_2)(x - x_4) = Y',$$
$$(w - w_3)(x - x_1)(y - y_2) = Z, \quad (w - w_2)(x - x_3)(y - y_1) = Z',$$

dan vinden we voor de vergelijkingen der vier regelvlakken

$$H_1 \equiv W - W' = 0, \qquad H_2 \equiv X - X' = 0,$$
$$H_3 \equiv Y - Y' = 0, \qquad H_4 \equiv Z - Z' = 0.$$

Elk punt, dat deze oppervlakken met elkaar gemeen hebben, is een punt P, dat aan de eischen van het tweede deel van het vraagstuk voldoet.

Aanmerkingen. I. Is P (fig. 64) een punt van de eerste meetkundige plaats, dan zal er een lijn α door A′ te trekken zijn, die rust op de lijnen B′B″, C′C″, D′D″ door B′, C′, D′ evenwijdig aan BP, CP, DP getrokken. Zijn nu BB_a, CC_a, DD_a evenwijdig aan B′A′, C′A′, D′A′, dan zijn ook de vlakken B_aBP, C_aCP, D_aDP evenwijdig aan de vlakken A′B′B″, A′C′C″,

A′D′D″ en snijden ze elkaar dus volgens een lijn α' evenwijdig aan α, die op BB_a, CC_a, DD_a rust. En omgekeerd zal elk punt eener op BB_a, CC_a, DD_a rustende lijn α' aan de voorwaarde van het punt P voldoen. Dus is de meetkundige plaats van P het door de drie richtlijnen BB_a, CC_a, DD_a bepaalde regelvlak H_1 (J. N.).

II. Uit de boven aangenomen notatie volgt onmiddellijk de identische betrekking $WX'YZ' \equiv W'XY'Z$. Hieruit blijkt, dat de punten, waarvan de coördinaten de drie betrekkingen $W = W'$, $X = X'$, $Y = Y'$ bevredigen, dit ook de betrekking $Z = Z'$ doen; alleen als $W = W'$ is enz., door dat beide nul worden, vervalt de gemaakte gevolgtrekking. Anders gezegd, de punten gemeen aan H_1, H_2, H_3 voor welke geen der vormen W, X, Y de waarde nul aanneemt, liggen ook op H_4.

Beschouwen we nu de beide bikwadratische krommen, die de doorsnee vormen van H_1 en H_2 en van H_2 en H_3, dan wordt het duidelijk, dat elk van deze uit een kubische ruimtekromme R en een deze kromme tweemaal snijdende rechte r bestaat. Uit de vergelijkingen $z = z_3$, $y = y_4$ en $w = w_4$, $z = z_1$ dezer rechten volgt, dat ze elkaar kruisen en op H_2 dus tot hetzelfde stelsel behooren. Hieruit kan dan verder afgeleid worden, dat elk der beide op H_2 gelegen krommen R met elk der beide eveneens op H_2 liggende rechten r twee punten gemeen heeft. Zijn beide bikwadratische krommen als (R, r) en (R′, r') van elkaar onderscheiden, dan kan dus beweerd worden, dat de beide paren van snijpunten (R, r') en (R′, r) tot de acht gemeenschappelijke punten van H_1, H_2, H_3 behooren. Wijl voor het eerste paar X en Y, voor het tweede paar W en X nul worden, liggen deze vier punten niet op H_4. Dus zijn er vier punten, die aan de eischen van het tweede deel der vraag voldoen, nl. de vier overige snijpunten van H_1, H_2, H_3 (P. H. S.).

Vraagstuk CXLII.

Gegeven een vlakke kromme C^n en een punt O in het vlak der kromme. Zet men op de raaklijnen p in elk punt P van C^n naar weerskanten stukken PM = OP uit, dan ontstaat er een nieuwe kromme, de meetkundige plaats van M, die door Steiner be-

schouwd is (zie *Gesammelte Werke*, II, blz. 133 of *Journal von Crelle*, 21, blz. 106). Men vraagt in een punt M aan deze kromme de raaklijn te construeeren. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* W. BOUWMAN, W. MANTEL *en* J. NEUBERG.

Oplossingen.

I. Zijn P en P′ (fig. 65) twee opvolgende punten van C^n en M en M′ twee hiermee overeenkomende punten der nieuwe kromme, dan moet de grensstand van de lijn MM′ bepaald worden. We beschouwen daartoe de oneindig kleine driehoeken QMM′ en CPP′, waarvan de eerste door de beide raaklijnen in M en M′ aan C^n en de verbindingslijn MM′ en de tweede door de normalen in P en P′ aan C^n en de verbindingslijn PP′ gevormd wordt. Is hoek QMM′ door μ, CP = CP′ door R voorgesteld, dan vinden we met behulp van de verder in de figuur gegevene notaties

$$\frac{\text{Sin } \mu}{\text{Sin } (\mu + d\phi)} = \frac{QM'}{QM} = \frac{P'M' - P'Q}{PM + QP} = \frac{r + dr - \frac{1}{2}Rd\phi}{r + \frac{1}{2}Rd\phi}$$

en dus ook door het quotient van de som en het verschil van tellers en noemers te nemen

$$\text{Tg } \mu = \frac{r}{R - \frac{dr}{d\phi}} = \frac{r}{R(1 - \text{Cos } \psi)}.$$

Hieruit vloeit de volgende constructie voort. Zet op PO van P uit den kromtestraal R af, projecteer dezen op PM, trek deze projectie van R af en construeer nu een rechthoekigen driehoek met dit verschil als eene en r als andere rechthoekszijde. Dan is de scherpe hoek tegenover r de hoek, waaronder de lijn MM′ de raaklijn PM snijdt (W. B.).

II. Volgens de notatie, die in vraagstuk 77 is aangegeven [1]), stellen de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} x \text{ Cos } \alpha + y \text{ Sin } \alpha &= u \\ -x \text{ Sin } \alpha + y \text{ Cos } \alpha &= u' \\ -x \text{ Cos } \alpha - y \text{ Sin } \alpha &= u'' \end{aligned}\right\},$$

[1]) Men gelieve op blz. 140 de vormen $\sqrt{u'^2 + u''^2}$ en $u + u'$ onder *b*) en *c*) door $\sqrt{u^2 + u'^2}$ en $u + u''$ te vervangen.

waarin u een bekende functie van α is, achtereenvolgens de raaklijn, de normaal en de lijn door het krommingsmiddelpunt evenwijdig aan de raaklijn voor. In verband met de daar gegeven waarden van de coördinaten van P en van den afstand OP zijn de coördinaten van M gegeven door de betrekkingen

$$\xi = u \operatorname{Cos} \alpha - u' \operatorname{Sin} \alpha \pm \sqrt{u^2 + u'^2} \operatorname{Sin} \alpha,$$

$$\eta = u \operatorname{Sin} \alpha + u' \operatorname{Cos} \alpha \mp \sqrt{u^2 + u'^2} \operatorname{Cos} \alpha.$$

Dus vindt men ter bepaling van den hoek χ, dien de gevraagde raaklijn met de x-as maakt, de vergelijking

$$\operatorname{Tg} \chi = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\mathrm{R}(-r \pm u') \operatorname{Cos} \alpha \pm r^2 \operatorname{Sin} \alpha}{\mathrm{R}(r \mp u') \operatorname{Sin} \alpha \pm r^2 \operatorname{Cos} \alpha}$$

en dus, als men (fig. 66) de x as door O zoodanig aangenomen heeft, dat $\alpha = 90°$ is,

$$\operatorname{Tg} \chi = \frac{r^2}{\mathrm{R}(u' \mp r)}.$$

In deze uitkomst, waaruit χ gemakkelijk te construeeren is, geldt voor het in de figuur beschouwde geval het bovenste teeken (W. M.).

III. Het vraagstuk wordt gemakkelijk opgelost met behulp van de leerwijze van ROBERVAL, vooral als alle daarbij optredende snelheden worden voorgesteld na draaiing over een rechten hoek, bijv. in den zin van de beweging der wijzers eens uurwerks.

Is C (fig. 66) het krommingsmiddelpunt van C^n voor P en dus ook het onbestendige draaiingsmiddelpunt van het voorloopig van standvastige lengte ondersteld segment PM, dan kunnen de snelheden van P en M op de aangegeven wijze door PC en MC worden voorgesteld, als men aanneemt, dat de beweging in den zin van het pijltje geschied. Hiermee is dan tevens de maat voorgesteld, waarmee de snelheden gemeten worden. We ontbinden de snelheid MC in MP en PC, waarvan de eerste aan de draaiing van MP om P, de tweede aan de verschuiving van M over PM beantwoordt.

Beschouwen we P vervolgens als een punt van OP, dan ontbinden we de snelheid PC van P in PQ en QC; van deze

ontbondenen komt de eerste met een draaiing van den voerstraal OP om O, de tweede met een verschuiving van P langs PO overeen. Uit de voorwaarde OP = PM volgt, dat het verschil der snelheden van P en M langs PM aan de snelheid van P langs PO gelijk moet zijn. Trekken we QC van PC af, dan zal PN dus de snelheid zijn, met welke het boven onveranderlijk gedachte segment PM zich moet vergrooten, willen CP en PM gelijk blijven. Het punt M der nieuwe kromme heeft dus de snelheden MP en PN. Derhalve is MN de normaal in M aan de nieuwe kromme en de loodlijn MT in M op deze lijn de gezochte raaklijn (J. N.).

Aanmerking. De heer Neuberg merkt op, dat bovenstaande door hem op het Congres te Caen in 1894 medegedeelde constructie geheel overeenkomt met de resultaten van de heeren Bouwman en Mantel. We wijzen dit met een enkel woord aan.

Uit een vergelijking der beide figuren is onmiddellijk duidelijk, dat de hoek μ van de eerste oplossing en het supplement van den hoek χ van de tweede oplossing de hoek PNM van de laatste oplossing is. Dus moet eerst worden aangewezen, dat de beide uitdrukkingen $\frac{r}{R\,(1 - \text{Cos}\,\phi)}$ en $\frac{r^2}{R\,(r - u')}$ gelijk zijn aan $\frac{PM}{PN}$.

Nu is $r \,.\, QC = u' \,.\, R$ en dus $PN = \frac{R}{r}(r - u')$; wijl $PM = r$ is, volgt hieruit de gelijkheid van de tweede en de derde waarde. Verder is $u' = r\,\text{Cos}\,\phi$; wordt dit in de tweede uitdrukking ingevoegd, dan gaat zij in de eerste over.

Vraagstuk CXLIII.

In een zelfde vlak zijn twee driehoeken ABC en A′B′C′ gegeven. Gevraagd de meetkundige plaats van het punt P, waarvoor de lijnen door A′, B′, C′ evenwijdig aan AP, BP, CP de zijden B′C′, C′A′, A′B′ van A′B′C′ in drie punten eener rechte p snijden. Tevens de omhullende dier rechte te bepalen. (J. Neuberg.)

Opgelost *door* W. Bouwman *en* J. Neuberg.

Oplossingen.

I. ANALYTISCHE OPLOSSING VAN W. BOUWMAN. We nemen driehoek ABC tot assendriehoek aan, stellen het punt P door (λ, μ, ν) voor en nemen $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ en $t_x = 0$ tot vergelijkingen van de lijnen B′C′, C′A′, A′B′ en de lijn in het oneindige aan.

De lijnen door A′, B′, C′ evenwijdig aan AP, BP, CP kunnen dan door de vergelijkingen $b_x - lc_x = 0$, $c_x - ma_x = 0$, $a_x - nb_x = 0$ worden aangeduid.

De voorwaarden van evenwijdigheid zijn dan

$$l = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & \nu & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & \nu & \mu \end{vmatrix}}, \quad m = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \nu & 0 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \nu & 0 & \lambda \end{vmatrix}}, \quad n = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \mu & \lambda & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \mu & \lambda & 0 \end{vmatrix}},$$

terwijl de voorwaarde, dat deze nieuwe lijnen de drie zijden B′C′, C′A′, A′B′ in drie punten eener rechte snijden door de betrekking

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 + l\beta_1 & , & \alpha_1 + m\gamma_1 & , & \beta_1 + n\alpha_1 \\ \gamma_2 + l\beta_2 & , & \alpha_2 + m\gamma_2 & , & \beta_2 + n\alpha_2 \\ \gamma_3 + l\beta_3 & , & \alpha_3 + m\gamma_3 & , & \beta_3 + n\alpha_3 \end{vmatrix} = 0 \ldots 1)$$

wordt voorgesteld, als $|\alpha_i, \beta_i, \gamma_i|$ de toegevoegde determinant is van $|a_i, b_i, c_i|$. Door invoeging der waarden van l, m, n vindt men voor de vergelijking der meetkundige plaats van P

$$\left| \gamma_i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & \nu & \mu \end{vmatrix} + \beta_i \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & \nu & \mu \end{vmatrix}, \ \alpha_i \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \nu & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \gamma_i \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \nu & 0 & \lambda \end{vmatrix}, \ \beta_i \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \mu & \lambda & 0 \end{vmatrix} + \alpha_i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ \mu & \lambda & 0 \end{vmatrix} \right| = 0.$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Dus is de meetkundige plaats van P een kromme van den derden graad.

Stelt $u_x = 0$ de rechte p voor, dan wijzen de betrekkingen

$$\gamma_u + l\beta_u = 0, \quad \alpha_u + m\gamma_u = 0, \quad \beta_u + n\alpha_u = 0$$

aan, dat deze lijn de drie snijpunten bevat. Door eliminatie van

l, m, n uit deze drie vergelijkingen en 1) vindt men de vergelijking der omhullende van p in den vorm

$$|\gamma_i\beta_u - \beta_i\gamma_u,\quad \alpha_i\gamma_u - \gamma_i\alpha_u,\quad \beta_i\alpha_u - \alpha_i\beta_u| = 0.$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

Dus is de omhullende van p een kromme van de derde klasse.

II. Synthetische oplossing van J. Neuberg. De meetkundige oplossing van dit vraagstuk komt geheel met die van vraagstuk 140 overeen.

We trekken door A en A′ twee evenwijdige lijnen l en l', die de overstaande zijden BC en B′C′ der gegeven driehoeken (fig. 67) in de punten A_1 en A'_1 snijden en bepalen nu de punten P op l en de lijnen p door A'_1.

Daartoe trekken we door A'_1 een willekeurige lijn x, die A′C′ in B'_1, A′B′ in C'_1 snijdt, en bepalen we het snijpunt X van de lijnen β en γ door B en C evenwijdig aan $B'B'_1$ en $C'C'_1$ getrokken. Als x om A'_1 draait, beschrijven β en γ stralenbundels, die met den stralenbundel x en dus ook onderling projectief zijn. Dus doorloopt het snijpunt X een door B en C gaande kegelsnee K_l. De snijpunten van K_l met l zijn punten P, de overeenkomstige lijnen x zijn lijnen p.

Gemakkelijk blijkt, dat de kegelsnee K_l een bundel doorloopt, als l om A draait en in verband daarmee de aan l evenwijdige lijn l' op B′C′ een puntreeks A'_1 afteekent. De vier basispunten van dien bundel zijn B, C en de punten X, die met de standen B′C′ en A'_1A' van x overeenkomen; van deze laatste twee ligt het eerste oneindig ver in de richting B′C′ en noemen we het andere A_2. Wijl de kegelsneden K_l van dezen bundel projectief verwant zijn met de stralen l, is de meetkundige plaats (P) van P als de meetkundige plaats der snijpunten van deze twee projectieve bundels een kromme van den derden graad, die door A, B, C gaat.

Door de redeneering om te keeren en in stede van een lijn om A'_1 draaiende een langs l bewegend punt X te beschouwen, vindt men, dat de omhullende van p ontstaat door uit de punten van de puntreeks A'_1 op B′C′ de raaklijnen te trekken aan de kegelsneden eener met deze puntreeks projectieve schaar van kegelsneden. Dus is de omhullende (p) van p een kromme van de derde klasse, die B′C′, C′A′, A′B′ aanraakt.

Aanmerkingen. I. Gemakkelijk wijst men negen punten van (P) aan. Deze negen punten zijn verdeeld in drietallen en bestaan uit de drie punten A, B, C, de oneindig ver gelegen punten A'_∞, B'_∞, C'_∞ van BC, CA, AB en de drie punten A_2, B_2, C_2. Uit de wijze, waarop deze punten gevonden zijn, blijkt, dat A het tegenpunt is van (B, C, A'_∞, A_2), enz.. Bovendien worden de derde snijpunten A_0, B_0, C_0 van BC, CA, AB met de kromme gemakkelijk gevonden.

Ter verkrijging van A_0 moet men van die kegelsnee K_l uitgaan, welke uit de twee rechten BC en $A_2A'_\infty$ bestaat. Neemt men nu op de lijn $A_2A'_\infty$ een willekeurig punt X aan en bepaalt men de overeenkomstige lijn x, dan zal deze B'C' in een zeker punt A'_1 snijden en de lijn uit A evenwijdig aan $A'A'_1$ op BC het verlangde punt A_0 aangeven.

Evenzoo worden gemakkelijk negen raaklijnen van (p) aangewezen. Het zijn de zijden B'C', C'A', A'B' van driehoek A'B'C' en de drie lijnenparen, die telkens met twee van deze een vierzij vormen, waarvan de derde de tegenzijde is. Wijl er bij overgang van ABC op A'B'C' dualisme optreedt, moeten ook de derde raaklijnen uit A', B', C' gemakkelijk te vinden zijn. We laten de bepaling dezer raaklijnen aan den lezer over (J. N.).

II. De raaklijnen in A, B, C aan de kromme (P) zijn door een eenvoudige meetkundige constructie te vinden. Als P met A samenvalt en de lijnen door B' en C' evenwijdig aan BA en CA de overstaande zijden C'A' en A'B in B_3 en C_3 snijden, geeft de lijn die A' verbindt met het snijpunt van B'C' en B_3C_3 de richting der verlangde raaklijn aan, enz. (W. B.).

Vraagstuk CXLIV.

Van een driehoek ABC zijn gegeven de lengte a van BC, het middelpunt N van den negenpuntscirkel en de rechte l, waarop B en C liggen. Aan te toonen, dat het middelpunt O des omgeschreven cirkels, het hoogtepunt H en de top A gelijke hyperbolen beschrijven, en de krommen te vinden, die door de zijden AB, AC en de hoogtelijnen BH, CH worden omhuld.

(J. Neuberg.)

Opgelost *door* T. J. Allersma.

Oplossing.

1. We nemen het voetpunt M van de loodlijn uit N op l tot oorsprong, deze loodlijn tot x-as en l tot y-as aan. Is ABC (fig. 68) een der standen van den driehoek, dan is, als A_1 het midden van BC en dus de projectie van O op BC aangeeft, NA_1 als straal van den negenpuntscirkel de helft van den straal OB des omgeschreven cirkels. Stellen we NM door f en BC door $2m$ voor, dan geeft de betrekking $2NA_1 = OB$ onmiddellijk voor de meetkundige plaats van O de vergelijking $4(f^2 + y^2) = x^2 + m^2$ of $x^2 - 4y^2 = 4f^2 - m^2$. Dus is de meetkundige plaats van O een hyperbool Σ, die M tot middelpunt heeft en waarvan de assen langs de coördinaatassen vallen. De stand van deze hyperbool hangt van de verhouding $\frac{2f}{m}$ af. Is $2f > m$ dan is de x-as, is $2f < m$ dan is de y-as de bestaanbare as. En voor $2f = m$ gaat Σ in twee rechte lijnen door M over.

Wijl H en O symmetrisch liggen met betrekking tot N, doorloopt H terzelfder tijd een hyperbool Σ' symmetrisch met Σ ten opzichte van N. De assen van de nieuwe hyperbool vallen langs de x-as en de lijn l' symmetrisch met l ten opzichte van N. Deze lijn l' is de meetkundige plaats van het punt A_2 op den negenpuntscirkel diametraal tegenover A_1 en dus midden op AH gelegen. Derhalve beschrijft het punt A dezelfde hyperbool Σ'.

Het samenvallen der meetkundige plaatsen van A en H is een gevolg van de omwisselbaarheid der punten A en H. Terwijl H en N hoogtepunt en middelpunt van den negenpuntscirkel zijn voor driehoek ABC, zijn A en N dit voor driehoek HBC.

2. We lossen de hyperbool $x^2 - 4y^2 = 4f^2 - m^2 = 4g^2$ in haar punten op door te stellen $x = 2g \operatorname{Sec} \phi$ en $y = g \operatorname{Tg} \phi$, waarin ϕ een veranderlijke hoek voorstelt. Met deze notatie worden de coördinaten van

$$\mathrm{O}\begin{cases} x = 2f \operatorname{Sec} \phi \\ y = g \operatorname{Tg} \phi \end{cases}, \quad \mathrm{C}\begin{cases} x = 0 \\ y = g \operatorname{Tg} \phi + m \end{cases}, \quad \mathrm{H}\begin{cases} x = 2(f - g \operatorname{Sec} \phi) \\ y = -g \operatorname{Tg} \phi \end{cases}.$$

Derhalve stelt de vergelijking

$$\frac{x}{2(f - g \operatorname{Sec} \phi)} + \frac{y - g \operatorname{Tg} \phi - m}{2g \operatorname{Tg} \phi + m} = 0 \quad \ldots\ldots 1),$$

die als Tg $\phi = z$ gesteld wordt, den vorm

$$\{(2gz + m)x + 2f(y - gz - m)\}^2 = 4g^2(1 + z^2)(y - gz - m)^2$$

aanneemt, de lijn CH voor. Rangschikken we naar z, dan vinden we

$$A_0z^4 + B_1z^3 + C_2z^2 + D_1z + E_2 = 0,$$

waarin A, B, C, D, E functies van x en y zijn met door den aanwijzer aangegeven graad. Dus levert eliminatie van z tusschen de vergelijkingen

$$4A_0z^3 + 3B_1z^2 + 2C_2z + D_1 = 0,$$
$$B_1z^3 + 2C_2z^2 + 3D_1z + 4E_2 = 0$$

de vergelijking der omhullende in de gedaante

$$\begin{vmatrix} 4A_0 & 3B_1 & 2C_2 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4A_0 & 3B_1 & 2C_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4A_0 & 3B_1 & 2C_2 & D_1 \\ B_1 & 2C_2 & 3D_1 & 4E_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 2C_2 & 3D_1 & 4E_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 2C_2 & 3D_1 & 4E_2 \end{vmatrix} = 0$$

Deze vergelijking stelt tevens de omhullende van CA voor. Keert men het teeken om van m, dan gaat zij in de vergelijking der omhullende van BH en BA over.

Beide omhullenden zijn krommen van den tienden graad; zij zijn elkaars spiegelbeelden met betrekking tot de x-as.

Aanmerkingen. I. De klasse der beide omhullenden wordt eenvoudig langs meetkundigen weg bepaald, als we zorg dragen de beide krommen behoorlijk uit elkaar te houden.

We onderzoeken daartoe, hoeveel raaklijnen er door een willekeurig op l gekozen punt C gaan. Daartoe zetten we van C af in bepaalden zin (hier volgens de teekening naar beneden) een stuk $CA_1 = m$ af en trekken we door het met betrekking tot N symmetrisch gelegen punt A_2 een lijn loodrecht op l, die Σ' in twee punten A en H snijdt. De lijnen CA en CH zijn dan raaklijnen door C. Verder hebben we te bedenken, dat de lijn l zelve raaklijn of veelvoudige raaklijn van de bedoelde omhullende zijn kan. We onderzoeken dus hoe dikwijls het gebeurt, dat A of H op l valt. Wijl l de meetkundige plaats Σ' van A of H in twee punten snijdt, is deze lijn

tweemaal raaklijn der omhullende. Want nemen we van deze punten P $(0, \frac{1}{2} m)$ en Q $(0, -\frac{1}{2} m)$ de symmetrischen P′ en Q′ met betrekking tot l', dan zijn (P, P′) en (Q, Q′) twee paren (A, H) en de op l' gelegen middens P_0, Q_0 van de segmenten PP′ en QQ′ de overeenkomstige standen van A_2, de punten Q, P zelf dus weer de overeenkomstige standen van A_1. En nu kan men ter bepaling van de bedoelde driehoeken, die zich tot een lijn afplatten, een stuk $A_1C = m$ van Q en P uit naar boven uitzetten.

Zoo blijkt dus, dat elk der beide omhullenden een kromme van de vierde klasse is en l een gemeenschappelijke dubbelraaklijn van deze krommen uitmaakt. (P. H. S.)

II. Ook stelkundig wordt de klasse der beide omhullenden gemakkelijk gevonden. Brengen we vergelijking 1) overeen met $xu + yv + w = 0$, dan vinden we voor beide

$$\rho u = 2g \operatorname{Tg}\phi \pm m,$$

$$\rho v = 2(f - g \operatorname{Sec}\phi),$$

$$\rho w = -2(f - g \operatorname{Sec}\phi)(g \operatorname{Tg}\phi \mp m)$$

en dus na eliminatie van ρ en ϕ

$$(2fu \mp 3mv + 2w)^2 v^2 = 4 \{(w \mp mv) + g^2 v^2\} u^2,$$

een vergelijking van den vierden graad.

Deze uitkomsten strijden niet met die van den Heer ALLERSMA. Want werkelijk is een kromme van de vierde klasse met een dubbelraaklijn, die geen buigraaklijnen heeft, van den tienden graad.

Wijl de raaklijnen twee aan twee involutorisch met elkaar overeenkomen, zijn de beide omhullenden hyperelliptische krommen. (P. H. S.)

Vraagstuk CXLV.

Van een in een gegeven vlak liggenden driehoek ABC kent men het hoogtepunt H en het middelpunt O van den omgeschreven cirkel. Gevraagd de verwantschap tusschen

1°. twee hoekpunten,

2°. twee zijden,

3°. een hoekpunt en een zijde

van dien driehoek te onderzoeken. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. NEUBERG en P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

1. Men bepaalt een driehoek ABC uit het beschouwde stelsel door een gegeven punt A (fig. 69) als een der hoekpunten, of een gegeven rechte a als lijn, waarlangs een der zijden valt, aan te nemen. En in het algemeen vindt men in elk dier beide gevallen slechts één driehoek ABC. Gaat men van A uit, dan vindt men de rechte a, waarlangs de overstaande zijde valt, door uit O de lijn OA_m evenwijdig aan AH en gelijk aan de helft van AH te trekken en in A_m een loodlijn op OA_m op te richten; door den omgekeerden weg te volgen leidt men A uit a af. In beide gevallen vindt men het paar hoekpunten B, C en het paar rechten b, c, waarlangs CA, AB vallen, door uit O een cirkel te beschrijven met OA tot straal. Wijl B en C onwisselbaar zijn en dit ook met b en c het geval is, zal men bij een gegeven punt A dus ééne rechte a en tweetallen van elk der overige elementen vinden, terwijl omgekeerd het aannemen der rechte a eveneens tot één overstaand hoekpunt A en tweetallen van elementen b, c en B, C voert.

Uit het bovenstaande is duidelijk, dat we in dit vraagstuk onder a, b, c niet de lengte der zijden van driehoek ABC maar de rechten, langs welke die zijden vallen, verstaan. Ook dat A_m het midden is van BC, enz.

Door het symbool $[\lambda, \mu]$ drukken we de verwantschap uit tusschen twee van elkaar afhangende elementen λ, μ, die hier òf twee punten, òf twee rechten, òf een punt en een rechte zijn zullen. Door de symbolische vergelijking $[\lambda, \mu] = (l, m)$ drukken we uit, dat in de verwantschap $[\lambda, \mu]$ met een willekeurig gegeven stand van λ in het algemeen l standen van μ, met een willekeurig gegeven stand van μ in het algemeen m standen van λ overeenstemmen. Volgens deze notatie gelden de betrekkingen

$$[A, a] = (1, 1), [A, B] = (2, 2), [A, b] = (2, 2), [a, b] = (2, 2).$$

Hoewel dit voor deze vergelijkingen geheel overbodig is, zijn we toch verplicht in het vervolg een onderscheiding te maken tusschen $[\lambda, \mu]$ en $[\mu, \lambda]$. In $[\lambda, \mu]$ denkt men zich λ gegeven en μ te bepalen, terwijl $[\mu, \lambda]$ omgekeerd λ uit μ leert vinden. In verband hiermee kan ook verschil gemaakt kunnen worden tusschen de *verwantschap* $[\lambda, \mu]$ en de *trans-*

formatie $[\lambda, \mu]$, als men onder verwantschap de wederzijdsche betrekking tusschen λ en μ, onder transformatie alleen den weg die van λ tot μ voert wil verstaan.

Onder de zes verschillende transformaties $[a, A]$, $[a, B]$, $[a, b]$ en $[A, a]$, $[A, b]$, $[A, B]$, waarover het vraagstuk handelt, zijn $[a, B]$ en $[A, b]$ *incident* te noemen, wijl B steeds op a ligt en b steeds door A gaat; verder zijn $[a, b]$ en $[A, B]$ *symmetrisch*, wijl $[a, b] = [b, a]$ en $[A, B] = [B, A]$ is.

Bij een transformatie $[\lambda, \mu]$ spreekt men van een *fundamentaalelement* λ', als met λ' in stede van een eindig aantal l van elementen μ een oneindig aantal elementen μ overeenkomen. Deze verschillende standen van μ vormen dan de *fundamentaalkromme* van λ'; zij is meetkundige plaats als μ een punt, omhullende als μ een rechte is. De invloed van een fundamentaalelement hangt in de eerste plaats af van de *orde* van dit element; hieronder verstaat men den graad of de klasse van de fundamentaalkromme, naarmate deze meetkundige plaats of omhullende is. Bij het opsporen van de fundamentaalelementen der zes genoemde transformaties zal dit nader blijken.

Verder kunnen verschillende transformaties nog bijzondere elementen van anderen aard bevatten. Zoo bevatten de transformaties $[a, A]$ en $[A, a]$, die samen de verwantschap $[a, A]$ vormen, *incidente elementen*, nl. rechten a, waarop het overstaande element A ligt; we spreken dan van *afgeplatte driehoeken*. Zoo bevatten verder de incidente transformaties $[a, B]$ en $[A, b]$ *vertakkingselementen*, nl. rechten a met samengevallen B, C en hoekpunten A met samengevallen b, c; we spreken dan weer van afgeplatte driehoeken. Zoo bevatten eindelijk de symmetrische transformaties $[a, b]$ en $[A, B]$ *vertakkingselementen* en *dubbelelementen*. Van $[a, b]$ is a een vertakkingselement als de beide overeenkomstige rechten b samenvallen en een dubbelelement als een dezer beide overeenkomstige rechten b met a samenvalt; is a een dubbelelement van $[a, b]$, dan is de niet met a samenvallende rechte b een vertakkingselement van $[b, a]$, enz. Ook hier heeft men met afgeplatte driehoeken te doen.

De namen „vertakkingselement" en „dubbelelement" zijn aan de theorie der involutie ontleend. Werkelijk kan men spreken van een tripelinvolutie (a, b, c) van rechten en een tripelinvolutie (A, B, C) van punten. Wijl het aannemen van

een der elementen in het algemeen een driehoek uit het stelsel bepaalt, is elk dier involuties van den eersten rang. Wijl het involuties zijn in het ternaire gebied van het vlak, is hiermee in overeenstemming het aantal driehoeken ABC tweevoudig oneindig.

2. Ter nadere voorbereiding van de studie der zes transformaties beschouwen we eerst afzonderlijk eenige reeksen van driehoeken ABC van bijzonderen vorm.

α. Driehoeken met een zijde evenwijdig aan OH. Is a evenwijdig aan OH en A dus een punt der loodlijn in H op OH opgericht, dan is $h_a = 3$ R. Cos A, als R de straal is van den omgeschreven cirkel. Hieruit volgt na een korte herleiding Tg B. Tg C $= 3$.

β. Gelijkbeenige driehoeken. Is a loodrecht op OH gericht en A dus een punt van OH, dan is de driehoek gelijkbeenig met A tot top. Gemakkelijk vindt men, dat de meetkundige plaats der overeenkomstige punten B en C de hyperbool is, die het gemeenschappelijk zwaartepunt G van alle driehoeken uit het stelsel en H tot toppen en O tot een der brandpunten heeft. Is N het midden van GH, dan is ON $=$ 2 GN, waaruit volgt, dat de asymptoten dezer hyperbool met OH een regelmatige drie-ster vormen. Wijl we deze hyperbool nog eens zullen ontmoeten, stellen we ze door h^2 voor.

γ. Gelijkzijdige driehoeken (oneindig groote driehoeken). In een gelijkzijdigen driehoek van eindige afmetingen vallen de punten O en H samen; dus bevat het beschouwde stelsel van driehoeken geen gelijkzijdige driehoeken van eindige afmetingen en kunnen alleen oneindig groote driehoeken uit het stelsel tevens gelijkzijdig zijn. Omgekeerd is het duidelijk, dat elke oneindig groote driehoek uit het stelsel tevens gelijkzijdig is. Want de herleiding van zulk een driehoek tot een gelijkvormigen driehoek van eindige afmetingen voert, wijl OH oneindig klein is met betrekking tot de oneindige zijden des driehoek, steeds tot een driehoek, waarvan O en H samenvallen, d. i. tot een gelijkzijdigen driehoek. Werkelijk volgt uit de eenvoudige meetkundige betrekking hoek HAO $= \pm \frac{1}{2}$ (hoek ABC $-$ hoek ACB) de gelijkheid der hoeken B en C als A oneindig ver ligt en worden de drie hoeken dus gelijk bevonden als A, B, C alle drie op l_∞ gelegen zijn. Als A zich in een gegeven richting in het onein-

dige verwijdert, zullen B en C dit dus doen in richtingen, die met de gegevene hoeken van 120° maken. Hiervan strekken de asymptoten der hyperbool h^2 tot voorbeeld.

δ. Rechthoekige driehoeken. In een rechthoekigen driehoek is het hoekpunt van den rechten hoek tevens het hoogtepunt H en ligt O op het midden der hypotenusa. Valt A met H samen, dan treedt er echter onbepaaldheid in met betrekking tot de richting van AH en kan men elke rechte door O dus als *a* aannemen; de uiteinden van een willekeurige middellijn des uit O met OH tot straal beschreven cirkels kunnen dus als de twee overeenkomstige punten B, elke twee in A loodrecht op elkaar staande rechten kunnen als de twee overeenkomstige rechten *b* fungeeren.

We hebben in het punt H met een fundamentaalpunt der transformaties [A, *a*], [A, *b*], [A, B] te doen. In [A, *a*] is H een fundamentaalpunt van de eerste orde van het „puntenveld" A en O de overeenkomstige fundamentaalomhullende van het „stralenveld" *a*. In [A, *b*] is H een fundamentaalpunt van de eerste orde van het puntenveld A en tevens de overeenkomstige omhullende van het stralenveld *b*. In [A, B] is H een fundamentaalpunt van de tweede orde van het puntenveld A en de uit O met OH tot straal beschreven cirkel de overeenkomstige meetkundige plaats van het puntenveld B.

ε. Half afgeplatte driehoeken. Uit de algemeene betrekking $AH = 2\,OA_m$ volgt, dat A dan alleen op *a* komt liggen, als de loodlijn HA_1 uit H op *a* gelijk en tegengesteld is aan het dubbel van OA_m en *a* den afstand OH dus in reden van één tot twee verdeelt, d. i. als *a* door G gaat. Dus is elke lijn *a* door G (fig. 70) zijde van een driehoek met drie op een zelfde rechte gelegen hoekpunten. Daarbij zijn B en C de snijpunten van den uit O met $OA_1 = OA$ tot straal beschreven cirkel (O, OA) en valt dus een dier snijpunten met A samen. Anders gezegd, de bij *a* behoorende driehoek ABC is niet een afgeplatte driehoek, waarvan de drie hoekpunten *verschillende* punten eener zelfde rechte zijn, doch een half-afgeplatte driehoek, waarvoor A met B, *a* met *b* samenvalt, doch de verbindingslijn $c = (AB)$ en het snijpunt $C = (ab)$ van $a = b$ en $A = B$ verschillen. Hieruit volgt dan tevens, dat *c* van [*a*, B], [*a*, *b*] en C van [A, *b*], [A, B] vertakkingselement, $a = b$ van [*a*, *b*] en $A = B$ van [A, B] dubbelelement is.

Als $a = b$ om G draait, doorloopt A = B den op GH als middellijn beschreven cirkel (GH). Wijl CG = 2GA is, beschrijft C den op GH′ als middellijn beschreven cirkel (GH′), waarbij OH′ = HO genomen is. Wijl A en B beide op den omgeschreven cirkel (O, OA) liggen, omhult c de boven reeds gevonden hyperbool h^2, die O tot een der brandpunten en (GH) tot bij dit punt behoorende voetpuntskromme heeft.

In de tripelinvolutie (A, B, C) vormt cirkel (GH′) de „grenskromme" en cirkel (GH) de „dubbelkromme"; in de tripelinvolutie (a, b, c) spelen de omhullenden h^2 en G de overeenkomstige rollen. Hiermee wordt uitgedrukt, dat de punten B, die bij een gegeven punt A behooren, bestaanbaar zijn, samenvallen of onbestaanbaar zijn, naarmate A buiten, op, of binnen den cirkel (GH′) ligt, en de rechten b, die bij een gegeven a behooren, in die toestanden verkeeren, naarmate a de hyperbool h^2 snijdt in twee bestaanbare, twee samenvallende, of twee onbestaanbare punten.

3. We bereiden de studie der verschillende in het vraagstuk voorkomende transformaties verder voor door de afleiding van een volledig stel van transformatie-formules. Daartoe nemen we het punt O (fig. 69) tot oorsprong, de lijn OH tot positieve x-as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan en stellen we de puntcoördinaten van A en een tweede hoekpunt door (x_1, y_1) en (x_2, y_2), de vergelijkingen der overstaande zijden door $u_1 x + v_1 y + 1 = 0$ en $u\, x + v_2 y + 1 = 0$ en dus de lijncoördinaten van deze door (u_1, v_1) en (u_2, v_2) voor. Verder wijzen we door h de lengte van OH aan.

Is $u_1 x + v_1 y + 1 = 0$ de vergelijking van a en $v_1 x - u_1 y = 0$ dus die van OA$_m$, dan zijn $-\frac{u_1}{u_1^2+v_1^2}$, $-\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}$ de coördinaten van A$_m$ en gelden dus krachtens de betrekking AH = 2OH$_m$ de vergelijkingen

$$x_1 - h = \frac{2u_1}{u_1^2+v_1^2},\ y_1 = \frac{2v_1}{u_1^2+v_1^2} \quad \ldots\ldots 1).$$

Verder is

$$A_mB^2 = OA^2 - OA_m^2 = \left(h + \frac{2u_1}{u_1^2+v_1^2}\right)^2 + \frac{4v_1^2}{(u_1^2+v_1^2)^2} - \frac{1}{u_1^2+v_1^2}$$

$$= \frac{1}{u_1^2+v_1^2}\{h^2(u_1^2+v_1^2) + 4hu_1 + 3\}.$$

Stellen wij kortheidshalve de grootheid tusschen accolades door S^2 voor, dan is dus

$$x_2 = \frac{-u_1 + v_1 S}{u_1^2 + v_1^2} \quad , \quad y_2 = \frac{-v_1 - u_1 S}{u_1^2 + v_1^2} \quad \ldots\ldots 2),$$

waarbij aan $S = \sqrt{h^2(u_1^2 + v_1^2) + 4hu_1 + 3}$ het dubbele teeken moet worden toegekend.

De vergelijking der verbindingslijn van (x_1, y_1) en $(x\ , y_2)$ is

$$\frac{(x-h)(u_1^2+v_1^2) - 2u_1}{-h(u_1^2+v_1^2) - 3u_1 + v_1 S} = \frac{y(u_1^2+v_1^2) - 2v_1}{-3v_1 - u_1 S},$$

of

$$-(3v_1 + u_1 S)x + \{h(u_1^2 + v_1^2) + 3u_1 - v_1 S\}\, y + hv_1 + (hu_1 + 2)S = 0.$$

Hieruit volgt

$$u_2 = -\frac{3v_1 + u_1 S}{hv_1 + (hu_1 + 2)\,S}, \quad v_2 = \frac{h(u_1^2 + v_1^2) + 3u_1 - v_1 S}{hv_1 + (hu_1 + 2)\,S} \ldots 3).$$

Hiermee zijn de verschillende coördinatenparen uitgedrukt in (u_1, v_1); blijft dus over ze uit te drukken in (x_1, y_1).

Door omkeering van 1) vindt men onmiddellijk

$$u_1 = \frac{2(x_1 - h)}{(x_1 - h)^2 + y_1^2}, \quad v_1 = \frac{2y_1}{(x_1 - h)^2 + y_1^2} \quad \ldots\ldots 1').$$

Verder geeft invoering dezer waarden in 3)

$$u_2 = -\frac{3y_1 + (x_1 - h)\,T}{hy_1 + (x_1^2 + y_1^2 - hx_1)\,T}, \quad v_2 = \frac{3x_1 - h - y_1 T}{hy_1 + (x_1^2 + y_1^2 - hx_1)T} \ldots 2'),$$

waarbij $S^2 \equiv h^2(u_1^2 + v_1^2) + 4hu_1 + 3$ in

$$T^2 \equiv \frac{3(x_1^2 + y_1^2) + 2hx_1 - h^2}{(x_1 - h)^2 + y_1^2}$$

overgegaan is.

Eindelijk geeft invoering der waarden 1') in 2)

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}\{x_1 - h - y_1 T\}, \quad y_2 = -\tfrac{1}{2}\{y_1 + (x_1 - h)\,T\} \ldots 3').$$

In deze zes paren van transformatie-formules, waarvan de afleiding ten deele geput is uit een schrijven van den heer V. Retali uit Milaan, is de geheele stelkundige oplossing van

het vraagstuk begrepen. In de aangegeven volgorde beantwoorden ze aan de transformaties $[a, A]$, $[a, B]$, $[a, b]$ en $[A, a]$, $[A, b]$, $[A, B]$. Dus zijn 1) en 1') elkaars omkeeringen en worden 2) en 2') dit als men in een der beide paren de indices verwisselt. En de bij de symmetrische transformaties behoorende formules 3) en 3') zijn elk voor zich met indexverwisseling omkeeringen van zich zelve.

Uit de formule 2') volgt, dat de twee rechten (u_2, v_2) samen vallen, als $T = 0$, of $T = \infty$ is. De eerste onderstelling levert ons weer de half-afgeplatte driehoeken; want de vergelijking $3(x^2 + y^2) + 2hx - h^2 = 0$ stelt den cirkel (GH') voor. De tweede onderstelling geeft $(x - h)^2 + y^2 = 0$, d. i. de puntcirkel H. We vermelden dit hier uitdrukkelijk, omdat de meetkundige plaats der vertakkingselementen van $[A, b]$ boven onvolledig is aangegeven en met den puntcirkel H moet worden aangevuld. Deze kennis zal ons bij de behandeling der transformatie $[A, b]$ te stade komen.

4. Verwantschap $[a, A]$. Meetkundig beschouwen we de transformatie $[a, A]$ als de opeenvolging der beide transformaties $[a, A_m]$ en $[A_m, A]$, wat we uitdrukken door de symbolische vergelijking $[a, A_m] \times [A_m, A] = [a, A]$. Naast deze staat dan omgekeerd $[A, A_m] \times [A_m, a] = [A, a]$.

Omtrent $[A_m, A]$ en $[A, A_m]$ merken we alleen op, dat de drie op een zelfde rechte liggende punten A, G, A_m door de betrekking $AG = 2GA_m$ verbonden zijn en in de terminologie van de meetkunde van den driehoek A_m het complementaire punt van A en A het anticomplementaire punt van A_m is met betrekking tot G. De door A_m en A doorloopen figuren zijn dus gelijkvormig en bij tegenoverstand gelijkstandig; het gemeenschappelijk zwaartepunt G is gelijkvormigheidspunt.

Omhult a een gegeven kromme Σ, dan doorloopt A_m de voetpuntskromme van Σ met betrekking tot O. Dus is $[a, A_m]$ een kwadratische reciproke transformatie, waarvan l_∞ en de naar de onbestaanbare cirkelpunten I en J gerichte isotrope rechten OI en OJ door O de drie fundamentaalstralen zijn, met welke deze zelfde rechten l_∞, OI, OJ als fundamentaalkrommen overeenkomen.

Doorloopt A_m een gegeven kromme K, dan omhult a de negatieve voetpuntskromme van K met betrekking tot O. Dus is $[A_m, a]$ een kwadratische reciproke transformatie met de

fundamentaalpunten O, I, J, met welke deze zelfde punten als fundamentaalomhullenden overeenkomen.

Door vereeniging der uitkomsten blijkt dus het volgende:

Van de transformatie [a, A] zijn l_∞, OI, OJ de fundamentaalstralen en l_∞, HI, HJ achtereenvolgens de fundamentaalkrommen; van de transformatie [A, a] zijn H, I, J de fundamentaalpunten en O, I, J de overeenkomstige fundamentaalomhullenden.

Als a een kromme Σ omhult, doorloopt A de kromme K, die men verkrijgt door de G-voerstralen van de voetpuntskromme van Σ ten opzichte van O met minus twee te vermenigvuldigen.

Als A een kromme K doorloopt, omhult a de voetpuntskromme Σ voor O van de kromme, die men verkrijgt door de G-voerstralen van K door minus twee te deelen.

Dit alles en nog veel meer volgt ook uit de eenvoudige transformatie-formules 1) en 1').

We vermelden nog slechts enkele bekende gevallen, die zoowel meetkundig als stelkundig gemakkelijk bewezen worden.

Als a om het punt P draait, doorloopt A den op HP' als middellijn beschreven cirkel (HP'), waarvan het diametraal tegenover H gelegen punt P' door de voorwaarde HP' = 2PO tusschen gerichte lijnen bepaald wordt. Zoo komt met het net der punten P van het stralenveld het net der cirkels (HP') van het puntenveld overeen.

Als A een rechte l doorloopt, omhult a de parabool, die O tot brandpunt en de aan de andere zijde van G op den halven afstand evenwijdig aan l getrokken lijn tot topraaklijn heeft. Zoo komt met het net der rechten l van het puntenveld het net der parabolen met O tot brandpunt in het stralenveld overeen.

Doorloopt A een cirkel (O, OA), dan omhult a een kegelsnee, die O en H tot brandpunten heeft en waarvan de cirkel (O, OA) de bij H behoorende richtcirkel is, enz

5. Verwantschap [A, B]. Is A gegeven en a hieruit afgeleid, dan is B een der twee snijpunten van a met den cirkel (O, OA). We leiden hieruit de fundamentaalpunten der transformatie af.

Dat met een gegeven punt A een oneindig aantal punten B overeenstemt, kan twee verschillende oorzaken hebben. Eerstens kan bij het aannemen van A het overstaande element

a reeds onbepaald worden en dan heeft men met een der fundamentaalpunten H, I, J van [A, a] te doen. Maar ook als a bepaald blijft, kan B onbepaald worden, door dat a deel van cirkel (O, OA) uitmaakt. Dit laatste gebeurt werkelijk als A in een der beide zoogenaamde „antipunten" van O en H ligt en dus met $H_i = (HI, OJ)$ of met $H_j = (HJ, OI)$ samenvalt. Dus vinden we vijf fundamentaalpunten H, I, J, H_i. H_j. De fundamentaalkromme van H is de cirkel (O, OH); met I, J, H_i, H_j komen achtereenvolgens de punten der rechten HI, HJ, OI, OJ overeen. Alleen H is dus een fundamentaalpunt van de tweede orde.

Het bovenstaande wordt ook gemakkelijk uit 3') afgeleid. In plaats van dit nader aan te wijzen bepalen we met behulp van deze formules de vertakkingspunten en de dubbelpunten.

Willen de beide punten (x_2, y_2) samenvallen, dan moet $T = 0$ zijn. Dus is $3(x^2 + y^2) + 2hx - h^2 = 0$ de meetkundige plaats der vertakkingspunten. In den vorm $(x + \frac{1}{3}h)^2 + y^2 = (\frac{2}{3}h)^2$ herkent men hierin den cirkel (GH').

Stelt men in 3') voor (x_1, y_1) en (x_2, y_2) beide (x, y) in de plaats, dan vindt men $3(x^2 + y^2) - 4hx + h^2 = 0$ of $(x - \frac{2}{3}h)^2 + y^2 = (\frac{1}{3}h)^2$, d. i. de cirkel (GH), voor de meetkundige plaats der dubbelpunten.

We zijn thans in staat meetkundig alle bijzonderheden te bepalen van de kromme B_A, die het puntenpaar B beschrijft als A een gegeven rechte p doorloopt. Natuurlijk beginnen we met de bepaling van den graad.

We vinden, dat p vier punten met B_A gemeen heeft. Want er zijn slechts twee mogelijkheden: òf het op p gelegen punt B valt met het aangenomen punt A samen en dan is het een der beide snijpunten van p met de dubbelkromme (GH), òf het op p gelegen punt B verschilt van het aangenomen punt A en dan is het een der beide hoekpunten Q, R van den driehoek PQR, waarvan p de zijde QR is.

Wat omtrent de fundamentaalpunten gevonden is, leidt tot hetzelfde resultaat. Uit de snijpunten van p met de fundamentaalkrommen blijkt, dat B_A in H een dubbelpunt heeft met loodrecht op de rechten van O naar de snijpunten van p met (O, OH) gerichte dubbelpuntsraaklijnen, dat zij eenmaal door I, J, H_i, H_j gaat en in I en J door OI en OJ wordt aangeraakt. Ter verklaring van de laatste aanraking zal het voldoende

zijn op te merken, dat de *twee* punten B met I samenvallen als A het snijpunt is van p met HI, enz. Zoeken we nu de snijpunten met l_∞, dan vinden we vier punten, nl. I, J en de beide oneindig ver gelegen punten, die met het oneindig ver gelegen punt van p een gelijkzijdigen driehoek vormen. Voor HI en HJ vinden we ook vier snijpunten, nl. (2H, I, H_i) en (2H, J, H_j). Eveneens voor OI en OJ, nl. (2I, H_j, P_i) en (2J, H_i, P_j), waarin P_i en P_j punten B zijn, die met de snijpunten A van OI en OJ met p overeenstemmen, enz.

Ook het aantal punten gemeen aan de krommen B_A en B'_A, die bij p en p' behooren, is in overeenstemming met het gevondene. Zijn B_1, B_2, B_3, B_4 de snijpunten van p met B'_A en B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 de overeenkomstige snijpunten van p' met B_A, dan zijn de zestien snijpunten van B_A en B'_A het punt A viermaal geteld, de punten I en J elk tweemaal geteld, de punten H_i en H_j, de punten B''_1, B''_2, B''_3, B''_4 die met $(B_1B'_1)$, $(B_2B'_2)$, $(B_3B'_3)$, $(B_4B'_4)$ vier driehoeken uit het stelsel vormen en de beide punten B, die bij het snijpunt A van p en p' behooren.

De bij p behoorende kromme B_A heeft behalve in H een dubbelpunt in het punt P, dat het overstaande hoekpunt is van p in den driehoek ABC met p tot zijde. Buiten en behalve deze punten H en P kan de kromme geen veelvoudig punt hebben. Hebben n, m, d, t, k, b de gewone beteekenis van graad, klasse, aantallen van dubbelpunten, dubbelraaklijnen, keerpunten en buigpunten, dan is in het algemeen $n = 4$, $d = 2$. $k = 0$ en hieruit volgt $m = 8$, $t = 8$, $b = 12$. Hierdoor is de kromme B_A van het eerste geslacht volkomen gekenmerkt. Heeft p een bijzonderen stand, dan kunnen krommen B_A met andere kenmerkende getallen voorkomen. Zoo wordt H een keerpunt als p den cirkel (O, OH) aanraakt en gebeurt hetzelfde met P als p dit de hyperbool h^2 doet. Dus komen er twee reeksen van krommen B_A met de kenmerken $n = 4$, $d = 1$, $k = 1$ en $m = 7$, $t = 4$, $b = 10$ voor; ook deze krommen zijn van het geslacht een. Natuurlijk verlaagt B_A haar graad, als p door een der vijf fundamentaalpunten der verwantschap gaat, enz.

Invoeging der waarden 3') van x_2 en y_2 in $lx + my + 1 = 0$ geeft voor de vergelijking der bij deze rechte behoorende B_A

$$\{l(x-h)+my-2\}^2\{(x-h)^2+y^2\} = \{ly-m(x-h)\}^2\{3(x^2+y^2)+2hx-h^2\}.$$

Hieruit volgt ook, dat B_A van den vierden graad is en behalve in H in het snijpunt der rechten

$$l(x-h)+my-2=0,\quad ly=m(x-h)$$

een dubbelpunt heeft. Voor de coördinaten van dit laatste punt vindt men $h+\frac{2l}{l^2+m^2}$, $\frac{2m}{l^2+m^2}$; volgens 1) is dit werkelijk het boven gevonden punt P, dat een driehoek ABC bepaalt, waarvan de gegeven rechte de overstaande zijde is.

De termen van den vierden graad zijn

$$(x^2+y^2)\{(lx+my)^2-3(ly-mx)\}^2.$$

Werkelijk volgt uit $(lx+my)^2-3(ly-mx)^2=0$ voor $\frac{ly-mx}{lx+my}$ de waarde $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, waaruit blijkt, dat de beide niet met I en J samenvallende oneindig verre punten der kromme gekenmerkt zijn door richtingen, die met de gegevene richting hoeken van 120° bepalen.

6. In het voorgaande is de transformatie $[A, a]$ beschouwd als het product der transformaties $[A, A_m]$ en $[A_m, a]$. Een dergelijke handelwijs kan ons dienen bij het herleiden der thans nog te behandelen transformaties tot de reeds besprokenen. We hebben nl.

$$[A, b]=[A, B]\times[B, b]\quad,\quad[a, B]=[a, A]\times[A, B],$$
$$[a, b]=[a, A]\times[A, B]\times[B, b],$$

of meer uitgewerkt

$$[A,b]=[A,B]\times[B,B_m]\times[B_m,b],[a,B]=[a,A_m]\times[A_m,A]\times[A,B],$$
$$[a,b]=[a,A_m]\times[A_m,A]\times[A,B]\times[B,B_m]\times[B_m,b].$$

Om niet te uitvoerig te worden — en de door de onbestaanbare cirkelpunten veroorzaakte complicaties te vermijden — geven we er de voorkeur aan de verwantschap $[a, b]$ en de transformaties $[A, b]$, $[a, B]$ op zich zelve te behandelen met behulp van eenvoudige meetkundige beschouwingen en van de transformatie-formules.

7. Verwantschap $[a, b]$. We zoeken weer de kromme b_a, die omhuld wordt door de twee overeenkomstige rechten b, als a draait om een gegeven punt P.

Uit P zijn drie raaklijnen aan b_a te trekken. Want er zijn slechts twee mogelijkheden: òf de door P gaande rechte b valt

met de aangenomen rechte a samen en dit gebeurt alleen voor de rechte PG, òf de door P gaande rechte b verschilt van de aangenomen rechte a en dan is ze een der beide door P gaande zijden van den driehoek uit het stelsel die P tot een der hoekpunten heeft. Dus is b^a een kromme van de derde klasse, die de overstaande zijde p van den zooeven aangewezen driehoek tot dubbelraaklijn heeft. Voor deze kromme vinden we $m=3$, $t=1$, $b=0$ en dus ook $n=4$, $d=0$, $k=3$; zij is van het geslacht nul. Ligt het punt P op den cirkel (GH′), dan wordt p een buigraaklijn van l_a en heeft deze kromme dus de kenmerken $m=3$, $t=0$, $b=1$ en $n=3$, $d=0$, $k=1$.

We bevestigen deze uitkomst door de formules 3). Invoering der uitdrukkingen voor u_2 en v_2 in $\lambda u_2+\mu v_2+1=0$ geeft

$$\{\mu h(u^2+v^2)+(h-3\lambda)v+3\mu u\}^2=(\lambda u+\mu v-hu-2)^2\{h^2(u^2+v^2)+4hu+3\},$$

wat een kromme van de vierde klasse voorstelt, die de beide raaklijnen uit het punt $\lambda u+\mu v=hu+2$ aan de parabool $\mu h\,(u^2+v^2)+(h-3\lambda)\,v+3\mu u=0$ tot dubbelraaklijnen heeft. Deze beide raaklijnen zijn

$$\left[u=\frac{2(\lambda-h)}{(\lambda-h)^2+\mu^2},\ v=\frac{2\mu}{(\lambda-h)^2+\mu^2}\right],\ \left[u=-\frac{3}{h},\ v=\frac{3\lambda-h}{\mu}\right].$$

De eerste is volgens de formules 1′) de rechte p, die de overstaande zijde vormt van P in den driehoek ABC met P tot hoekpunt; de tweede is de rechte PG.

Deze uitkomst kan alleen met het meetkundig gevondene in overeenstemming gebracht worden, indien de vergelijking zich splitst in een kubische en een lineaire vergelijking. En dan moet, wijl PG als dubbelraaklijn optreedt, de lineaire factor met een punt van PG in verband staan. Dus ligt de onderstelling voor de hand, dat òf P òf G dit punt zijn zal en de lineaire factor dus òf door $\lambda u+\mu v+1$ òf door $hu+3$ wordt vastgesteld. Werkelijk blijkt de vergelijking deelbaar te zijn door $hu+3$. Want schrijven we ze in de gedaante

$$\{\mu u\,(hu+3)+(\mu hv+h-3\lambda)\,v\}^2=$$
$$=\{\lambda u+\mu v+1-(hu+3)\}^2\,\{(hu+1)(hu+3)+h^2v^2\},$$

dan blijven er na weglating van de termen, die $hu+3$ reeds als factor bevatten, aan weerskanten de termen $(\mu hv+h-3\lambda)^2v^2$ en $(\lambda u+\mu v+1)\,h^2v^2$ over, waarvan het verschil door $hu+3$

deelbaar is. Gemakkelijk blijkt trouwens, dat de formules 3) onbepaalde waarden van u_2 en v_2 opleveren, als u_1 en v_1 de coördinaten zijn van een willekeurige rechte PG door G; want dan wordt $S = \pm hv_1$, enz.

Uit de gevondene vergelijking — en het is niet noodig deze daartoe vooraf van den overtolligen factor $hu + 3$ te ontdoen — leiden we nog af, dat alle krommen b_a elkaar in de punten H_i en H_j langs de rechten OH_i en OH_j aanraken en deze lijnen dubbel geteld dus de fundamentaalelementen zijn van de verwantschap. We zoeken daartoe de raaklijnen uit O met de raakpunten, even als in het coördinatenstelsel (x, y) de snijpunten met l_∞ en de raaklijnen, d. w. z. de asymptoten. Zoo vinden we uit de termen van den vierden graad

$$(u^2 + v^2)\{\mu^2(u^2 + v^2) - (\lambda u + \mu v - hu)^2\}$$

eerst, dat de gemeenschappelijke raaklijnen uit den factor $u^2 + v^2$ afkomstig zijn en dus de richtingscoëfficiënten $\pm i$ moeten hebben, wat te verwachten was. En verder vinden we langs den bekenden weg voor u en v oneindig

$$\text{Lim.}\ (u \pm iv)$$

$$= \text{Lim.} \frac{2h(u^2+v^2)\{(\mu h-3\lambda)v+3\mu^2u+2h(\lambda-h)u+2h\mu v\}-4hu\{(\lambda-h)u+\mu v^2\}}{h^2[\mu^2(u^2+v^2)-\{(\lambda-h)u+\mu v\}^2](u \mp iv)},$$

waaruit $u \pm iv + \frac{2}{h} = 0$ of $\frac{h}{2}u \pm \frac{ih}{2}v + 1 = 0$ voor de vergelijkingen der raakpunten gevonden wordt. Dus hebben deze punten de coördinaten $\left(\frac{h}{2}, \frac{ih}{2}\right)$ en $\left(\frac{h}{2}, \frac{-ih}{2}\right)$, d. w. z. ze vallen met H_i en H_j samen.

We kunnen thans de negen gemeenschappelijke raaklijnen van de twee bij P en P′ behoorende krommen b_a en b'_a aanwijzen. Zijn r_1, r_2, r_3 de drie raaklijnen uit P aan b'_a, r'_1, r'_2, r'_3 de overeenkomstige raaklijnen uit P′ aan b_a en r_1'', r_2'', r_3'' de rechten die met (r_1, r'_1), (r_2, r'_2), (r_3, r'_3) driehoeken uit het stelsel vormen, dan zijn de negen gemeenschappelijke raaklijnen OI en OJ dubbel geteld, r''_1, r''_2, r''_3 en de beide rechten b, die bij de als a beschouwde verbindingslijn PP′ behooren.

8. Transformatie [A, b]. Doorloopt A de rechte p, dan omhult b een zekere kromme b_A, waaraan door een willekeurig

op p gekozen punt Q twee van p verschillende raaklijnen gaan. Dus zal de klasse van b_A bepaald zijn, zoodra we weten, hoe dikwijls het bij het doorloopen van p door A gebeurt, dat een der beide overeenkomstige rechten b met p samenvalt. Dit gebeurt als A een der beide op p gelegen hoekpunten is van den driehoek uit het stelsel, waarvan p zijde is. Dus is b_A een kromme van de vierde klasse.

De kromme b_A heeft p tot dubbelraaklijn en wel tot dubbelraaklijn met bestaanbare, samenvallende of onbestaanbare raakpunten, naarmate p de hyperbool h^2 snijdt, raakt of niet snijdt. Verder is l_∞ een dubbelraaklijn met bestaanbare raakpunten, gelegen in richtingen, die met p hoeken van 30° vormen. Wijl b_A verder geen dubbelraaklijnen of buigpunten hebben kan, vinden we $m = 4$, $t = 2$, $b = 0$ en $n = 8$, $d = 8$, $k = 12$ voor het algemeene en $m = 4$, $t = 1$, $b = 1$ en $n = 7$, $d = 4$, $k = 10$ voor het bijzondere geval.

We bevestigen deze uitkomst weer door de formules 2). Invoering der waarden van x_2 en y_2 in $lx + my + 1 = 0$ geeft

$$\{u^2 + v^2 - (lu + mv)\}^2 - (lv - mu)^2 \{h^2 (u^2 + v^2) + 4hu + 3\} = 0.$$

Dus is de omhullende b_A van de vierde klasse en heeft zij de beide raaklijnen uit het punt $lv - mu = 0$ aan de parabool $u^2 + v^2 = lu + mv$ tot dubbelraaklijnen. Deze rechten zijn $u = 0$, $v = 0$ en $u = l$, $v = m$, dus l_∞ en p.

De termen $(lu + mv)^2 - 3(lv - mu)^2$ doen zien, dat de raakpunten met l_∞ in richtingen gelegen zijn, die met de richting van p hoeken van 30° bepalen.

We wijzen verder stelkundig nog aan, dat de kromme b_A met l_∞ en p werkelijk acht punten gemeen heeft.

Voor l_∞ voeren we dus de substitutie $u = qv = 0$ uit, wat de tweedemachtsvergelijking

$$\{(q^2 + 1) v - (lq + m)\}^2 = (l - mp)^2 \{h^2(q^2 + 1) v^2 + 4hqv + 3)\}$$

oplevert; dit is in overeenstemming hiermee, dat door een willekeurig punt Q der dubbelraaklijn l_∞ twee van l_∞ verschillende raaklijnen te trekken zijn.

Rangschikken we naar v, dan wordt ze

$$(q^2 + 1)\{q^2 + 1 - h^2(l - mq)^2\} v^2 - 2\{(lq + m)(q^2 + 1) + 2hq(l - mq)^2\} v$$
$$+ (lq + m)^2 - 3(l - mq)^2 = 0.$$

Het nulstellen van den bekenden term levert weer de raakpunten der dubbelraaklijn op, terwijl de voorwaarde

$$(q^2+1)\{q^2+1-h^2(l-mq)^2\}\{(lq-m)^2+3(l-mq)^2\}$$
$$=\{(lq+m)(q^2+1)+2hq(l-mq)^2\}^2,$$

waaronder de twee wortels v gelijk zijn, punten van l_∞ doet kennen, voor welke de twee van l_∞ verschillende raaklijnen samenvallen. Na deeling door $(l-mq)^2$, welke factor de dubbelraaklijn p oplevert, vinden we

$$3(q^2+1)^2+h(lq+m)(q^2+1)\{h(lq+m)+4q\}+h^2(l-mq)^2(q^2-3)=0.$$

Deze vierdemachtsvergelijking levert de vier punten op, welke l_∞ buiten de raakpunten met b_A gemeen heeft.

Voor p maken we gebruik van de substitutie $u=\dfrac{l(vy+1)}{my+1}$, waardoor een vierdemachtsvergelijking in v ontstaat, die door $(v-m)^2$ deelbaar is, wijl p tweemaal voorkomt onder de vier raaklijnen door een willekeurig punt Q van p. Nulstelling van den bekenden term levert dan de twee waarden van y voor de beide raakpunten. En uit de voorwaarde van twee gelijke wortels v, die in y van den vierden graad wordt, blijkt dan, dat de snijpunten van p met b_A tevens de snijpunten van p met den cirkel (GH′) en den puntcirkel (H) zijn. Zooals in art. 3 aan het slot werd opgemerkt, maakt de puntcirkel (H) werkelijk deel uit van de meetkundige plaats der vertakkingspunten A van [A, b]. Ten einde de lange berekeningen te vermijden, werken we het bovenstaande slechts voor het bijzondere geval uit, waarin p loodrecht staat op OH en m dus nul is. In deze onderstelling gaat de vergelijking

$$(u^2+v^2-lu)^2=l^2v^2\{h^2(u^2+v^2)+4hu+3\}$$

door de substitutie $u=l(vy+1)$ in de tweedemachtsvergelijking

$$\{(l^2y^2+1)v+l^2y\}^2=l^2\{h^2v^2(l^2y^2+1)+2hl(hl+2)yv+h^2l^2+4hl+3\}$$

in v over, die bij rangschikking naar v de gedaante

$$(l^2y^2+1)(l^2y^2+1-h^2l^2)v^2+2l^2\{l^2y^2+1-hl(hl+2)\}yv+l^2\{l^2y^2+1-(hl+2)^2\}$$

aanneemt. Stellen we eenvoudigheidshalve $l^2y^2+1=z$, dan wordt de voorwaarde van gelijke wortels door de betrekking

$$z(z-h^2l^2)[z-(hl+2)^2]=(z-1)\{z-hl(hl+2)\}^2,$$

of

$$3z^2+2hl(hl+2)z-h^4l^2(hl+2)^2=0$$

aangegeven. Dus vinden we

$$z = \tfrac{1}{3}\, hl\,(hl + 2) \quad , \quad z = -\, hl\,(hl + 2),$$

of

$$y^2 = \tfrac{1}{3}h^2 + \tfrac{2}{3}\frac{h}{l} - \frac{1}{l^2} \quad , \quad y^2 = -\left(h + \frac{1}{l}\right)^2.$$

Wijl nu $lx + 1 = 0$ de vergelijking is van p, geeft invoeging van x voor $-\dfrac{1}{l}$ de vergelijkingen

$$(x + \tfrac{1}{3}h)^2 + y^2 = (\tfrac{2}{3}h)^2 \quad , \quad (x - h)^2 + y^2 = 0$$

der meetkundige plaatsen van de snijpunten van p en b_λ bij evenwijdige verplaatsing van p Hierin herkent men den cirkel (GH′) en den puntcirkel (H).

Uit de vergelijking der krommen volgt onmiddellijk, dat alle krommen b_λ de rechten OI, OJ, HI, HJ tot gemeenschappelijke raaklijnen hebben en bovendien de raakpunten op OI, OJ steeds weer de onbestaanbare cirkelpunten zijn. Dus heeft de verwantschap $[a, b]$ zes fundamentaalelementen.

We zijn thans weer in staat de zestien gemeenschappelijke raaklijnen van de bij p en p' behoorende krommen b_λ en b'_λ op te geven. Duiden we de vier snijpunten van p met de bij p' behoorende kromme B'_λ door P_1, P_2, P_3, P_4, de vier overeenkomstige snijpunten van p' met de bij p behoorende kromme B_λ door P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 en de verbindingslijnen $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$, $P_4P'_4$ door p_1, p_2, p_3, p_4 aan, dan bestaan deze zestien gemeenschappelijke elementen uit l_∞ viermaal, OI en OJ tweemaal en nog acht raaklijnen eenmaal geteld; deze acht raaklijnen zijn HI, HJ, p_1, p_2, p_3, p_4 en de beide rechten b, die bij het snijpunt A van p en p' behooren.

9. Transformatie $[a, B]$. Omhult a het punt P, dan doorloopt het puntenpaar B een kromme van den vierden graad. Want op iedere rechte q door P liggen twee van P verschillende punten der kromme en P is dubbelpunt, wijl een dezer in het algemeen van P verschillende punten voor twee standen van q met P samenvalt, nl. voor de door P gaande zijden van den driehoek ABC, waarvan P een der hoekpunten is.

Invoering der waarden van u_2 en v_2 uit 2′) in $\lambda u_2 + \mu v_2 + 1 = 0$ geeft

$$\{3\,(\mu x - \lambda y) + h\,(y - \mu)\}^2\,[(x - h)^2 + y^2] =$$
$$= [(x - h)\,(x - \lambda) + y\,(y - \mu)]^2\,[3\,(x^2 + y^2) + 2hx - h^2]$$

en dus schijnbaar een kromme van den zesden graad. Wijl u_2 en v_2 uit 2') onbepaalde waarden aannemen voor de punten (x_1, y_1) van den cirkel (GH), is het te verwachten dat $(x - \frac{2}{3}h)^2 + y^2 - \frac{1}{9}h^2$ in bovenstaande vergelijking als overtollige factor optreedt. Werkelijk geeft deeling der vergelijking door $3\,[(x - \frac{2}{3}h)^2 + y^2 - \frac{1}{9}h^2]$ de uitkomst

$$(x^2 + y^2)\{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2\} = h^2(x-\lambda)^2 + \{h(y-\mu) + 2(\mu x - \lambda y)\}^2.$$

Deze vergelijking stelt een rationale kromme van den vierden graad voor, die de onbestaanbare cirkelpunten en het punt (λ, μ) tot dubbelpunten heeft.

De laatste vergelijking wordt ook als volgt verkregen. Heeft q tot vergelijking $ux + vy + 1 = 0$, waarbij de voorwaarde $\lambda u + \mu v + 1 = 0$ uitdrukt, dat q door P gaat, dan zijn

$$x = \frac{h(v^2 - u^2) - 2u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{2(hu + 1)v}{u^2 + v^2}$$

de coördinaten van het met H ten opzichte van q symmetrisch gelegen punt H_a en is

$$x^2 + y^2 = \frac{(hu + 2)^2 + h^2v^2}{u^2 + v^2}$$

dus de vergelijking van den omgeschreven cirkel. Elimineeren we u en v uit deze vergelijking en de vergelijkingen $ux + vy + 1 = 0$, $\lambda x + \mu y + 1 = 0$, dan wordt de boven gegevene vergelijking van den vierden graad zonder overtolligen factor onmiddellijk gevonden.

Het punt P is knooppunt, keerpunt of geïsoleerd punt, naar mate het buiten, op, of binnen den cirkel (GH') ligt. In het eerste en derde geval heeft de kromme B_a de kenmerken $n = 4$, $d = 3$, $k = 0$, $m = 6$, $t = 4$, $b = 6$; in het geval van het keerpunt vindt men echter $n = 4$, $d = 2$, $k = 1$, $m = 5$, $t = 2$, $b = 4$.

De zestien gemeenschappelijke punten van de bij P en P' behoorende krommen B_a en B'_a zijn weer gemakkelijk gevonden. Zijn p_1, p_2, p_3 de raaklijnen uit P aan de bij P' behoorende kromme b'_a, evenzoo p'_1, p'_2, p'_3 de overeenkomstige raaklijnen uit P' aan de bij P behoorende kromme b_a en P_1, P_2, P_3 de snijpunten van (p_1, p'_1), (p_2, p'_2), (p_3, p'_3), dan zijn de zestien bedoelde punten I en J elk viermaal geteld en H_a, H_i, H_j, P_1, P_2, P_3 met de twee punten B, die bij de verbindingslijn a van P en P' behooren.

Vraagstuk CXLVI.

Gegeven een bundel kegelsneden. Door een basispunt A trekt men een snijlijn l en aan elke kegelsnee in het tweede snijpunt met deze snijlijn een raaklijn. Te bewijzen, dat al deze raaklijnen een kegelsnee omhullen, en de karakteristieke grootheden aan te geven voor de reeks der aldus omhullende kegelsneden, die bij de verschillende lijnen l door A behooren. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* W. BOUWMAN, J. NEUBERG *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

Zijn A, B, C, D de basispunten des bundels en l en l' twee willekeurige lijnen door A, dan zullen de kegelsneden K des bundels op l en l' twee projectieve puntreeksen (P) en (P′) afteekenen. De omhullende der verbindingslijn PP′ is dus een kegelsnee L, die l en l' aanraakt; deze kegelsnee L raakt ook de zijden CD, DB, BC van driehoek BCD aan; want als K zich splitst in de rechten AB en CD, dan is CD tevens de verbindingslijn PP′, enz.

Valt nu l' met l samen, dan worden de verbindingslijnen PP′ raaklijnen aan de kegelsneden K in de tweede snijpunten met l en wordt L dus de kegelsnee van het vraagstuk; deze kegelsnee raakt l dan in A aan. Bij draaiing van l om A zal L steeds door A blijven gaan en de drie lijnen CD, DB, BC blijven aanraken.

Van dit stelsel zijn, zooals men weet (zie CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie I*, 393), de karakteristieken (4, 2), d. w. z. van de kegelsneden L gaan er vier door een gegeven punt en raken er twee een gegeven lijn aan.

Vraagstuk CXLVII.

De omhullende der poollijnen van de punten P eener rechte l met betrekking tot een stelkundige kromme C^n van den graad n is een kromme K van den graad $2(n-2)$ en de klasse $n-1$. Deze kromme bezit in het algemeen geen buigpunten. Zij raakt elk der raaklijnen $t_1, t_2, \dots t_n$, in de snijpunten $T_1, T_2, \dots T_n$ van l met C^n aan C^n getrokken, in de punten $P_1, P_2, \dots P_n$, waarvoor P_i het harmonisch middelpunt is van T_i met betrekking tot de $n-1$ punten, waarin t_i de overige raaklijnen t snijdt. Men vraagt dit te bewijzen. (M. D'OCAGNE.)

Opgelost *door* W. BOUWMAN *en* M. D'OCAGNE.

Oplossing *van* W. BOUWMAN.

We gebruiken homogene coördinaten en stellen door $a_x^n = 0$ de gegeven kromme C^n voor, terwijl de gegeven rechte l de punten y en z verbinden mag. De poollijn van een punt P van l met betrekking tot C^n is dan door de vergelijking $(a_y + \lambda a_z)^{n-1} a_x = 0$ voor te stellen.

Beschouwt men in deze vergelijking x gegeven, dan bepaalt zij, wijl zij van den $n-1^{\text{sten}}$ graad is in λ, ook $n-1$ door dit punt x gaande poollijnen. Dus is de omhullende K van de klasse $n-1$.

Om den graad van K te vinden bepalen we haar vergelijking door λ te elimineeren tusschen

$$(a_y + \lambda a_z)^{n-1} a_x = 0 \ , \quad (a_y + \lambda a_z)^{n-2} a_z \, a_x = 0 ,$$

of tusschen

$$(a_y + \lambda a_z)^{n-2} a_y a_x = 0 \ , \ (a_y + \lambda a_z)^{n-2} a_z \, a_x = 0.$$

De resultant dezer vergelijkingen is in de coëfficiënten van ieder van beide van den graad $n-2$ en daar deze coëfficiënten de coördinaten x_1, x_2, x_3 tot de eerste macht bevatten, is K van den $2(n-2)^{\text{den}}$ graad.

De kromme K is rationaal, wijl haar raaklijnen één aan één overeenkomen met de punten van de rechte l. We hebben dus volgens de formules van PLÜCKER

$$\text{graad} = m\,(m-1) - 2t - 3b, \ \text{geslacht} = \tfrac{1}{2}\,(m-1)\,(m-2) - t - b ,$$

en wijl graad $= n-1$, geslacht $= 0$ en klasse $m = 2(n-2)$ is,

$$2t + 3b = (n-2)\,(n-3) \ , \ 2t + 2b = (n-2)\,(n-3)$$

en dus door aftrekking $b = 0$.

Volgens de stelling van MACLAURIN (CREMONA—CURTZE, *Einleitung* u. s. w. § 13) is de poollijn van een punt P van l ten opzichte van C^n dezelfde als die ten opzichte van de raaklijnen t_1, t_2, ... t_n gezamenlijk als kromme van den n^{den} graad beschouwd.

Volgens de stelling van CAYLEY (CREMONA-CURTZE, *l. c.*) is het snijpunt Q van de raaklijn t_1 met de poollijn van P ten opzichte van t_2, t_3, ... t_n, gezamenlijk als kromme van den $n-1^{\text{sten}}$ graad beschouwd, het harmonisch middelpunt van de n punten, waarin PQ de raaklijnen t_1, t_2 .... t_n snijdt. Nadert nu P tot T_1, dan wordt Q bij de limiet harmonisch middelpunt P_1 van de $(n-1)$ punten, waarin t_1 het stel raaklijnen

t_2, t_3, ... t_n snijdt en dit punt P_1 tevens snijpunt van t_1 met de volgende poollijn ten opzichte der n raaklijnen, d. w. z. ten opzichte van C^n. Dit punt P_1 is dus raakpunt van de kromme K met t_1, enz.

AANMERKINGEN VAN DEN HEER D'OCAGNE. I. Schrijven we $(a_y + ta_z)^{n-1} a_x = 0$ in de gedaante $x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + x_3\phi_3(t) = 0$, waarin

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1(t) = a_1 t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + \ldots\ldots + l_1 \\ \phi_2(t) = a_2 t^{n-1} + b_2 t^{n-2} + \ldots\ldots + l_2 \\ \phi_3(t) = a_3 t^{n-1} + b_3 t^{n-2} + \ldots\ldots + l_3 \end{array}\right\}$$

is, dan wordt de vergelijking van K verkregen door eliminatie van t uit

$$x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + x_3\phi_3(t) = 0 \;,\; x_1\phi_1'(t) + x_2\phi_2'(t) + x_3\phi_3'(t) = 0.$$

Hieruit volgt met weglating van het symbool t

$$\frac{x_1}{\phi_2\phi_3' - \phi_3\phi_2'} = \frac{x_2}{\phi_3\phi_1' - \phi_1\phi_3'} = \frac{x_3}{\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'}.$$

Dus is K rationaal en, wijl de noemers in t van den graad $2(n-2)$ zijn, van den graad $2(n-2)$.

II. Men vindt $3(n-3)$ voor het aantal keerpunten, $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ voor het aantal dubbelraaklijnen.

III. Als de gegeven rechte l met l_∞ samenvalt, kunnen we C^n vervangen door de n asymptoten der kromme; de poollijnen kunnen dan de „gemiddelde lijnen" van dit stelsel heeten *Bulletin de la Société Mathématique de France*, deel 12, blz. 114).

Vraagstuk CXLVIII.

Gegeven een stelkundig oppervlak O en een punt P. Wordt dit oppervlak door evenwijdige lichtstralen verlicht, dan vertoont het van P uit gezien schitterende punten Q. Gevraagd te bewijzen, dat het zwaartepunt van de projecties van P op de raakvlakken in de punten Q aan O onafhankelijk is van de richting der lichtstralen. (M. D'OCAGNE.)

Opgelost *door* M. D'OCAGNE.

Oplossing.

Zij A (fig. 71) een willekeurig punt van het gegeven oppervlak O en Σ het omhullend oppervlak van den uit A met AP tot straal beschreven bol, als A zich over O beweegt. Door ons eerst tot die bollen door P te beperken, wier middelpunten oneindig dicht bij A liggen, wordt het duidelijk, dat deze, behalve P, een tweede punt, het spiegelbeeld Q van P met betrekking tot het raakvlak α in A aan O, met elkaar gemeen hebben en dit punt Q dus het raakpunt is van den uit A met AP als straal beschreven bol en Σ. In dit punt Q is AQ derhalve de normaal aan Σ. Stelt AR nu de richting van den lichtstraal voor, dan is A een schitterend punt van O voor een in P geplaatst oog. Dus is het raakvlak α in een schitterend punt van O voor P het vlak, dat de verbindingslijn PQ van P met een punt Q van Σ, waarvoor het raakvlak aan Σ loodrecht staat op de richting der lichtstralen, rechthoekig middendoordeelt.

Nu is, volgens een bekende stelling van Chasles, het zwaartepunt Z van de raakpunten Q van een stelkundig oppervlak Σ met vlakken evenwijdig aan een gegeven vlak onafhankelijk van den stand van dit laatste. Dus is hier het zwaartepunt der punten Q onafhankelijk van de richting der lichtstralen. En wijl nu het zwaartepunt der middens S van de voerstralen PQ het midden van den voerstraal PZ is, is hiermee het gestelde bewezen.

Aanmerking van de Redactie. We wijzen met een enkel woord aan, dat de aangehaalde stelling van Chasles in de theorie van polen en poolvlakken begrepen is.

Bepalen we op elke rechte r door een willekeurig gegeven punt P het ten opzichte van de op r gelegen punten $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ van een gegeven oppervlak O genomen poolpunt R, dat zoo als we weten door de voorwaarde $\Sigma \frac{RQ_i}{PQ_i} = 0$ wordt gekenmerkt, dan is de meetkundige plaats van R een plat vlak, het poolvlak π van P ten opzichte van O. Dit vlak π verandert niet, als we O vervangen door de vereeniging der n vlakken $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$, die O in de snijpunten $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ met een door P gaande rechte r aanraken, wijl de om het snijpunt R van r en π gelegen punten dan dezelfde blijven

(uitbreiding der in het vorige vraagstuk gebruikte stelling van MACLAURIN).

Denken we ons nu de theorie der polen en poolvlakken stelkundig opgezet en vragen we daarna wat alles beteekent, als men puntcoördinaten door vlakcoördinaten vervangt, dan kan de uitkomst, als het vlak V_∞ in het oneindige voor P in de plaats treedt, als volgt geformuleerd worden:

Het poolvlak van V_∞ ten opzichte van alle raakvlakken van een oppervlak O′ evenwijdig aan een gegeven vlak V omhult een punt M, als men den stand van V op alle mogelijke wijzen verandert. Dit punt M, dat aan het middelpunt der kwadratische oppervlakken beantwoordt en daarom (zie *Grondslag*, *M² 2e*) ook wel middelpunt genoemd wordt, verandert niet als men O′ vervangt door een stel raakpunten met evenwijdige raakvlakken; het is dus het gemeenschappelijk zwaartepunt Z der ∞^2 verschillende stellen van raakpunten met evenwijdige raakvlakken.

De bij P behoorende meetkundige plaats van S is het voetpuntsoppervlak van O met betrekking tot P; hieruit wordt het bij P behoorende oppervlak Σ afgeleid door verdubbeling der P-voerstralen.

Bij een gegeven punt P behoort een enkel bepaald punt Z. Verder geeft het vraagstuk o. a. aanleiding tot de volgende vragen:

1°. Hoeveel punten P behooren bij een gegeven punt Z?

2°. Wat beschrijft Z of P, als P of Z een gegeven rechte of een gegeven vlak doorloopt?

We hebben niet kunnen vinden, waar CHASLES de aangehaalde stelling heeft gepubliceerd. Alleen vonden we, op blz. 96 van de *Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes* van F. LUCAS, de overeenkomstige stelling voor het platte vlak als stelling van LIOUVILLE aangegeven.

Vraagstuk CXLIX.

Stelt n_m den binomiaalcoëfficiënt $\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ voor, zijn $a_0, a_1, a_2, \ldots a_k$ naar opklimmende grootte gerangschikte getallen, stelt men verder

$$\psi(a_0) = 2^{a_0},\ \psi(a_0, a_1) = (a_0 + a_1)_{a_0+1} + (a_0 + a_1)_{a_0+2} + \ldots (a_0 + a_1)_{a_1},$$

$$\psi(a_0, a_1, a_2) = \psi(a_0)\psi(a_1, a_2) - \psi(a_1)\psi(a_0, a_2) + \psi(a_2)\psi(a_0, a_1),$$

$$\psi(a_0, a_1, a_2, a_3) = \psi(a_0, a_1)\psi(a_2, a_3) - \psi(a_1, a_2)\psi(a_1, a_3) + \psi(a_0, a_3)\psi(a_1, a_2)$$

en neemt men algemeen dus de notaties

$$\psi(a_0, a_1, \ldots a_{2n}) = \sum_{i=0}^{i=2n} (-1)^i \psi(a_i)\psi(a_0, a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_{2n}),$$

$$\psi(a_0, a_1, \ldots a_{2n+1}) = \sum_{i=0,\ k=1}^{i=2n,\ k=2n+1} (-1)^{i+k}\psi(a_i, a_k)\psi a_0, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_{2n+1})$$

aan, dan is

$$\psi(0, 1, 2, 3, \ldots p) = 1$$

voor elke waarde van p. Men vraagt dit te bewijzen.

(Dr. H. SCHUBERT.)

Oplossing.

Een meetkundige oplossing van dit vraagstuk is vervat in de verhandeling „Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in *n* Dimensionen" (*Math. Annalen*, deel 45, blz. 153) van de hand van Dr. H. SCHUBERT. Wijl ψ zuiver stelkundig bepaald is, moet het echter mogelijk zijn ook een stelkundig bewijs van de betrekking $\psi(0, 1, 2, 3 \ldots p) = 1$ te geven. Ons eerelid en de redactie, we hadden gehoopt, zulk een stelkundige oplossing hier te kunnen publiceeren. Er is echter geen oplossing ingekomen. Dus moet de redactie volstaan met naar de aangehaalde verhandeling te verwijzen.

Vraagstuk CL.

Een ellipsoïde is zoodanig geplaatst, dat de raakvlakken in twee navelpunten horizontaal zijn. Men vraagt uit het hoogst gelegen navelpunt P een koorde te trekken, die door een zonder wrijving vallend punt in den kortst mogelijken tijd wordt doorloopen.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, W. A. POORT, Dr. C. STOLP *en* H. DE VRIES.

Oplossingen.

I. De tijd, dien een stoffelijk punt behoeft om op de in het vraagstuk aangegeven wijs langs een rechte uit een punt

P te glijden naar een gegeven horizontaal vlak is evenredig met de lengte der lijn, gerekend van P tot aan het vlak. Dus volgt voor onze ellipsoïde hieruit, dat onder de koorden, die men uit het gegeven navelpunt naar de punten van een horizontale cirkeldoorsnee trekken kan, de kortste tevens de lijn van snelsten val, de langste tevens de lijn van langzaamsten val wezen zal. Deze beide lijnen liggen, welk horizontaal vlak men ook neemt, steeds in het vlak door groote en kleine as. Dus kunnen we ons bij het onderzoek tot de in deze hoofdsnede gelegen koorden bepalen. Hierdoor is het vraagstuk teruggebracht tot vraagstuk 189 van deel V. Langs den daar gevolgden weg blijkt, dat de lijn door het gegeven punt P evenwijdig aan de kleine as een lijn van snelsten val, de lijn door P evenwijdig aan de groote as een lijn van langzaamsten val zijn zal (C. S.).

II. Brengt men een bol aan, die de ellipsoïde in P aanraakt, dan zullen alle door P gaande koorden van dien bol in denzelfden tijd doorloopen worden; is r de straal van den bol, dan stelt $2\sqrt{\frac{r}{g}}$ dien tijd voor.

Door de straal van den bol van nul af te doen aangroeien, waarbij we dus eerst met bollen te doen hebben, die geheel binnen de ellipsoïde liggen, zullen we langzamerhand komen tot een bol, die de ellipsoïde ten tweeden male aanraakt. De lijn, die beide raakpunten P en Q verbindt, is dan de gevraagde. Want alle andere punten van de ellipsoïde liggen buiten den bol en leveren dus met P verbonden koorden op, die in langeren tijd doorloopen worden als PQ. Dit tweede raakpunt is weer een navelpunt. Want elke bol, die de ellipsoïde in P aanraakt, heeft met de ellipsoïde reeds de twee door P getrokken horizontale isotrope lijnen (den puntcirkel P) gemeen en snijdt dit oppervlak dus bovendien in een vlakke kromme, d. i. in een cirkel; trekt deze zich in een punt samen, dan wordt dit weer een navelpunt.

De lijn door P evenwijdig aan de kleine as, levert dus de gevraagde koorde van snelsten val op. Gemakkelijk blijkt bovendien dat de lijn door P evenwijdig aan de groote as de koorde van langzaamsten val voorstelt (W. A. P., H. d. V.).

III. Is P oorsprong, het raakvlak in P het xy-vlak en het verticale vlak door P en het middelpunt xz-vlak van een

rechthoekig coördinatenstelsel en $x^2 + y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{31}zx + 2a_{34}z = 0$ dus de vergelijking der ellipsoïde, dan is de tijd t, waarin de koorde $x = \lambda z$, $y = \mu z$ doorloopen wordt, bepaald door de vergelijking

$$t^2 = \frac{4a_{34}(\lambda^2 + \mu^2 + 1)}{g(\lambda^2 + \mu^2 + 2a_{31}\lambda + a_{33})}.$$

Stellen we de differentiaalquotienten van t^2 naar λ en μ nul, dan vinden we

$$(\lambda^2 + \mu^2 + 1)(\lambda + a_{31}) - (\lambda^2 + \mu^2 + 2a_{31}\lambda + a_{33})\lambda = 0,$$
$$(2a_{31}\lambda + a_{33} - 1)\mu = 0.$$

En nu blijkt bij voortzetting van het onderzoek, dat $\mu = 0$ de oplossing geeft en de koorden evenwijdig aan kleine en groote as in kortsten en langsten tijd worden doorloopen, enz.

(T. J. A.)

Aanmerking van Dr. C. Stolp. We passen de methode van den zich uitbreidenden bol (zie de tweede oplossing) op het meer algemeene geval toe, waarin het bovenste punt der ellipsoïde een willekeurig punt P is. Deze zich uitbreidende bol zal, onderstellen we, in een of meer stadiën de ellipsoïde in een tweede punt Q aanraken. Beschouwen we een dier stadiën wat nader. Bij de verbindingslijn PQ als richting van koorden behoort nu ten opzichte van ellipsoïde en bol een zelfde middelvlak, het vlak door het midden van PQ en de snijlijn der raakvlakken in P en Q. Wijl het eene der beide oppervlakken een bol is, staat dit vlak loodrecht op PQ in het midden. Dus is het een hoofdvlak van de ellipsoïde en Q symmetrisch gelegen met P ten opzichte van een der drie hoofdvlakken. Langs dezen weg blijkt, dat er dus drie kritieke standen zijn.

Een algemeene stelling, waarvan het bewijs aanstonds gegeven zal worden, kan leeren welke der drie koorden de minimumkoorde is. Men vindt nl. algemeen, dat de tijd, dien een punt behoeft om onder de gegeven omstandigheden van het hoogste punt P naar een ander punt Q te glijden, evenredig is met de lengte der middellijn evenwijdig aan PQ. Volgens dezen regel is de lijn door P evenwijdig aan de kleine as de minimum-koorde, terwijl de lijn door P evenwijdig aan de gemiddelde as geen maximum of minimum oplevert.

Is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de vergelijking der ellipsoïde, zijn (ξ, η, ζ) de coördinaten van P, is p de afstand van het raakvlak in P tot den oorsprong O, dan is de hoek ϕ tusschen de normaal in P en de koorde PQ door P onder hoeken α, β, γ met de assen getrokken door de betrekking

$$\text{Cos}\ \phi = p\left(\frac{\xi}{a^2}\ \text{Cos}\ \alpha + \frac{\eta}{b^2}\ \text{Cos}\ \beta + \frac{\zeta}{c^2}\ \text{Cos}\ \gamma\right)$$

en de lengte ρ van de middellijn evenwijdig aan PQ door de betrekking

$$\frac{4}{\rho^2} = \frac{\text{Cos}^2\alpha}{a^2} + \frac{\text{Cos}^2\beta}{b^2} + \frac{\text{Cos}^2\gamma}{c^2}$$

gegeven. Verder wordt de lengte s der koorde verkregen door de coördinaten $x = \xi - s\ \text{Cos}\ \alpha$, $y = \eta - s\ \text{Cos}\ \beta$, $z = \zeta - s\ \text{Cos}\ \gamma$ van het van P verschillende uiteinde in de vergelijking der ellipsoïde te substitueeren. Dit geeft, wijl P op de ellipsoïde ligt, in verband met de gegeven betrekkingen de vergelijking $s = \frac{\rho^2}{2p}\ \text{Cos}\ \phi$. Hierdoor gaat de betrekking $t = \sqrt{\frac{2s}{g\ \text{Cos}\ \phi}}$ over in $t = \frac{\rho}{\sqrt{pg}}$, waarmee het boven beweerde is aangetoond. [1])

Zijn ρ_1, ρ_2, ρ_3 drie onderling loodrechte middellijnen, dan

---

[1]) Ziehier een meetkundig bewijs der stelling. Zij e^2 de doorsnee der gegeven ellipsoïde E met een horizontaal vlak door het middelpunt en c^2 in dit vlak de cirkel, die de projectie P_0 van P op dit vlak tot middelpunt en den afstand van P tot dit vlak tot straal heeft. We passen nu op E een affine transformatie toe, waardoor P op zijn plaats blijft en e^2 in c^2, dus E in den bol B met het middelpunt P_0 en den straal P_0P overgaat. Bij deze transformatie zal de doorsnee van E met een willekeurig horizontaal vlak in de doorsnee van B met hetzelfde vlak overgaan. Zijn nu PQ en RS een door P gaande koorde van E en de daaraan evenwijdige middellijn van E, PQ' en R'S' de overeenkomstige koorde en daaraan evenwijdige middellijn van B, t en t' de tijden waarin PQ en PQ' door een vrijvallend lichaam worden doorloopen, dan hebben we volgens de eerste oplossing $\frac{t}{t'} = \frac{PQ}{PQ'}$ en volgens de wetten der affiniteit $\frac{PQ}{PQ'} = \frac{RS}{R'S'}$. Hieruit volgt dan $\frac{t}{t'} = \frac{RS}{R'S'}$ en dus, wijl t' en R'S' niet veranderen als men PQ' en R'S' door een andere koorde en de daaraan evenwijdige middellijn vervangt. $\frac{t}{RS}$ = standvastig.

(RED.)

is $\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Hieruit volgt, dat de som $\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\frac{1}{t_3^2}$ voor drie valtijden langs drie onderling loodrechte koorden door P standvastig is.

Uit deze beschouwingen volgt verder, dat bij de koorden, die P verbinden met de verschillende snijpunten van de ellipsoïde met een bol, die haar in P aanraakt, evenwijdige middellijnen behooren, die even lang zijn. Verplaatst men dus den kegel, die de snijkrommen van bol en ellipsoïde uit P projecteert, evenwijdig aan zich zelf met de top naar het middelpunt van de ellipsoïde, dan zal hij in den nieuwen stand de ellipsoïde snijden volgens een spherische ellips, welke ontaardt in de bijzondere gevallen waarbij de bol de ellipsoïde in een tweede punt Q aanraakt; in die gevallen gaat de spherische ellips over in twee punten (uiteinden van kleine of groote as) of in de twee centrale cirkeldoorsneden der ellipsoïde.

Vraagstuk LCI.

Gegeven zijn een kegelsnee k^2 en een vlak α. Gevraagd de meetkundige plaats van het punt, waaruit men de kegelsnee op α moet projecteeren, opdat de projectie een gelijkzijdige hyperbool of een cirkel zij. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. BOUMAN, J. CARDINAAL *en* H. DE VRIES.

Oplossingen,

I. We nemen het midden O van de door α in k^2 bepaalde koorde d tot oorsprong, d tot x-as, de lijn in α door O loodrecht op d tot y-as en de middellijn van k^2 toegevoegd aan de koorde d tot z-as aan. Dan wordt k^2 door de vergelijkingen

$$y=0\,,\quad Ax^2+Bz^2+2Ez+F=0$$

voorgesteld en vindt men

$$A(x_0y-y_0x)^2+B(y_0z-z_0y)^2-2E(y-y_0)(y_0z-z_0y)+F(y-y_0)^2=0$$

als vergelijking van den kegel, die het punt $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ tot top en k^2 tot richtlijn heeft. De doorsnee van dezen kegel

met α, d. i. de centrale projectie van k^2 uit P op α, is dan
$z=0$, $Ay_0^2x^2 + (Ax_0^2 + Bz_0^2 + 2Ez_0 + F)y^2 - 2Ax_0y_0xy + \text{enz.} = 0$.

Deze projectie is:

a) Een gelijkzijdige hyperbool onder de voorwaarde $A(x_0^2 + y_0^2) + Bz_0^2 + 2Ez_0 + F = 0$, d. i. als P ligt op een bepaald kwadratisch oppervlak (P), dat door k^2 gaat en door vlakken evenwijdig aan α volgens cirkels wordt gesneden. Naarmate k^2 ellips, parabool, of hyperbool is, is (P) ellipsoïde, elliptische paraboloïde, hyperboloïde, enz.

b. Een cirkel onder de twee voorwaarden $x_0 = 0$, en $Ay_0^2 - Bz_0^2 - 2Ez_0 + F = 0$, d. i. als P ligt op een bepaalde kegelsnee ((P)) in het *yz*-vlak. Naarmate k^2 ellips (cirkel), parabool, hyperbool (gelijkzijdige hyperbool) is, is ((P)) hyperbool, (gelijkzijdige hyperbool), parabool, ellips (cirkel).

(T. J. A.).

II. Neemt men een vlak β evenwijdig aan α aan, dat k^2 in twee bestaanbare punten K_1, K_2 snijdt, dan zal uit ieder punt P van den op K_1K_2 als middellijn beschreven cirkel (K_1K_2) de projectie van P op α een gelijkzijdige hyperbool zijn, wijl de projecties van K_1 en K_2 in onderling loodrechte richtingen in het oneindige komen te liggen. Hieruit volgt, dat de eerste meetkundige plaats (P) de meetkundige plaats is van de cirkels (K_1K_2) door evenwijdige verplaatsing van β ontstaan. Van dit kwadratisch oppervlak is het middelpunt van k^2 middelpunt en zijn de beide raakpunten van vlakken evenwijdig aan α met k^2 navelpunten, enz.

Zal de projectie uit een punt P van β een cirkel zijn, dan moeten de verbindingslijnen PK_1 en PK_2 naar de onbestaanbare cirkelpunten van β gaan en P dus een der antipunten zijn van K_1 en K_2 in β. Deze punten zijn bestaanbaar, samenvallend of onbestaanbaar, naar mate K_1 en K_2 onbestaanbaar, samenvallend of bestaanbaar zijn; ze liggen alle in het vlak door de middellijn *e* van k^2 toegevoegd aan de koorde *d* in α, dat α volgens een loodlijn *f* op *d* snijdt. De meetkundige plaats ((P)) dier punten wordt dus verkregen door de koorden van k^2 in de vlakken evenwijdig aan α in deze om de middens 90° te draaien en ze van deze middens uit door vermenigvuldiging met $\pm i$ in den tegengestelden toestand van bestaanbaarheid te brengen. Is l^2 de kegelsnee, die door de draaiing

alleen uit k^2 wordt afgeleid, dan is ((P)) toegevoegd aan l^2 met betrekking tot de middellijn e (H. D. V.).

Aanmerking van den Heer Cardinaal. De eerste meetkundige plaats (P) bestaat uit de toppen der kwadratische kegels door k^2 en een der gelijkzijdige hyperbolen van α, die door de beide snijpunten S_1 en S van α en k^2 gaan. Wijl deze gelijkzijdige hyperbolen H^2 een net vormen, behooren de kwadratische oppervlakken door k^2 en een der krommen H^2 tot een drievoudig oneindig lineair stelsel. Dus is (P) het kegeltoppenoppervlak van dit stelsel, dat, in het algemeen van den vierden graad, in dit geval k^2 tot kromme van dubbelpunten heeft en zich dus splitst in het dubbel getelde vlak van k^2 en een kwadratisch oppervlak door k^2.

De tweede meetkundige plaats ((P)) bestaat uit de toppen der kwadratische kegels door k^2 en een der cirkels van α door S_1 en S_2. Wijl deze cirkels een bundel vormen, maken de kwadratische oppervlakken door k^2 en een dier cirkels een net uit, waarvan ((P)) de kegeltoppenkromme is. Deze kromme is in het algemeen van den zesden graad. Wijl alle oppervlakken door k^2 gaan en er dus vijf van de zeven bepalende basispunten in een vlak liggen, hebben we hier te doen met het geval e van vraagstuk 15 van deel V en splitst de kromme zich dus in het vlak van k_2 en een kegelsnee.

Vraagstuk LCII.

Gegeven een gesloten oppervlak S, een punt A binnen en een punt A′ buiten dit oppervlak. De afstand van A tot A′ is a, terwijl de afstanden van een veranderlijk punt M van S tot A en A′ door r en r' worden voorgesteld. Indien (r, n) en (r', n) de hoeken van r en r' met de inwendige normaal n van S in M aangeven, geldt de betrekking

$$\iint \left[\frac{\operatorname{Cos}(r, n)}{r^2 r'} - \frac{\operatorname{Cos}(r', n)}{r r'^2} \right] dS = \frac{4\pi}{a},$$

als de integratie zich over het geheel oppervlak S uitstrekt. Men vraagt dit te bewijzen. (Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn.

Oplossing.

Volgens een bekende formule (zie o. a. PICARD, *Traité d'analyse*, I, blz. 144) hangt de potentiaal V_p in het punt P door de betrekking

$$V_p = \frac{1}{4\pi}\iint\left[V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right]dS$$

samen met de waarden van V en $\frac{dV}{dn}$ op het oppervlak. Stellen we hierin voor V de functie $\frac{1}{r'}$, die met haar eerste en tweede afgeleide doorloopend is binnen S, dan wordt $V_p = \frac{1}{a}$ en derhalve

$$\frac{4\pi}{a} = \iint\left[\frac{1}{r'}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r'}\right)}{dn}\right]dS,$$

wat onmiddellijk in het gestelde overgaat.

Vraagstuk CLIII.

Men vraagt de stelling van het vorige vraagstuk voor het bijzondere geval van den bol met behulp van bolfuncties te bewijzen.

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing.

Is l de afstand OA van het middelpunt van den bol tot A, R de straal van den bol, Cos MOA = Cos $\theta = \mu$, $l + a = f$ en $dS = -2\pi R^2 d\mu$, dan gelden de betrekkingen

$$l^2 = R^2 - 2Rr\,\mathrm{Cos}\,(r, n) + r^2, \quad f^2 = R^2 - 2Rr'\,\mathrm{Cos}\,(r', n) + r'^2.$$

Dus is de gezochte integraal

$$I = 2\pi R^2\int_{-1}^{+1}\frac{1}{rr'}\left(\frac{R^2 - l^2}{2Rr^2} - \frac{R^2 - f^2}{2Rr'^2}\right)d\mu$$

$$= \pi R\left[(R^2 - l^2)\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{r'r^3} - (R^2 - f^2)\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{rr'^3}\right].$$

Nu is echter in bolfuncties P

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_0^\infty \frac{l^n}{R^n} P_n(\mu), \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{R(R^2 - l^2)} \sum_0^\infty (2n+1) \frac{l^n}{R^n} P_n(\mu),$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{f} \sum_0^\infty \frac{R^n}{f^n} P_n(\mu), \quad \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{f(f^2 - R^2)} \sum_0^\infty (2n+1) \frac{R^n}{f^n} P_n(\mu).$$

Dus geeft invoeging, in verband met de bekende stellingen

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_{n'}(\mu)\, d\mu = 0, \quad \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1},$$

de uitkomst

$$1 = \frac{2\pi}{f} \cdot \frac{f}{f-l} + \frac{2\pi}{f} \cdot \frac{f}{f-l} = \frac{4\pi}{f-l} = \frac{4\pi}{a}.$$

Vraagstuk CLIV.

Bewijs, dat de meetkundige plaats van alle punten z, waarvoor mod $\{z + \sqrt{z^2 - 1}\}$ standvastig is, een ellips is met de brandpunten $\pm$ 1. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* W. BOUWMAN, T. BRANDENBURG, Dr. W. KAPTEYN, W. A. POORT, A. E. RAHUSEN en Dr. J. DE VRIES.

Oplossingen.

I. De beide onderstellingen

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = w, \quad z - \sqrt{z^2 - 1} = w^{-1}$$

volgen uit elkaar. Zij geven samen $2z = w + w^{-1}$. Schrijft men nu $re^{i\phi}$ voor w, waarin men r standvastig onderstelt, dan geeft splitsing der laatste vergelijking

$$2x = (m + m^{-1}) \operatorname{Cos} \phi, \quad 2y = (m - m^{-1}) \operatorname{Sin} \phi \ . \ . \ . \ 1)$$

en dus ten slotte eliminatie van ϕ voor de verlangde meetkundige plaats de ellips

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m^2+1}{2m}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2} = 1;$$

wijl $\left(\frac{m^2+1}{2m}\right)^2 - \left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2$ de eenheid is, heeft zij de punten ($\pm$ 1, 0) tot brandpunten. (W. B., T. B., W. K., J. d. V.)

II. Uit $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ volgt $\frac{dw}{w} = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$. Het argument van het eerste lid dezer vergelijking bepaalt den hoek tusschen de raaklijn aan de baan van w en den voerstraal van O naar het punt w; terwijl het argument van het tweede lid den hoek aangeeft tusschen de raaklijn aan de baan van z en de lijn $\sqrt{(z+1)(z-1)}$, d. i. de deellijn van den hoek gevormd door de verbindingslijnen van het punt z met de punten $\pm$ 1. Bovenstaande betrekking drukt dus uit, dat voor twee overeenkomstige standen van w en z de raaklijn aan de baan van w met den O-voerstraal van dit punt denzelfden hoek α maakt als de raaklijn aan de baan van z met de genoemde deellijn.

Neemt men den aangegeven hoek α voortdurend recht, dan doorloopt w een cirkel met O tot middelpunt, wat aan de voorwaarde mod. $w =$ standvastig beantwoordt. In dit geval beschrijft z echter een ellips, die de punten $\pm$ 1 tot brandpunten heeft. (A. E. R.)

OPMERKINGEN. I. De oplossing van den Heer POORT berust op het gebruik van elliptische coördinaten; hieromtrent raadplege men o. a. HEINE *Theorie der Kugelfunctionen I*, blz. 40 en het kleine geschriftje *Ueber die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art* van C. NEUMANN, aan wien het vraagstuk is ontleend.

II. Neemt men in de tweede oplossing den aangewezen hoek α steeds nul, dan blijkt, dat, als w een rechte door O beschrijft en argument $z + \sqrt{z^2 - 1}$ dus standvastig blijft, z een hyperbool met dezelfde brandpunten doorloopt.

Men toont gemakkelijk aan, dat 1°. voor $\alpha = \frac{\pi}{2}$ de straal m van den cirkel de halve som of het halve verschil van de assen der ellips is, naarmate m grooter of kleiner dan de eenheid is en 2°. voor $\alpha = 0$ de door w beschreven rechte een der beide asymptoten is van de door z doorloopen hyperbool.

Door op te merken, dat het punt w gevonden wordt door op de deellijn van den hoek, gevormd door de verbindingslijnen van het punt z met de punten ± 1, een afstand middenevenredig tusschen de lengten dezer lijnen uit te zetten, vindt men nog de volgende uitkomsten:

Zet men op de normaal eener ellips naar weerszijden afstanden uit middenevenredig tusschen de beide brandpuntsvoerstralen, zoo liggen de verkregen punten op de cirkels uit O met de som en het verschil der halve assen van de ellips als stralen beschreven [1]).

De gelijke stukken, die door de asymptoten eener hyperbool van een raaklijn aan de kromme worden afgesneden, zijn middenevenredig tusschen de brandpuntsvoerstralen van het raakpunt. (A. E. R.)

III. Stelt men in 1)

$$m + m^{-1} = 2a \quad , \quad m - m^{-1} = 2b$$

en zijn r, θ de poolcoördinaten van z, dan heeft men

$$r \operatorname{Sin} \theta = b \operatorname{Sin} \phi \quad , \quad r \operatorname{Cos} \theta = a \operatorname{Cos} \phi$$

en dus $\operatorname{Tg} \theta = \frac{b}{a} \operatorname{Tg} \phi$. Hieruit blijkt, dat ϕ de excentrische anomalie is van het punt z. Daar verder $m = a + b$ is, vindt men het punt w, dat bij eenig punt z eener ellips met de brandpunten ± 1 behoort, door uit het middelpunt der ellips met a en $a + b$ als stralen cirkels te beschrijven en het punt, waar de ordinaat van z den eersten cirkel ontmoet, met het middelpunt te vereenigen; deze lijn snijdt den tweeden cirkel dan in het punt w. Ter vermijding van dubbelzinnigheid merken we hierbij op, dat z en w in hetzelfde kwadrant liggen.

Uit de aangenomen vergelijkingen volgt $w^2 - 2zw + 1 = 0$. Dus behoort bij elk punt z een paar punten w, die men door w en w^{-1} kan aanduiden. Deze punten komen met elkaar

---

[1]) Volgens de betrekking $ab = pn$ is de middenevenredige n tusschen de brandpuntsvoerstralen omgekeerd evenredig met den afstand p van het middelpunt tot de raaklijn; dus vormt de uitkomst van Vr. 17 van de reeks der ellips in Briot en Bouquet *Leçons de géométrie analytique* een uitbreiding van het bovenstaande.

overeen in de om de x-as omgeslagen inversie ten opzichte van den cirkel op den brandpuntsafstand der ellips als middellijn beschreven [1]). (J. d. V.)

Vraagstuk CLV.

Beschrijft het punt met de complexe veranderlijke x voorkomende in de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^n v}{dx^n} + \varphi_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \varphi_{n-3}(x)\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \ldots \varphi_0(x)v = 0$$

zonder tweeden term en met rationale functies φ een kromme, die één der kritieke punten insluit, dan zal een stelsel van fundamentale integralen $v_1, v_2, \ldots v_n$ overgaan in een ander stelsel $w_1, w, \ldots w_n$, hieraan verbonden door betrekkingen van den vorm $w_i = \Sigma\alpha_{i,k}v_k$, waarin $\alpha_{i,k}$ constanten zijn. Men vraagt te bewijzen (zie POINCARÉ, *Acta Math*, deel IV), dat de determinant der constanten $\alpha_{i,k}$ gelijk aan de eenheid is. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Om alles voluit te kunnen schrijven nemen we $n = 2$. Dan is gegeven

$$w_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2,\quad w_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2$$

en dus ook

$$\frac{dw_1}{dx} = \alpha_{11}\frac{dv_1}{dx} + \alpha_{12}\frac{dv_2}{dx},\quad \frac{dw_2}{dx} = \alpha_{21}\frac{dv_1}{dx} + \alpha_{22}\frac{dv_2}{dx}.$$

De determinant der functie w is dus

$$\begin{vmatrix} \frac{dw_1}{dx}, & \frac{dw_2}{dx} \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{dv_1}{dx}, & \frac{dv_2}{dx} \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}.$$

[1]) Brengt men de uitkomsten van de heeren RAHUSEN en DE VRIES met elkaar in verband, dan vindt men nog het volgende:

Zet men op de normaal van een punt P der ellips van P af naar weerskanten stukken PS, PS' uit gelijk aan de halve toegevoegde middellijn OQ van P en neemt men van S het symmetrische punt S'' ten opzichte van de groote as, dan vallen de voerstralen OS' en OS'' op elkaar en is OS' . OS'' $= a^2 - b^2$.

De determinant $|\alpha_{ik}|$ zal blijken de eenheid te zijn, als bewezen is, dat de determinanten der functies w en v dezelfde waarde hebben.

Nu kan de gegeven differentiaalvergelijking door de integralen v bepaald en aldus voorgesteld worden

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2v}{dx^2} & \frac{d^2v_1}{dx^2} & \frac{d^2v_2}{dx^2} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv_1}{dx} & \frac{dv_2}{dx} \\ v & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \equiv D\frac{d^2v}{dx^2} + D_1\frac{dv}{dx} + D_2 v = 0.$$

Omtrent de minoren D, D_1, D_2 merken we op, dat D de zoo even besproken determinant der functies v is en D_1 de afgeleide van D naar x aangeeft. Als de tweede term ontbreekt, dan is $\frac{dD}{dx}$ dus nul, zoodat D van x onafhankelijk blijkt te zijn. Wanneer dus de functies v, *door het veranderen van* x, overgaan in de functies w, dan zullen beide stellen dezelfde functionaaldeterminant hebben, wat bewezen moest worden.

Wanneer x om een veld loopt zonder kritieke punten, dan komen de functies v onveranderd terug en heeft dus de stelling geen inhoud; daarom is in de stelling het loopen om een kritiek punt als voorwaarde gesteld. Natuurlijk mag x ook om meer dan een kritiek punt loopen. Verder kan de stelling dienst bewijzen, als de coëfficiënten $\phi(x)$ periodieke functies zijn met een gemeenschappelijke periode. Neemt x met de periode toe, dan is de differentiaalvergelijking onveranderd gebleven en de integralen v zijn overgegaan in een stel integralen w, dat in het algemeen van het stel v verschilt, omdat de integralen niet periodiek zijn. In vraagstuk 159 zal hiervan een voorbeeld gegeven worden.

Vraagstuk CLVI.

Brengt de opeenvolging der drie substituties $S_i\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (i = 1, 2, 3)$ een vlakke figuur in den oorspronkelijken toestand terug en is dus $S_1 S_2 S_3 = 1$, terwijl de substitutiedeterminanten $\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i \, (i = 1, 2, 3)$

gelijk zijn aan de eenheid, dan zijn $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ en $\delta_1\delta_2\delta_3$ de wortels van de vierkantsvergelijking

$$t^2 \mp \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2 + M_3 + 1)\,t + \tfrac{1}{8}(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1) = 0,$$

waarin M_i den vorm $\alpha_i\delta_i + \beta_i\gamma_i$ aanduidt (zie VOGT, *Ann. de l'école norm.* 1889). Men vraagt het bewijs. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

Bij de samenstelling van twee substituties S met de eenheid tot substitutiedeterminant, ontstaat een nieuwe substitutie van denzelfden vorm, waarvan de substitutiedeterminant weer één is. Stellen we er drie samen en vinden we dan $z' = \dfrac{Az + B}{Cz + D}$, dan zal dus ook de voorwaarde $AD - BC = 1$ gelden. Is $z' = z$, dan moet $B = 0$, $C = 0$, $A = D$ zijn. In verband met de aangegeven voorwaarde mogen we voor $A = D$ nu ook $A = \pm 1$, $D = \pm 1$ schrijven, waarbij tegelijkertijd òf beide plusteekens òf beide minusteekens gelden. Dus splitst de voorwaarde $S_1S_2S_3 = 1$ zich in de vier vergelijkingen

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \beta_3\gamma_1\delta_2 &= \pm 1,\\
\alpha_2\alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_2\delta_1 + \beta_1\beta_3\gamma_2 + \beta_3\delta_1\delta_2 &= 0,\\
\alpha_1\alpha_2\gamma_3 + \alpha_1\gamma_2\delta_3 + \beta_2\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\delta_2\delta_3 &= 0,\\
\alpha_2\beta_1\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\delta_3 + \beta_2\gamma_3\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3 &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met β_1, de tweede met α_1 en trekken we ze daarna van elkaar af, dan vinden we

$$\alpha_3\beta_2 + \delta_2\beta_3 = \mp \beta_1.$$

Evenzoo vinden we uit $S_2S_3S_1 = 1$ en $S_3S_1S_2 = 1$

$$\alpha_1\beta_3 + \delta_3\beta_1 = \mp \beta_2 \quad , \quad \alpha_2\beta_1 + \delta_1\beta_2 = \mp \beta_3,$$

waarbij de gelijke teekens bij elkaar behooren. Door eliminatie van de grootheden β_i, die homogeen in deze vergelijkingen voorkomen, vinden we verder

$$\begin{vmatrix} \pm 1 & , & \alpha_3 & , & \delta_2 \\ \delta_3 & , & \pm 1 & , & \alpha_1 \\ \alpha_2 & , & \delta_1 & , & \pm 1 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \delta_1\delta_2\delta_3 = \pm(\Sigma\alpha_i\delta_i - 1) = \pm\tfrac{1}{2}(\Sigma M_i + 1).$$

Verder is

$$\alpha_1\delta_1 \,.\, \alpha_2\delta_2 \,.\, \alpha_3\delta_3 = \tfrac{1}{8}(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1).$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Vraagstuk CLVII.

Men vraagt de waarde te vinden van de bepaalde integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l(1 + \mathrm{Cos}\,\theta)}{\mathrm{Cos}\,\theta}\,d\theta.$$

(J. C. KLUYVER).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. BOUWMAN, T. BRANDENBURG, J. C. KLUYVER, W. MANTEL, W. A. POORT, Dr. C. STOLP *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossingen.

I. We stellen $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l(1 + a\,\mathrm{Cos}\,\theta)}{\mathrm{Cos}\,\theta}\,d\theta$ en vinden dan door differentiatie naar a

$$\frac{dy}{da} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + a\,\mathrm{Cos}\,\theta} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}\,\mathrm{Bg\,Cos}\,\frac{a + \mathrm{Cos}\,\theta}{1 + a\,\mathrm{Cos}\,\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathrm{Bg\,Cos}\,a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Dus is

$$y = \int \frac{\mathrm{Bg\,Cos}\,a}{\sqrt{1 - a^2}}\,da = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{Bg\,Cos}\,a)^2 + C.$$

Ter bepaling van C merken we op, dat y nul zijn moet voor $a = 0$. Dit geeft $C = \tfrac{1}{8}\pi^2$. Stellen we daarna a nul, dan is $\tfrac{1}{8}\pi^2$ de uitkomst. (T. J. A.).

II. We hebben

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\theta + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cos}^2\theta - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos}^3\theta + \ldots)\,d\theta.$$

Nu is

$$\left.\begin{array}{ll}\text{voor } m \text{ even} \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}^m\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots.m-1}{2.4.6\ldots.\;\;m} \\ \text{voor } m \text{ oneven} \ldots. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}^m\theta d\theta = \frac{2.4.6\ldots.m-1}{3.5.7\ldots.\;\;m}\end{array}\right\}.$$

Dus vinden we

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}.\frac{1}{4} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{1}{6} + \ldots\right)$$

of

$$\mathrm{I} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8} \;\ldots.\; \text{(T. B.).}$$

III. We beschouwen de integraal der complexe functie $f(z) = \dfrac{l(1+z)}{1+z^2}$. In het vlak $z = x + iy$ trekt men (fig. 72) om den oorsprong O een kwartcirkel AB met de eenheid tot straal en uit B met een zeer kleinen straal d den cirkelboog CD. Binnen de figuur OACDO en ook op den rand is $f(z)$ dan eenwaardig als men $f(0) = 0$ aanneemt. Wijl de gesloten figuur geen polen van $f(z)$ omvat, is derhalve

$$\int_{\mathrm{OACDO}} f(z)\,dz \equiv \int_{\mathrm{OA}} + \int_{\mathrm{AC}} + \int_{\mathrm{CD}} + \int_{\mathrm{DO}} = 0.$$

In deze vergelijking is achtereenvolgens

$$\int_{\mathrm{OA}} \equiv \int_0^1 \frac{l(1+x)\,dx}{1+x^2},$$

$$\int_{\mathrm{AC}} \equiv i\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{l(1+e^{i\theta})}{1+e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}d\theta = -\tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{\theta d\theta}{\mathrm{Cos}\,\theta} + \tfrac{1}{2}i\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{l(2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\theta)}{\mathrm{Cos}\,\theta}d\theta,$$

$$\int_{\mathrm{CD}} = -\tfrac{1}{4}\,.\,2\pi i\left[\frac{l(1+z)}{i+z}\right]_{z=i} = \frac{\pi}{8}l2 - i\frac{\pi^2}{16},$$

$$\int_{\mathrm{DO}} \equiv i\int_{1-\delta}^{0} \frac{l(1+iy)}{1-y^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}i\int_{1-\delta}^{0} \frac{l(1+y^2)}{1-y^2}\,dy - \int_{1-\delta}^{0} \frac{\mathrm{Bgtg}\;y}{1-y^2}\,dy.$$

De som der imaginaire deelen moet nul zijn. Dus is

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{l(2\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}\theta)}{\text{Cos}\,\theta}\,d\theta - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_{1-\delta}^{0} \frac{l(1+y^2)}{1-y^2}\,dy = 0.$$

Substitueert men in de laatste integraal $y = \text{Tg}\,\frac{\theta}{2}$, dan is voor zeer kleine waarden van δ

$$\int_{1-\delta}^{0} \frac{l(1+y^2)}{1-y^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{\log\,\text{Cos}\,\frac{\theta}{2}}{\text{Cos}\,\theta}\,d\theta.$$

Hierdoor gaat de vergelijking over in

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{l\left(2\,\text{Cos}^2\,\frac{\theta}{2}\right)}{\text{Cos}\,\theta}\,d\theta = \frac{\pi^2}{16}.$$

De functie onder het integraalteeken wordt niet meer oneindig, als δ tot nul nadert. We vinden dan $\frac{1}{8}\pi^2$ voor de gevraagde waarde. (J. C. K.).

IV. We hebben

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l(1+\text{Cos}\,\theta)}{\text{Cos}\,\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{dy}{1+y\,\text{Cos}\,\theta} = \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+y\,\text{Cos}\,\theta}$$

$$= \int_0^1 \frac{\text{Bg Cos}\,y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 d\,(\text{Bg Cos}\,y)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Bovenstaande vergelijking is een bijzonder geval van de vergelijking in Table 313, 8) uit de *Nouv. Tables d'Int. définies* van D. Bierens de Haan. (C. S.).

Vraagstuk CLVIII.

Bereken de som der reeks

$$\frac{1}{2\,(\log 2)^2} + \frac{1}{3\,(\log 3)^2} + \frac{1}{4\,(\log 4)^2} + \ldots\ldots$$

(W. Mantel.)

Opgelost *door* W. Mantel.

Oplossing.

Zijn de logarithmen in de reeks Briggiaansche, dan vindt men met behulp van een gewone tafel de volgende waarden van $u_n = \dfrac{1}{n\,(\log n)^2}$

$$\begin{aligned}
u_2 &= 5{,}517602\\
u_3 &= 1{,}464270\\
u_4 &= 0{,}6897006\\
u_5 &= 0{,}4093672\\
u_6 &= 0{,}2752458\\
u_7 &= 0{,}2000266\\
u_8 &= 0{,}1532668\\
u_9 &= 0{,}1220226\\
u_{10} &= 0{,}1000000\\
\hline
\text{Som}_{10} &= 8{,}931502
\end{aligned}$$

Heeft men in de opgave met Neperiaansche logarithmen te doen, dan moet dit getal met de tweede macht van den modulus 0,43429448 worden vermenigvuldigd, waardoor men vindt

$$S_{10} = 1{,}684547.$$

De convergentie der reeks is zeer zwak. Onderzoeken wij hoeveel termen noodig zouden zijn om door dadelijke sommeering een redelijke benadering te verkrijgen. Hiertoe hebben wij de ongelijkheden

$$u_n = \frac{1}{n(\log n)^2} < \frac{1}{n \log n \log(n-1)} < \frac{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\log n \log(n-1)} = \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log n};$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} u_k < \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n-1)}\right) + \left(\frac{1}{\log(n+2)} - \frac{1}{\log(n+3)}\right) + \ldots,$$

en dus

$$\sum_{n+1}^{\infty} u_k < \frac{1}{\log n}.$$

Eveneens

$$u_n > \frac{1}{n \log n \log(n+1)} > \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n \log(n+1)} = \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)};$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} u_k > \left(\frac{1}{\log(n+1)} - \frac{1}{\log(n+2)}\right) + \left(\frac{1}{\log(n+2)} - \frac{1}{\log(n+3)}\right) + \ldots$$

en dus

$$\sum_{n+1}^{\infty} u_k > \frac{1}{\log(n+1)}.$$

Bij de door ons berekende som van negen termen is dus nog een correctie te voegen, die tusschen $\frac{1}{\log 10}$ en $\frac{1}{\log 11}$ ligt. Nu is $\frac{1}{\log 10} = 0{,}434294$ en $\frac{1}{\log 11} = 0{,}417032$; de som der reeks is dus begrepen tusschen 2,101 en 2,118.

Maakte men van deze correctie geen gebruik, dan zou men, om de som in zes decimalen te kennen, zoover moeten sommeeren, dat de fout kleiner dan een millioenste werd. De fout is ten naastenbij $\frac{1}{\log n}$. Dus zoude men $n = e^{10^6}$ moeten nemen; deze n is een getal van 43430 cijfers. Met behulp van de aangewezen correctie zou men de som in zes decimalen nauwkeurig vinden, als $\log(n+1) - \log n$ kleiner dan een millioenste is; hiertoe zijn ook nog millioen termen noodig, zoodat het werk de grenzen der menschelijke krachten ver te boven gaat.

Met behulp van de sommatieformule van Euler vindt men, als

$$\phi(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$$

gesteld wordt,

$$S_n = C + \int \frac{dn}{n(\log n)^2} + \frac{1}{2n(\log n)^2} + \frac{B_1}{1.2}\phi'(n) - \frac{B_2}{1.2.3.4}\phi'''(n) + \ldots.$$

Hierin wordt de integraal $= -\frac{1}{\log n}$, $\phi'(n) = -\frac{l+2}{n^2 l^3}$,

$\phi'''(n) = -\frac{6l^3 + 22l^2 + 36l + 24}{n^4 l^5}$,.. als $\log n$ door l wordt voorgesteld Door $n = \infty$ te stellen vindt men, dat de constante C gelijk aan de som van onze oneindige reeks is; deze som is derhalve aldus voor te stellen

$$C = S_n + \frac{1}{l} - \frac{1}{2nl^2} + \frac{l+2}{12n^2 l^3} - \frac{6l^3 + 22l^2 + 36l + 24}{720n^4 l^5} + \ldots.$$

Voor $n = 10$ is $S_n = 1{,}684547$, zooals in het begin is berekend; dan is $\frac{1}{l}$ = de modulus $= 0{,}434294$. Met weinig moeite berekent men de som der reeks; zij is in zes decimalen nauwkeurig

$$C = 2{,}109918.$$

Vraagstuk CLIX.

Gevraagd een integraal van de vergelijking $x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, waaraan voor $x = 1$ de waarde $y = 0$ voldoet.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* W. A. POORT.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Stelt men in de vergelijking $y = \sum_{n=0}^{n=\infty} g_n x^{h+n}$, dan vindt men

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \{(h+n)(h+n-1)\,g_n + g_{n-1}\}x^{h+n-1} = 0 \ldots 1),$$

waarbij g_{-1} nul te nemen is. Dus is achtereenvolgens

$$h(h-1)g_0 = 0,\ (h+1)hg_1 + g_0 = 0,\ (h+2)(h+1)g_2 + g_1 = 0 \ldots 2).$$

Neemt men hierin $h = 1$, dan is g_0 willekeurig; dit levert de bijzondere integraal

$$y_1 = g_0\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2.\,3} - \frac{x^4}{2^2.\,3^2.\,4} + \frac{x^5}{2^2.\,3^2.\,4^2.\,5} - \ldots\right)$$

op. Voor $h = 0$ is g_0 eveneens willekeurig, doch zijn de overige coëfficiënten g oneindig groot; deze onderstelling is dus niet te gebruiken.

In navolging van FROBENIUS (*Journal von Crelle*, deel 76, blz. 214) laten we h eerst onbepaald en drukken we g_1, g_2, ... in g_0 uit. Uit de waarde

$$y = g_0 x^h\left\{1 - \frac{x}{h(h+1)} + \frac{x^2}{h(h+1)^2(h+2)} - \frac{x^3}{h(h+1)^2(h+2)^2(h+3)} + \ldots\right\},$$

die uit 1) en alle voorwaarden 2) op de eerste na volgt, blijkt

dan, dat we met een oplossing der vergelijking

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = h(h - 1)g_0 x^{h-1}$$

te doen hebben. Hierin zij $g_0 = hh_0$. Differentiatie naar h geeft dan

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + 1\right)\frac{dy}{dh} = 2h(h - 1)h_0 x^{h-1} + h^2\frac{d}{dh}(h - 1)h_0 x^{h-1}.$$

Voor $h = 0$ wordt het tweede lid nul, waaruit volgt dat $\frac{dy}{dh}$ een tweede integraal is. Dus is

$$y_2 = \frac{d}{dh}\left\{h_0 h x^h\left[1 - \frac{x}{h(h+1)} + \frac{x^2}{h(h+1)^2(h+2)} - \ldots\right]\right\},$$

of na uitwerking

$$y_2 = h_0 \log x\left[-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2^2.3} + \frac{x^4}{2^2.3^2.4} - \ldots\right]$$
$$+ h_0\left[1 + a_1 x - a_2\frac{x^2}{2} + a_3\frac{x^3}{2^2.3} - a_4\frac{x^4}{2^2.3^2.4} + \ldots\right],$$

waarin gesteld is

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \ldots . \qquad \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} = a_m.$$

De algemeene integraal nu is $y = y_1 + y_2$. Gemakkelijk verifieert men, dat de reeksen convergeeren voor alle waarden van x en de ontwikkelde oplossing dus algemeen is.

De voorwaarde, dat y nul wordt voor $x = 1$, geeft

$$y = 0{,}5767249 \ldots g_0 + 1{,}0020415 \ldots h_0.$$

Had y nul moeten worden voor $x = -1$, dan zou men gevonden hebben

$$1{,}5906370 \ldots \{g_0 + h_0 \log(-1)\} - 1{,}5563369 \ldots h_0 = 0$$

en was de integraal onbestaanbaar geweest.

Aanmerking. De gegeven vergelijking heeft twee integralen $y_1 = f(x)$ en $y_2 = f(x)\log x + F(x)$, waarbij $f(x)$ en $F(x)$ holomorphe functies zijn (vergelijk vraagstuk 152). Als het argument van x met 2π toeneemt is $y_1' = y_1$ en $y_2' = 2\pi i y_1 + y_2$ geworden.

Vraagstuk CLX.

Integreer de gelijktijdige partieele differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = b.$$

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

De tweede vergelijking met m vermenigvuldigende en bij de eerste optellende, verkrijgen wij

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + m\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + m\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = m^2 + mb + a.$$

Als dus m zoo gekozen wordt, dat $m^2 + mb + a = 0$ is, dan wordt

$$\frac{\partial(u + mx)}{\partial x}\frac{\partial(v + my)}{\partial y} - \frac{\partial(u + mx)}{\partial y}\frac{\partial(v + my)}{\partial x} = 0,$$

dus $u + mx = f(v + my)$. Dewijl wij twee waarden van m hebben, kunnen wij als algemeen integralenstelsel opgeven

$$u + m_1 x = \phi(v + m_1 y), \quad u + m_2 x = \psi(v + m_2 y).$$

BIJZONDER GEVAL Als $m_1 = m_2$ is, dan levert het bovenstaande slechts een integraalvergelijking. Om de algemeene uitkomst op dit bijzondere geval toe te passen, neme men eerst $m_1 = m$, $m_2 = m_1 + \delta$ en late men δ tot nul naderen.

Het integralenstelsel is dan

$$u + mx = \phi(v + my),$$

$$u + mx + \delta x = \psi(v + my) + \frac{\delta y}{1}\psi'(v + my) + \dots.$$

Neem nu aan, dat $\phi = \psi + \delta f$ is, dan levert het verschil dezer vergelijkingen de betrekking

$$-\delta x = \delta f(v + my) - \delta y \psi'(v + my) + \dots.$$

Na deeling door δ worde $\delta = 0$ gesteld. Als integralenstelsel vindt men dan

$$u + mx = \psi(v + my); \quad x + f(v + my) = y\psi'(v + my).$$

Vraagstuk CLXI.

De punten (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1) zijn de middelpunten van de vier gelijke bollen B_0, B_1, B_2, B_3, die elkaar twee aan twee aanraken. Gevraagd de coördinaten van het middelpunt van den bol B_n uit de reeks van even groote bollen, die hierdoor wordt bepaald, dat vier opvolgende bollen elkaar twee aan aanraken. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, A. E. RAHUSEN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* A. E. RAHUSEN.

1. Het zwaartepunt der punten B_{n+1}, B_{n+2}, B_{n+3} moet met dat der punten B_n, B_{n+4} samenvallen. Hieruit volgt de betrekking

$$\tfrac{1}{3}(b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}) = \tfrac{1}{2}(b_n + b_{n+4}),$$

waarin b_i òf een der coördinaten x_i, y_i, z_i òf den vector van B_i voorstelt. Schrijven we deze betrekking in den vorm

$$3b_{n+4} - 2b_{n+3} - 2b_{n+2} - 2b_{n+1} + 3b_n = 0,$$

dan blijkt, dat men te doen heeft met een recurrente reeks van punten, waarvan $3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$ de voortbrengende vergelijking is. Deze vergelijking heeft een dubbelen wortel $+1$ en een paar onbestaanbare wortels $\text{Cos}\,\alpha \pm i\,\text{Sin}\,\alpha$, waarin $\text{Cos}\,\alpha = -\tfrac{2}{3}$, $\text{Sin}\,\alpha = \tfrac{1}{3}\sqrt{5}$ en dus $\alpha = 131°\,48'\,37''$ is. Voor den algemeenen term b_n der reeks vindt men dus

$$b_n = C_1 + C_2 n + C_3\,\text{Cos}\,n\alpha + C_4\,\text{Sin}\,n\alpha.$$

Bepaalt men hierin de coëfficiënten zoodanig, dat voor $n = 0, 1, 2, 3$ de waarden b_0, b_1, b_2, b_3 verkregen worden, dan vindt men

$$10b_n = (6b_0 + 5b_1 + 2b_2 - 3b_3) + (-3b_0 - b_1 + b_2 + 3b_3)n$$

$$+ (4b_0 - 5b_1 - 2b_2 + 3b_3)\,\text{Cos}\,n\alpha + (-b_0 + 8b_1 - 13b_2 + 6b_3)\frac{\text{Sin}\,n\alpha}{\sqrt{5}}.$$

2. Tot hiertoe is ondersteld, dat b_0, b_1, b_2, b_3 willekeurig zijn. Voor de in het vraagstuk gegeven punten geldt echter de betrekking $b_3 = b_0 + b_1 + b_2$. Dus is

$$10b_n = (3b_0 + 2b_1 - b_2) + 2(b_1 + 2b_2)n$$
$$+ (7b_0 - 2b_1 + b_2)\,\mathrm{Cos}\,n\alpha + (5b_0 + 14b_1 - 7b_2)\frac{\mathrm{Sin}\,n\alpha}{\sqrt{5}}$$

en vinden we voor de coördinaten van B_n

$$10x = -1 + 4n + \mathrm{Cos}\,n\alpha - \frac{7}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Sin}\,n\alpha\,,$$
$$10y = 2 + 2n - 2\,\mathrm{Cos}\,n\alpha + \frac{14}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Sin}\,n\alpha\,,$$
$$10z = 3 + 7\,\mathrm{Cos}\,n\alpha + \sqrt{5}\,\mathrm{Sin}\,n\alpha.$$

Door over te gaan tot de nieuwe coördinaten

$$x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y)\ ,\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y - \tfrac{1}{2})\ ,\ z' = z - \tfrac{3}{10}$$

vereenvoudigen deze vergelijkingen zich tot

$$x' = \frac{n}{\sqrt{5}}\ ,\ y' = \tfrac{3}{10}\sqrt{6}\ \mathrm{Sin}\,(n\alpha + \beta),\ z' = \tfrac{3}{10}\sqrt{6}\,\mathrm{Cos}\,(n\alpha + \beta),$$

waarin $\mathrm{Sin}\,\beta = -\tfrac{1}{18}\sqrt{30}$, $\mathrm{Cos}\,\beta = \tfrac{7}{18}\sqrt{6}$ en $\beta = 17^\circ\ 43'$ is. Dus liggen de punten B op een schroeflijn met de x'-as tot as. De straal der schroeflijn is $\tfrac{3}{10}\sqrt{6}$, de spoed is $\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{5}}$. De vlakken, die twee opeenvolgende punten uit de as projecteeren, sluiten een hoek α in.

Aanmerkingen. I. In het drietallig stelsel geschreven zijn de cöordinaten der punten b_0, b_1, b_2 .... achtereenvolgens

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1
1,1	1,1	— 0,1
2,02	0,12	0,11
2,001	1,221	0,202
2,2012	1,1122	— 0,1022
10,02221	1,10011	0,21112
10,011122	2,122202	0,022121
11,0100011	1,2022101	— 0,0210001
11,10002202	2,02202212	1,00020211
....	....	....

(W. M.)

III. De ligging der bollen om de schroefas zou zuivere periodiciteit vertoonen als $\alpha = \mathrm{Bg\,Cos}\,\frac{2}{3}$ een meetbare verhouding tot 2π had Nu is dit slechts bij benadering het geval. Neemt men $\alpha = \frac{11}{30} \,.\, 2\pi$, dan is de fout nog geen $12'$; elk dertigtal bollen vertoont dus ongeveer dezelfde figuur. Nauwkeuriger is $\alpha = \frac{93}{254} \,.\, 2\pi$, waarbij de fout slechts een paar seconden beloopt. (W. M.)

III. In het *Zeitschrift f. Krystallographie u. Mineralogie* van P. GROTH wordt deel 23, blz. 164 gesproken van „einem cylinderähnlichen Körper, in welchem die Kugeln, wie F DELPINO gezeigt hat, angeordnet sind wie die Blätter von Quincunciale Phyllotax." „Die auf einer Schraubenlinie liegenden Kugelmittelpunkte" — heet het verder — „bilden die Ecken von regulären gleichen Tetraedern, deren je zwei eine Fläche gemein haben." Deze reeks wordt dan een helicotetraedrische zuil genoemd.

In fig. 73 is de as van de schroeflijn aangegeven; C_0, C_1, C_2, C_3 zijn de projecties van B_0, B_1, B_2, B_3 of van B_0', B_1', B_2', B_3 (vergelijk fig. 74) op de as (RED.).

Vraagstuk CLXII.

Een punt M beweegt zich langs een cirkel met onveranderlijke snelheid c. Gevraagd volgens welke wet het vlak van dien cirkel om een bepaalde middellijn wentelen moet, opdat de snelheid in de ruimte steeds $2c$ zij. Tevens de baan van het punt te bepalen.

(M. H. SPRUYT.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. BOUWMAN, T. BRANDENBURG, W. A. POORT, M. H. SPRUYT, DR. C. STOLP, F. J. VAES, H. DE VRIES *en* P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Oplossing.

We noemen de middellijn om welke het vlak van den cirkel wentelt de as, den door de wenteling voortgebrachten bol de aarde, de verschillende standen van den wentelenden cirkel meridianen, de cirkels in vlakken loodrecht op de as parallelcirkels. Ontbinden we dan de snelheid op een gegeven oogenblik volgens meridiaan en parallel, dan blijken beide ontbondenen c en $c\sqrt{3}$ standvastig te zijn. Dus is de baan van het

punt M een loxodromische kromme, die alle meridianen onder hoeken van 60° snijdt.

Is R de straal des bols en zijn θ en ϕ geographische lengte en breedte van M, dan stellen R Cos $\phi \frac{d\theta}{dt}$ en R $\frac{d\phi}{dt}$ de snelheden langs parallel en meridiaan voor. Dus gelden de betrekkingen $\frac{1}{3} \sqrt{3}$ R Cos $\phi \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{R} \frac{d\phi}{dt} = c$. Langs den gewonen weg volgt hieruit

$$\tfrac{1}{3}\,\theta \sqrt{3} = \log \mathrm{Tg}\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\,\phi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

voor de vergelijking der baan.

De beide polen zijn asymptotische punten der baan.

De hoeksnelheid der draaiende beweging is minimum $\left(\frac{c\sqrt{3}}{\mathrm{R}}\right)$ aan den equator en oneindig in de polen.

De weg van equator tot pool wordt in den tijd $\frac{\pi \mathrm{R}}{2c}$ doorloopen.

De projectie der kromme op het equatorvlak heeft de vergelijking

$$\frac{\sqrt{\mathrm{R}+r} + \sqrt{\mathrm{R}-r}}{\sqrt{\mathrm{R}+r} - \sqrt{\mathrm{R}-r}} = e^{\frac{1}{3}\theta\sqrt{3}} .$$

Dit volgt onmiddellijk uit eliminatie van ϕ tusschen 1) en R Cos $\phi = r$.

Vraagstuk CLXIII.

In een zelfde vlak liggen twee perspectieve collineaire vlakke stelsels. Met een cirkel uit het eene komt in het algemeen een kegelsnee uit het andere overeen. Door een gegeven punt een cirkel van het eerste stelsel te brengen met welken in het tweede weer een cirkel overeenstemt. (H. de Vries.)

Opgelost *door* W. Bouwman *en* H. de Vries.

Oplossing.

De perspectieve verwantschap der stelsels Σ_1 en Σ_2 is be-

paald door centrum van perspectief O, as van perspectief a en de aan a evenwijdige vluchtlijn v (fig. 75) van Σ_1, die met l_∞ van Σ_2 overeenstemt.

Elke willekeurige cirkel van Σ_1 bepaalt op v een involutie van paren toegevoegde punten; deze involutie wordt uit O op l_∞ bepaald. Wil de overeenkomstige kegelsnee ook een cirkel zijn, dan moet de laatste involutie op l_∞ worden ingesneden door een om een willekeurig punt draaienden rechten hoek en een om O draaiende rechte hoek dus de eerste involutie op v kunnen voortbrengen. Anders gezegd, deze involutie op v moet de projectie H van O op v tot centraalpunt en het negatief genomen vierkant van HO tot macht hebben. Hieruit volgt dan, dat het middelpunt M van den gevraagden cirkel C op HO liggen en het positief genomen vierkant van HO de macht van H met betrekking tot dien cirkel zijn moet. Is A het gegeven punt en bepaalt men op HA het punt A′ zoo, dat $HA \,.\, HA' = \overline{HO}^2$ is, dan is de cirkel door A, A′, die zijn middelpunt heeft op HO, de gevraagde.

Alle cirkels van het stelsel Σ_1, die in cirkels overgaan, vormen een bundel; deze is door de rechte lijn v en den puntcirkel O bepaald. De overeenkomstige cirkels van Σ_2 vormen eveneens een bundel bepaald door de vluchtlijn v' en den puntcirkel O.

Aanmerking. Is O oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel en stelt $y = k$ de lijn v voor, dan is de verwantschap tusschen de overeenkomstige punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) van Σ_1 en Σ_2 uitgedrukt door de vergelijkingen

$$x_2 = \frac{px_1}{y_1 - k},\ y_2 = \frac{py_1}{y_1 - k}\,.$$

Dus komen met de onbestaanbare cirkelpunten $x_2 = \pm\, iy_2 = \infty$ van Σ_2 de punten $x_1 = \pm\, ik$, $y_1 = k$ van Σ overeen en zijn alle cirkels van Σ_1, die na transformatie cirkels gebleven zijn, door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2\mu\,(y - k) = 0$$

voorgesteld. Werkelijk is dit een bundel, die voor $\mu = 0$ den puntcirkel O en voor $\mu = \infty$ de lijn v oplevert. (W. B.)

Vraagstuk CLXIV.

Van de in het vorige vraagstuk bij een willekeurig aangenomen cirkel C^2 behoorende kegelsnee K^2 de assen, de toppen en de vier snijpunten met C^2 rechtstreeks te construeeren.

(H. DE VRIES.)

Opgelost *door* W. BOUWMAN *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* H. DE VRIES.

De verwantschap tusschen de stelsels Σ_1 en Σ_2 wordt weer vastgesteld door het centrum O (fig. 76), de as a en de aan a evenwijdige vluchtlijn v van Σ_1 aan te wijzen.

Is V de pool van v ten opzichte van den in Σ_1 gegeven cirkel C^2, dan is het overeenkomstige punt V′ middelpunt van K^2. En de involutie, die de toegevoegde middellijnen van K^2 op l_∞ bepalen, is de projectie uit O op v van de involutie der toegevoegde punten met betrekking tot C^2. Om de richting der assen van K^2 te vinden, heeft men van de involutie op v dus het paar te construeeren, dat uit O onder een rechten hoek gezien wordt.

Is a_0 de poollijn van O ten opzichte van C^2 en v_0 de lijn evenwijdig aan a_0, die den afstand van O tot a_0 middendoordeelt, dan bepalen O, a_0 en v_0 als centrum, as en vluchtlijn een involutorische perspectieve collineatie, waarin C^2 met zich zelf overeenstemt; met elk punt P van C^2 komt dan het tweede snijpunt van C^2 met OP overeen. Is V_0 het snijpunt van v en v_0 en zijn V_1 en V_2 de snijpunten van v met den uit V_0 met V_0O beschreven cirkel, dan zijn OV_1 en OV_2 evenwijdig aan de assen van K^2. Dit zal bewezen zijn, zoodra aangetoond is, dat (V_1, V_2) een paar is van de involutie der toegevoegde punten op v. Dit volgt hieruit, dat V_1 en V_2 harmonisch liggen met de snijpunten van v en C^2. Wijl v_0 de machtlijn is van C^2 en den puntcirkel O, is OV_0 in lengte gelijk aan de raaklijn uit V_0 aan C^2. Zijn X en Y de bestaanbare of onbestaanbare snijpunten van v en C^2, dan geldt dus de betrekking $\overline{V_0V_1}^2 = \overline{V_0V_2}^2 = V_0X \,.\, V_0Y$, wat de harmonische ligging bewijst.

De lijnen VV_1 en VV_2 snijden C^2 in de puntenparen (D, E), (F, G). De met deze punten overeenkomende punten (D′, E′), (F′, G′) zijn de toppen van K^2.

Twee van de vier snijpunten van C^2 en K^2 liggen op a,

wijl de punten van a met hun overeenkomstigen samenvallen. De twee andere snijpunten levert ons de lijn V_0A_0, die het punt V_0 met het snijpunt A_0 van a en a_0 verbindt. Deze lijn komt nl. in beide collineaties, in de gegevene en in de involutorische, met de lijn b door A_0 evenwijdig aan OV_0 overeen. Zij snijdt den cirkel in de twee punten B_1, B_2, waarvan de overeenkomstige punten B'_1, B'_2 op b volgens de gegevene collineatie op K^2 en volgens de involutorische collineatie op C^2 moeten liggen. Dus zijn B'_1, B'_2 inderdaad de beide overige snijpunten van C^2 en K^2.

Aanmerking. Ten einde de vier toppen te kunnen teekenen, is in de figuur aangenomen, dat v en C^2 geheel buiten elkaar liggen en K^2 dus een ellips is. Voor dit geval kan het invoeren der onbestaanbare snijpunten als volgt vermeden worden

Beschrijft men uit H als middelpunt den cirkel (H), die C^2 loodrecht snijdt, dan zal deze den uit V_0 met V_0O beschreven cirkel (V_0) in twee punten van HM snijden. Wijl de beide cirkels (H) en (V_0) den gegeven cirkel loodrecht snijden en M met betrekking tot beide dus dezelfde macht heeft, gaat de natuurlijk op de lijn v der middelpunten loodrecht staande machtlijn door M. Wijl H het middelpunt van een der cirkels is, zijn deze snijpunten van (H) en (V_0) op HM nu bestaanbaar. Snijdt (H) de lijn v nu in W_1, W_2, dan is dus $HW_1 . HW_2 = HV_1 . HV_2$ waaruit dan volgt, wat men beweerde.

Als v en C^2 elkaar raken in H en K^2 dus een parabool wordt, valt een der punten V_1, V_2, bijv. V_1 met H samen. De tweede raaklijn uit V_2 en haar raakpunt gaan dan in de topraaklijn en de top over, enz.

Als v en C^2 elkaar in bestaanbare punten snijden en K^2 dus een hyperbool is, bepaalt men gemakkelijk de asymptoten dezer kromme.

Vraagstuk CLXV.

Op te lossen de differentievergelijking

$$(3u^2_x + 1)\, u_{x+1} = u^3_x + 3u_x,$$

waar u_x en u_{x+1} achtereenvolgens $\Phi(x)$ en $\Phi(x+1)$ voorstellen.

(Dr. J. de Vries.)

Opgelost *door* H. J. Krantz, W. Mantel, W. A. Poort *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing.

Uit de gegeven vergelijking volgt

$$u_{x+1} \pm 1 = \frac{u^3_x \pm 3u^2_x + 3u_x \pm 1}{3u^2_x + 1}$$

en dus

$$\frac{u_{x+1} + 1}{u_{x+1} - 1} = \left(\frac{u_x + 1}{u_x - 1}\right)^3,$$

of

$$v_{x+1} = v^3_x,$$

d. i.

$$v_1 = v^3_0,\ v_2 = v^9_0, \ldots v_x = v_0^{3^x}.$$

Dus volgt verder uit

$$\frac{u_x + 1}{u_x - 1} = a^{3^x}$$

als oplossing van het vraagstuk

$$\phi(x) = \frac{a^{3^x} + 1}{a^{3^x} - 1}.$$

Vraagstuk CLXVI.

Gegeven twee projectieve vlakkenbundels (α) en (α') met elkaar kruisende assen a en a'. Men stelt het kwadratisch regelvlak, dat de meetkundige plaats is van de snijlijnen der overeenkomstige vlakken α en α' door H voor. Als (α) vast blijft, doch (α') om a' draait, doorloopt H een stelsel (H). Men vraagt (H) te onderzoeken en o.a. de regelvlakken te bepalen, die door een gegeven punt gaan, die een gegeven rechte aanraken, die een gegeven vlak aanraken. Wat voor bijzonderheden doen zich voor als (α) en (α') gelijk zijn? (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

Bij draaing om a' blijven de isotrope vlakken V′ en W′ door a' op hun plaats. Zijn V en W de overeenkomstige vlakken van (α) en v en w de snijlijnen (V, V′) en (W, W′), dan zijn a, a', v, w aan alle oppervlakken (H) gemeen en vormen deze dus een bundelschaar met den gedeeltelijk onbestaanbaren

scheeven vierhoek $ava'w$ tot basiskromme. Dus gaat er een oppervlak H door een gegeven punt en raken er twee een gegeven lijn en een een gegeven vlak aan.

Het door een gegeven punt P gaande oppervlak H wordt verkregen door den bundel (α') om a' te draaien tot het met vlak $(a, P) = \alpha$ overeenkomende vlak α' door P gaat.

De oppervlakken (H) snijden een willekeurig gegeven rechte r in de puntenparen (M, M′) eener kwadratische involutie. Want, als men M aanneemt, is het oppervlak H en dus ook het overeenkomstige punt M′ bepaald en gaat men van M′ uit, dan vindt men M terug. De raakpunten van r met oppervlakken H zijn de dubbelpunten van deze kwadratische involutie.

De snijpunten (M, M′) van r met een oppervlak H zijn de dubbelpunten der projectieve puntenreeksen door de bundels (α) en (α') op r bepaald. Wordt r door drie vlakken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ van (α) in P_1, P_2, P_3 en door de drie overeenkomstige vlakken $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3$ van (α') in Q_1, Q_2, Q_3 gesneden, dan zijn (M, M′) dus de dubbelpunten der reeksen $(P_1P_2P_3 \ldots.)$, $(Q_1Q_2Q_3 \ldots.)$. Gaan Q_1, Q_2, Q_3 door (α') om a' een zekeren hoek te draaien in R_1, R_2, R_3 over en zijn (N, N′) de dubbelpunten der reeksen $(P_1P_2P_3 \ldots.)$, $(R_1R_2R_3 \ldots.)$, dan zijn (M, M′), (N, N′) twee paren der involutie op r, waarvan de dubbelpunten moeten worden gezocht.

In een willekeurig door r gebracht vlak β kan de bepaling der gezochte punten nu als volgt geschieden. We zoeken de beide ten opzichte van r symmetrisch gelegen punten S′ en S″, waaruit men de puntenreeksen $(Q_1Q_2Q_3 \ldots.)$, $(R_1R_2R_3 \ldots.)$, onder gelijke hoeken ziet, zoodat $\angle Q_1SR_1 = \angle Q_2SR_2 = \angle Q_3SR_3$, enz. Deze punten S′ en S″ zijn bestaanbaar, wijl de beide projectieve puntenreeksen Q_i en R_i blijkens hun ontstaan geen dubbelpunten kunnen hebben. Zijn T′ en T″ de verdwijnpunten van $(Q_1Q_2Q_3 \ldots..)$, $(R_1R_2R_3 \ldots..)$, is U′ het midden van T′T″ en U″ het punt der tweede reeks dat met U′ van de eerste overeenkomst, dan zijn S′ en S″ zoo op de loodlijn in U op r gelegen, dat $\overline{U'S''}^2 = \overline{U'S'}^2 = U'U'' \,.\, U'T''$ is. Heeft men verder uit beide punten S′, S″ de keus S′ gedaan, dan construeert men het punt S, waarvoor $\angle P_1SP_2 = \angle Q_1S'Q_2$ en $\angle P_2SP_3 = \angle Q_2S'Q_3$ is. Hierdoor bereikt men, dat de stralenbundels $S\,(P_1P_2P_3 \ldots)$, $S'\,(Q_1Q_2Q_3 \ldots.)$, $S'\,(R_1R_2R_3 \ldots)$ *gelijk* zijn en de puntenparen (M, M′), (N, N′) der involutie

op r dus de snijpunten zijn van r met de door S en S′ gebrachte cirkels. De raakpunten van r met door S en S′ gaande cirkels zijn dan de gevraagde punten; zij zijn bestaanbaar als S en S′ aan dezelfde zijde van r liggen.

Een willekeurig gegeven vlak ϕ mag a in A en a' in A′ snijden. Raakt een oppervlak H dit vlak ϕ aan, dan moet het een in ϕ gelegen beschrijvende lijn bevatten; dit moet de lijn $l \equiv AA'$ zijn. Nu bepalen a en l een vlak α van den bundel (α) en a' en l den stand, waarin het overeenkomstige vlak α' van den bundel (α') door draaiing om a' gebracht moet worden, om met (α) het oppervlak, dat ϕ aanraakt, voort te brengen.

Als de vlakkenbundels (α) en (α') *gelijk* zijn, zijn alle regelvlakken H orthogonaal, d. w. z. voor elk oppervlak H staan dan een beschrijvende lijn en een richtlijn loodrecht op elk der beide reeksen van evenwijdige cirkelvlakken.

Omtrent het algemeene geval vergelijke men NEUBERG's mededeeling op het Congres te Caen (*Annuaire de l'Association française*, 1894) getiteld „Notes diverses" en wel no. 3, „Question de géométrie projective." Omtrent het bijzonder geval vergelijke men mijn opstel in de *Annales de Delft*, deel 3, blz. 61.

Vraagstuk CLXVII.

In een vlak zijn drie lijnenparen (a_x, a'_x), (b_x, b'_x), (c_x, c'_x) met de snijpunten A, B, C gegeven. Gevraagd de vergelijking der meetkundige plaats van het punt M, waarvoor de lijnen AA′, BB′, CC′ door deze lijnenparen achtereenvolgens harmonisch gescheiden van AM, BM, CM door een zelfde punt M′ gaan. Tevens de vergelijking der omhullende van de rechte MM′ te vinden.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. NEUBERG *en* W. A. POORT.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

Vervangt men de drie gegeven lijnenparen door drie kegelsneden A_x^2, B_x^2, C_x^2, die niet tot een zelfden bundel behooren, dan vindt men, dat de meetkundige plaats van het punt M, waarvan de drie poollijnen met betrekking tot deze drie kegel-

sneden door een zelfde punt M′ gaan, een kubische kromme van den derden graad is, die men de kromme van HESSE van de drie kegelsneden of van het door deze kegelsneden bepaalde kegelsnedennet noemt. Bovendien omhult dan de rechte MM′ de kromme van de derde klasse, die als de kromme van CAYLEY van het net bekend staat.

Men vergelijke hieromtrent o.a. GUNDELFINGER-DINGELDEY's „*Vorlesungen aus der anal. Geom. der Kegelschnitte* blz. 218–225.

In het vraagstuk worden de vergelijkingen der beide kubische krommen gevraagd.

1. Zijn $(a_x = 0, a'_x = 0)$, $(b_x = 0, b'_x = 0)$, $(c_x = 0, c'_x = 0)$ de vergelijkingen der drie gegeven lijnenparen en (y_1, y_2, y_3) en (z_1, z_2, z_3) de coördinaten van M en M′, dan gelden de betrekkingen

$$a_y a'_z + a_z a'_y = 0,\ b_y b'_z + b_z b'_y = 0,\ c_y c'_z + c_z c'_y = 0.$$

Dus geeft eliminatie van z_1, z_2, z_3 voor de meetkundige plaats van M de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a'_1 a_y + a_1 a'_y, & a'_2 a_y + a_2 a'_y, & a'_3 a_y + a_3 a'_y, \\ b'_1 b_y + b_1 b'_y, & b'_2 b_y + b_2 b'_y, & b'_3 b_y + b_3 b'_y, \\ c'_1 c_y + c_1 c'_y, & c'_2 c_y + c_2 c'_y, & c'_3 c_y + c_3 c'_y, \end{vmatrix} = 0.$$

Door ontbinding gaat dit over in

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} a_y b_y c_y + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} a'_y b_y c_y + \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} a'_y b'_y c'_y = 0.$$

Het eerste lid dezer vergelijking bestaat uit acht termen; ieder dezer termen is het product der afstanden van M tot de zijden van een driehoek ingesloten door een der lijnen van elk paar, vermenigvuldigd met den vorm $\frac{\Delta}{R}$, waarin Δ het oppervlak en R den straal van den omgeschreven cirkel van den driehoek der drie overschietende lijnen voorstelt.

2. Elk der lijnen MM′ snijdt de drie gegeven lijnenparen in drie puntenparen (A_1, A'_1), (B_1, B'_1), (C_1, C'_1) eener involutie, die (M, M′) tot dubbelpunten heeft. Zijn (y_1, y_2, y_3) en (z_1, z_2, z_3) de coördinaten van twee willekeurige punten P en Q van MM′, dan kunnen die van A_1 in de gedaante $y_i + \alpha z_i$ $(i = 1, 2, 3)$ geschreven worden. Wijl A_1 op $a_x = 0$ ligt, wordt voor α dan de waarde $-\frac{a_y}{a_z}$ gevonden. Evenzoo vindt men voor de

grootheden α', β, β', γ, γ', die op overeenkomstige wijs de punten $A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1$ bepalen, achtereenvolgens de waarden $-\frac{a'_y}{a'_z}$ $-\frac{b_y}{b_z}$, $-\frac{b'_y}{b'_z}$, $-\frac{c_y}{c_z}$, $-\frac{c'_y}{c'_z}$. Nu is de voorwaarde, dat (A_1, A'_1) (B_1, B'_1) (C_1, C'_1) involutorisch liggen (zie o. a. HESSE's *Vorlesungen über die anal. Geom. des Raumes*, bl. 106)

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha+\alpha', & \alpha\alpha' \\ 1, & \beta+\beta', & \beta\beta' \\ 1, & \gamma+\gamma, & \gamma\gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$(\beta-\gamma')\ (\gamma-\alpha')\ (\alpha-\beta') = (\beta'-\gamma)\ (\gamma'-\alpha)\ (\alpha'-\beta)$$

en dus

$$\begin{vmatrix} a_z a'_z, & a_y a'_z + a_z a'_y, & a_y a'_y \\ b_z b'_z, & b_y b'_z + b_z b'_y, & b_y b'_y \\ c_z c'_z, & c_y c'_z + c_z c'_y, & c_y c'_y \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$(b_y c'_z - b_z c'_y)\ (c_y a'_z - c_z a'_y)\ (a_y b'_z - a_z b'_y) =$$
$$= (b'_y c_z - b'_z c_y)\ (c'_y a_z - c'_z a_y)\ (a'_y b_z - a'_z b_y).$$

Door transformatie gaat deze vergelijking in die der omhullende van MM' over. We hebben nl.

$$b_y c'_z - b_z c'_y \equiv (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3)\ (c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + c'_3 z_3) -$$
$$- (b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3)\ (c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + c'_3 y_3)$$
$$= \begin{vmatrix} b_2 b_3 \\ c'_2 c'_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_2 y_3 \\ z_2 z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3 b_1 \\ c'_3 c'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_3 y_1 \\ z_3 z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c'_1 c'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{vmatrix}$$

en dus, wijl de drie tweede factoren evenredig zijn met de lijncoördinaten u_1, u_2, u_3 van PQ, d. i. van MM',

$$b_y c'_z - b_z c'_y = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (b_1 c'_2 u_3).$$

Door op de overeenkomstige vormen een soortgelijke herleiding toe te passen gaat de gevonden vergelijking over in

$$(b_1 c'_2 u_3)\ (c_1 a'_2 u_3)\ (a_1 b'_2 u_3) = (b'_1 c_2 u_3)\ (c'_1 a_2 u_3)\ (a'_1 b_2 u_3).$$

Het is niet zoo eenvoudig van deze vergelijking[1]) een meetkundige beteekenis aan te wijzen.

AANMERKINGEN. I. De dualistisch tegengestelde vraag van het tweede gedeelte, nl. de meetkundige plaats te vinden van het punt M, waarvoor de drie paren van stralen naar drie paren gegeven punten involutie vormen, maakt het uitgangspunt uit van SCHRÖTER's synthetische behandelingswijze der kromme van den derden graad („*Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung*"). (W. A. P.)

II. In vraagstuk 69 van deel 4 der *Wiskundige Opgaven* is een ruimte-uitbreiding van het dualistisch tegengestelde van het tweede deel der vraag behandeld.

Als ruimte-uitbreiding van dit tweede gedeelte zelf vinden we het volgende: De meetkundige plaats der lijnen l, die drie vlakkenparen (of drie kwadratische oppervlakken, welke niet tot een zelfden bundel behooren) in drie puntenparen in involutie snijden, is een complex van den derden graad.

(P. H. S.)

Vraagstuk CLXVIII.

Zooals bekend is, liggen de vier hoogtepunten α, β, γ, δ van de driehoeken bcd, cda, dab, abc, die drie van vier gegeven rechten a, b, c, d tot zijden hebben, op een zelfde rechte. Men vraagt de vierzij $abcd$ te construeeren als gegeven zijn:

1⁰. twee zijden en twee hoogtepunten;

2⁰. de zijde a, het snijpunt ab en drie der hoogtepunten;

3⁰. de zijde a en de vier hoogtepunten. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

---

[1]) Zoo als men weet, zijn de drie puntenparen $\alpha^2_x = 0$, $\beta^2_x = 0$, $\gamma^2_x = 0$ in involutie onder de voorwaarde $(bc)(ca)(ab) = 0$. Volgens het „Uebertragungsprincipe" van CLEBSCH (*Vorlesungen*, blz. 274) omhult dus de rechte, die de drie kegelsneden $a^2_x = 0$, $b^2_x = 0$, $c^2_x = 0$ in involutie snijdt, de kromme van de derde klasse voorgesteld door $(bcu)\ (cau)\ (abu) = 0$. Deze uitkomst gaat in de gevondene over als a^2_x, b^2_x, c^2_x vervangen worden door $a_x a'_x$, $b_x b'_x$, $c_x c'_x$. (RED.)

Oplossing.

We duiden de snijpunten *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd* achtereenvolgens met de letters P, Q, R, S, T, U (fig. 77) aan en onderscheiden nu sub. 1 de drie gevallen (a, b, γ, δ), (a, b, α, γ), (a, b, α, β), sub 2 de drie gevallen $(a, P, \beta, \gamma, \delta)$, $(a, P, \alpha, \gamma, \delta)$, $(a, P, \alpha, \beta, \gamma)$, terwijl het geval $(a, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sub 3 op zich zelf staat. In alle gevallen behalve het laatste is P dan bekend.

1. *Geval* (a, b, γ, δ). Uit (a, b, δ) volgt *c* en uit (a, b, γ) volgt *d*. Men vindt *c* als verbindingslijn der punten Q, S, waar de loodlijnen uit δ op *b* en *a* neergelaten *a* en *b* snijden, enz.

2. *Geval* (a, b, α, γ). Men vindt *d* uit (a, b, γ) en daarna *c* uit (b, d, α).

3. *Geval* (a, b, α, β). Het punt U is het snijpunt der loodlijn uit α op *b* met de loodlijn uit β op *a*. En de lijnen *c*, *d* door U zijn de raaklijnen uit U aan de parabool, die *a* en *b* aanraakt en $\alpha\beta$ tot richtlijn heeft. Het brandpunt F dier parabool is het snijpunt van de spiegelbeelden van $\alpha\beta$ ten opzichte van *a* en *b*; de raaklijnen door U deelen dan de lijnen UV en UW loodrecht middendoor, als V en W de snijpunten zijn van den uit U met UF tot straal beschreven cirkel (U, UF) en de richtlijn. Wijl de snijpunten V en W onbestaanbaar kunnen zijn, is dit met de zijden *c* en *d* ook het geval.

4. *Geval* $(a, P, \beta, \gamma, \delta)$. Men vindt R als het snijpunt van *a* met de lijn door β evenwijdig aan $P\delta$ en *b* als de loodlijn uit P op $R\gamma$; daarmee is men op het geval 1 terecht gekomen.

5. *Geval* $(a, P, \alpha, \gamma, \delta)$. Men vindt S als het snijpunt van de loodlijn uit δ op *a* neer gelaten met de lijn uit α evenwijdig aan $P\gamma$ getrokken en heeft dan *b* gevonden. Hiermee is men weer teruggekeerd tot geval 1 (of 2).

6. *Geval* $(a, P, \alpha, \beta, \gamma)$. Men vindt Q als het snijpunt van *a* met de lijn uit β evenwijdig aan $P\gamma$. Verder bepalen we het punt S door den driehoek PQS te beschouwen. Van dezen driehoek zijn P en Q bekend terwijl S op de lijn *s* door

α evenwijdig aan $P\gamma$ getrokken en het hoogtepunt δ op $\alpha\beta\gamma$ gelegen moet zijn. Doorloopt S de lijn s, dan beschrijft het hoogtepunt een hyperbool, de snijpunten van deze met $\alpha\beta\gamma$ doen de punten δ der beide oplossingen kennen, enz.

7. *Geval* (a, α, β, γ, δ). We nemen (fig. 78) de richting der evenwijdige lijnen αS, βQ, γP willekeurig aan en zoeken de omhullende van PS en die van de loodlijn QV op PS, als de aangenomen richting verandert. De lijn PS omhult een kegelsnee, die a, $h = \alpha\beta\gamma\delta$ en de loodlijnen s en t uit δ en γ op a neergelaten aanraakt. Dus omhult QV een kromme van de derde klasse, die a tot dubbelraaklijn heeft; want, terwijl QV met a samenvalt voor de standen s en t van PS, gaat er door een willekeurig punt van a één van a verschillende loodlijn QV. Uit δ kunnen aan deze omhullende drie raaklijnen getrokken worden; dus laat dit geval drie oplossingen toe.

Aanmerking. Behalve de beschouwde gevallen kunnen we nog andere onderscheiden. Zoo bijv. P, Q en twee der vier hoogtepunten, wat zich dan weer in (P, Q, γ, δ), (P, Q, α, δ), (P, Q, β, γ), (P, Q, α, β) splitst; of P, U met twee der hoogtepunten als (P, U, α, β), (P, U, α, γ). In de gevallen (P, Q, γ, δ) en (P, Q, α, δ) bepaalt men achtereenvolgens S, T, R, enz. Het geval (P, Q, β, γ) is onmogelijk of onbepaald, wijl $P\gamma$ en $Q\beta$ evenwijdig moeten zijn. In het geval (P, Q, α, β) kan men eerst γ vinden, daarna R, enz. Als (P, U, α, β) gegeven is, zoekt men eerst a en b; is (P, U, α, γ) bekend, dan bepaalt men eerst b en d.

Vraagstuk CLXIX.

In het vlak van een gegeven vierzij *abcd* een punt te bepalen, waarvan de projecties op de zijden de hoekpunten vormen van een parallelogram of van een pseudovierkant (vierhoek met twee gelijke en onderling loodrechte diagonalen.) (J. Neuberg.)

Opgelost *door* J. Neuberg *en* A. A. Nijland.

Meetkundige oplossing *van* J. Neuberg.

Zijn (a, b) en (c, d) twee gegeven hoeken (fig. 79) en A, B, C, D de projecties van een willekeurig punt P op de

beenen a, b, c, d dier hoeken, dan gelden de twee volgende stellingen:

1°. De meetkundige plaats van het punt P, waarvoor de lijnen AB en CD in bepaalden zin een gegeven hoek met elkaar maken, is een cirkel gaande door de hoekpunten K en L der hoeken.

2°. De meetkundige plaats van het punt P, waarvoor de segmenten AB en CD een gegeven verhouding tot elkaar hebben, is een cirkel, die al de cirkels door K en L loodrecht snijdt.

Zijn deze stellingen aangetoond, dan is de oplossing van het vraagstuk onmiddellijk aan te wijzen.

Bewijs van 1. Om de vierhoeken AKBP en CLDP kunnen cirkels beschreven worden. Hieruit volgt $\angle ABK = \angle APK$ en $\angle LCD = \angle LPD$. Trekken we nu eerst de beenen a, b, c, d door tot zij een vierhoek KMLN insluiten en dan uit M de lijnen E′ME en MF evenwijdig aan AB en CD, dan vinden we, als we onder hoek XYZ dien hoek verstaan, waarvan het been YX in den zin der wijzers van een uurwerk bewogen moet worden om door den hoek heen met YZ tot samenvalling te worden gebracht,

$$\begin{aligned} \angle LPK &= \angle LPD + \angle DPA + \angle APK, \\ &= \angle LMF + \pi - N + \angle E'MK, \\ &= M - \alpha + \pi - N, \end{aligned}$$

als α den hoek FME′ aanduidt. Dus is $\angle LPK$ standvastig met α en de meetkundige plaats van P een cirkel door K en L.

Bewijs van 2. Wijl KP en LP de middellijnen zijn van de om de driehoeken ABP en CDP beschreven cirkels, gelden de betrekkingen

$$AB = KP \operatorname{Sin} APB = KP \operatorname{Sin} K, \; CD = LP \operatorname{Sin} CPD = LP \operatorname{Sin} L.$$

Is AB : CD standvastig, dan is KP : LP dit dus ook, enz.

Wil men nu, dat ABCD een parallelogram zij, dan moet P een punt zijn gemeen aan de vier cirkels, die aan de voorwaarden

$$\text{hoek } (AB, CD) = \pi, \; \text{hoek } (BC, DA) = \pi, \; \frac{AB}{CD} = 1, \; \frac{BC}{DA} = 1$$

beantwoorden. En als ABCD een pseudovierkant moet zijn, is P een der beide snijpunten van de twee cirkels beantwoor-

dende aan de voorwaarden

$$\text{hoek (AC, BD)} = \frac{\pi}{2}, \ \frac{AC}{BD} = 1.$$

Stelkundige oplossing *van* A. A. NIJLAND [1]).

Inleiding. 1°. Zijn (x, y) de rechthoekige coördinaten van een punt P en stelt men

$$x + iy = z \quad , \quad x - iy = z',$$

dan heeft men

$$x = \frac{z + z'}{2} \quad , \quad y = i\frac{z' - z}{2}.$$

Men noemt z en z' de symmetrische coördinaten van P; van deze is z de voerstraal OP, z' de voerstraal OP′ van het symmetrische punt P′ van P ten opzichte van de x-as.

2°. Het vierkant van den afstand PQ van twee punten P, Q met de rechthoekige coördinaten (x, y), (x_1, y_1) en de symmetrische coördinaten (z, z'), (z_1, z'_1) is voorgesteld door

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (z - z_1)(z' - z'_1).$$

3°. De rechte, waarvan $x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Sin} \alpha - p = 0$ de normaalvergelijking van HESSE is, wordt in symmetrische coördinaten voorgesteld door

$$z(\operatorname{Cos} \alpha - i \operatorname{Sin} \alpha) + z'(\operatorname{Cos} \alpha + i \operatorname{Sin} \alpha) - 2p = 0.$$

Stelt men nu

$$\operatorname{Cos} \alpha - i \operatorname{Sin} \alpha = a, \ \operatorname{Cos} \alpha + i \operatorname{Sin} \alpha = a',$$

dan gaat deze vergelijking over in

$$az + a'z' - 2p = 0.$$

Hierbij gelden dan de betrekkingen

$$aa' = 1, \ \frac{a}{a'} = \frac{1 - i \operatorname{Tg} \alpha}{1 + i \operatorname{Tg} \alpha}, \ \operatorname{Tg} \alpha = i\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

4°. Zijn $az + a'z' - 2p = 0$, $bz + b'z' - 2q = 0$ twee gegeven rechten, dan vindt men voor den hoek V, dien zij met

[1]) Deze oplossing is door den heer NEUBERG geretoucheerd.

elkaar vormen

$$\mathrm{Tg}\, V = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha - \mathrm{Tg}\,\beta}{1 + \mathrm{Tg}\,\alpha\, \mathrm{Tg}\,\beta} = i\, \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Dus is $a = b$ de voorwaarde van evenwijdigheid en $a = \pm ib$ de voorwaarde van den loodrechten stand. Uit de eerste volgt ook $a' = b'$, uit de tweede ook $a' = \mp ib'$.

Dus stellen $az + a'z' - 2p = 0$ en $i(az - a'z') - 2q = 0$ twee loodrecht op elkaar staande rechten voor.

Oplossing. Zijn $a_i z + a_i' z' = 2p_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ de vergelijkingen der zijden a, b, c, d van den gegeven vierhoek en Z, Z′ de symmetrische coördinaten van P, dan zijn de loodlijnen van P op die zijden neergelaten door de vergelijkingen $a_i(z - Z) - a_i'(z' - Z') = 0$ voorgesteld en hebben de voetpunten dus de coördinaten

$$z_i = \frac{p_i}{a_i} + \frac{Z}{2} - \frac{a_i' Z'}{2a_i},\quad z_i' = \frac{p_i}{a'_i} + \frac{Z'}{2} - \frac{a_i Z}{2a'_i}.$$

Parallelogram. Hiervoor geldt de betrekking $z_2 - z_1 = z_3 - z_4$, die zich herleidt tot de beide vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} Z\,(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2) &= p_1 a_1 - p_2 a_2 + p_3 a_3 - p_4 a_4 \\ Z'\,(a'^2_1 - a'^2_2 + a'^3_3 - a'^2_4) &= p_1 a'_1 - p_2 a'_2 + p_3 a'_3 - p_4 a'_4 \end{aligned}\right\},$$

waaruit Z en Z′ geconstrueerd kunnen worden. Want a'_i en a zijn eenheidsvectoren op de loodlijnen uit O op de zijden en hun spiegelbeelden met betrekking tot de x-as, enz. Wijl we met eerstemachtsvergelijkingen te doen hebben, vinden we een enkel punt P.

Pseudovierkant. Hiervoor gelden de betrekkingen

$$\mathrm{mod.}\ (z_3 - z_1) = \mathrm{mod.}\ (z_4 - z_2),\quad \frac{z'_3 - z'_1}{z_3 - z_1} + \frac{z'_4 - z'_2}{z_4 - z_2} = 0,$$

waarvan de eerste door $(z_3 - z_1)(z'_3 - z'_1) = (z_4 - z_2)(z'_4 - z'_2)$ vervangen kan worden en uit beide dan weer

$$(z_3 - z_1)^2 + (z_4 - z_2)^2 = 0,\ (z'_3 - z'_1)^2 + (z'_4 - z'_2)^2 = 0$$

wordt afgeleid. Deze geven tweedemachtsvergelijkingen in Z en Z′, in verband hiermee, dat nu twee punten P gevonden worden.

Vraagstuk CLXX.

Van een driehoek hebben de zijden met betrekking tot een van twee onderling loodrechte assen de wortels der vergelijking $a_0t^3 + 3a_1t^2 + 3a_2t + a_3 = o$ tot richtings-coëfficiënten. Gevraagd de hoek van BROCARD van dien driehoek. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* A. A. NIJLAND.

Oplossing.

Zijn t_1, t_2, t_3 de richtings-coëfficiënten der drie zijden, dan is

$$\text{Tg A} = \frac{t_2 - t_3}{1 + t_2t_3}, \ \text{Tg B} = \frac{t_3 - t_1}{1 + t_3t_1}, \ \text{Tg C} = \frac{t_1 - t_2}{1 + t_1t_2}.$$

Dus vindt men met behulp van de bekende formule

$$\text{Cot } \omega = \text{Cot A} + \text{Cot B} + \text{Cot C},$$

die den hoek van BROCARD bepaalt, de vergelijking

$$\text{Cot } \omega = \frac{(1+t_2t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)+(1+t_3t_1)(t_1-t_2)(t_2-t_3)+(1+t_1t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)}{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)}.$$

Stelt men teller en noemer van de breuk rechts door T en N voor, dan is

$$\text{T} = \Sigma t_2t_3 - \Sigma t_1^2 + t_1t_2t_3\Sigma t_1 - \Sigma t_2^2t_3^2,$$

terwijl N^2 op een standvastigen factor na den discriminant der vergelijking aangeeft.

Nu is

$$\Sigma t_1 = -\frac{3a_1}{a_0}, \ \Sigma t_2t_3 = \frac{3a_2}{a_0}, \ t_1t_2t_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

en dus

$$\Sigma t_1^2 = 3\,\frac{3a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}, \ \Sigma t_2^2t_3^2 = 3\,\frac{3a_2^2 - 2a_1a_3}{a_0^2}.$$

Dit geeft

$$\text{T} = \frac{3a_2}{a_0} - 3\,\frac{3a_1^2 - a_0a_2}{a_0^2} + \frac{3a_1a_3}{a_0^2} - 3\,\frac{3a_2^2 - a_1a_3}{a_0^2},$$

of

$$\text{T} = \frac{9}{a_0^2}(a_0a_2 + a_1a_3 - a_1^2 - a_2^2).$$

Verder is (zie CLEBSCH's *Vorlesungen*, blz. 218—221)

$$N^2 = -\frac{27}{a_0^4}\{(a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2)\}.$$

Dus vinden we

$$\text{Cot}^2\,\omega = \frac{3\,[(a_0a_2 - a_1^2) + (a_1a_3 - a_2^2)]^2}{4\,(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2}.$$

AANMERKING. In no. 6 van Vraagstuk 136 worden de richtingscoëfficiënten der lijnen OM_1, OM_2, OM_3 bepaald door de vergelijking

$$9\lambda^4x_0t^3 - 9\lambda^2y_0t^2 - 9\lambda^2x_0t + y_0 = 0.$$

De hoek van BROCARD van een driehoek, waarvan de zijden evenwijdig zijn aan deze lijnen, kan dus nu gemakkelijk berekend worden. We hebben dan, als we deze vergelijking met die van het vraagstuk overeenbrengen,

$$a_0 = 9\lambda^4x_0,\ a_1 = -3\lambda^2y_0,\ a_2 = -3\lambda^2x_0,\ a_3 = y_0$$

en dus

$$a_0a_2 - a_1^2 = -9\lambda^4(3\lambda^2x_0^2 + y_0^2),\ a_0a_3 - a_1a_2 = 0,$$
$$a_1a_3 - a_2^2 = -3\lambda^2(3\lambda^2x_0^2 + y_0^2),$$

zoodat we vinden

$$\text{Cot}\,\omega' = \frac{1 + 3\lambda^2}{2\lambda}.$$

Nu is (zie de *Verhandelingen* van het vijfde Natuur- en Geneesk. Congres, Amsterdam, 1895 „Over de traagheidsassen van een driehoek")

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2F}{12\,S},\ 4\,S\,\text{Cot}\,\omega = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$F^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2 = 4\,S^2\,(\text{Cot}^2\,\omega - 3),$$

of

$$3\lambda = \text{Cot}\,\omega - \sqrt{\text{Cot}^2\,\omega - 3}$$

en dus

$$\text{Cot}\,\omega = \frac{1 + 3\lambda^2}{2\lambda}.$$

Derhalve komen we tot het besluit, dat een driehoek, waarvan de zijden evenwijdig zijn met OM_1, OM_2, OM_3 in hoek van BROCARD met driehoek ABC overeenkomt (T. J. A.).

Vraagstuk CLXXI.

Een veranderlijke parabool raakt de zijden van driehoek ABC in D, E, F. De lijnen AD, BE, CF snijden elkaar in een punt P. De lijnen door A, B, C evenwijdig aan BE, CF, AD snijden elkaar in een punt Q, die door A, B, C evenwijdig aan CF, AD, BE snijden elkaar in een punt R. Gevraagd de meetkundige plaats van de hoekpunten en de omhullenden der zijden van driehoek PQR.

(T. J. Allersma.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, W. Mantel, A. A. Nijland *en* N. Ch. Spijker.

Oplossingen.

I. Door evenwijdige projectie maken we van driehoek ABC een gelijkzijdigen driehoek; de ingeschreven parabolen blijven dan parabolen.

De raaklijnen eener parabool snijden twee van deze volgens gelijkvormige punteureeksen. Voor de stukken der raaklijnen in E en F, geldt dus steeds de betrekking CE : CA = BA : BF. Uit deze door E en F doorloopen puntenreeksen volgt nu B (CEA∞) = C (BAF∞) = C (∞FAB). Dus kunnen we ons voorstellen, dat de stralen BE en CF van de beginstanden BA en CA uit met gelijke snelheden om B en C draaien. Door hieraan de draaiing van AD om A toe te voegen blijkt gemakkelijk, dat AD, BE, CF elkaar snijden in een punt P van den omgeschreven cirkel van driehoek ABC. Verder blijkt dan, dat de lijnendrietallen door A, B, C evenwijdig aan BE, CF, AD en aan CF, AD, BE ook te beschouwen zijn als stralen, die met gelijke snelheden om A, B, C draaien, en Q en R denzelfden cirkel doorloopen; bovendien volgt dan nog uit de evenwijdigheid van AQ en BP en die van AR en CP, dat driehoek PQR eveneens gelijkzijdig is. De driehoek PQR heeft dus met ABC niet alleen den omgeschreven maar ook den ingeschreven cirkel gemeen. Dus omhullen de zijden van driehoek PQR den ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

Bij den gegeven driehoek ABC worden de gevonden cirkels vervangen door de ellips van Steiner en een ellips gelijkvormig, gelijkstandig en gelijkmiddelpuntig met deze van de halve afmeting (W. M.).

II. We bedienen ons van barycentrische puntcoördinaten (α, β, γ) en van daarmee overeenkomende lijncoördinaten (u, v, w) ten opzichte van ABC als coördinatendriehoek. De lijn in het oneindige heeft dan de vergelijking $\alpha + \beta + \gamma = 0$ en de coördinaten $u = v = w$.

De ingeschreven kegelsnee $\frac{1}{lu} + \frac{1}{mv} + \frac{1}{nw} = 0$ is een parabool onder de voorwaarde $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 0$. De coördinaten van het punt van GERGONNE P van deze parabool zijn dus (l, m, n). Dus doorloopt het blijkens de gevonden voorwaarde de ellips van STEINER $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$.

De vergelijking van BE is $n\alpha - l\gamma = 0$. Dus is

$$n\alpha - l\gamma - k(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

een willekeurige lijn evenwijdig aan BE. Deze gaat door A, als k de waarde n heeft. Dus is $(l + n)\gamma + n\beta = 0$ of in verband met de gevonden voorwaarde $\frac{\beta}{l} = \frac{\gamma}{m}$ de vergelijking van AQ en vindt men (n, l, m) voor de coördinaten van Q en langs denzelfden weg (m, n, l) voor de coördinaten van R. Derhalve bewegen deze punten zich eveneens op de ellips van STEINER.

Voor de vergelijking van QR, RP, PQ vindt men achtereenvolgens

$$\left.\begin{array}{l} (l^2 - mn)\,\alpha + (m^2 - nl)\,\beta + (n^2 - lm)\,\gamma = 0 \\ (m^2 - nl)\,\alpha + (n^2 - lm)\,\beta + (l^2 - nm)\,\gamma = 0 \\ (n^2 - lm)\,\alpha + (l^2 - mn)\,\beta + (m^2 - nl)\,\gamma = 0 \end{array}\right\},$$

of in verband met de gevonden betrekking tusschen l, m, n

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,\ m\alpha + n\beta + l\gamma = 0,\ n\alpha + l\beta + m\gamma = 0.$$

De coördinaten dezer lijnen zijn dus (l, m, n), (m, n, l), (n, l, m). Zij raken dus alle de kegelsnee $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$, d. i. de in driehoek ABC beschreven ellips, die het zwaartepunt van den driehoek tot middelpunt heeft (N. Ch. S.).

Vraagstuk CLXXII.

Hoeveel vlakken door een willekeurig punt P snijden een gegeven drievlakshoek volgens een gelijkzijdigen driehoek? En hoe construeert men deze, als de drievlakshoek gelijkbeenig is?

(T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* A. A. NIJLAND.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

I. Zij O het hoekpunt van den drievlakshoek OXYZ, driehoek ABC een gelijkzijdige doorsnede. Stellen wij

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c,$$

$$\angle YOZ = \alpha,\ \angle ZOX = \beta,\ \angle XOY = \gamma,\ BC = CA = AB = x,$$

dan is

$$b^2+c^2-2bc \operatorname{Cos}\alpha = c^2+a^2-2ca \operatorname{Cos}\beta = a^2+b^2-2ab \operatorname{Cos}\gamma = x^2 \quad \ldots \quad 1).$$

Hieruit volgt

$$b^2 - c^2 = 2a\,(b \operatorname{Cos}\gamma - c \operatorname{Cos}\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

en verder door eliminatie van a

$$b^4(1-4\operatorname{Cos}^2\gamma)+4b^3c\operatorname{Cos}\gamma(\operatorname{Cos}\beta+2\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\gamma)-2b^2c^2(1+8\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Cos}\gamma)$$
$$+4bc^3\operatorname{Cos}\beta\,(\operatorname{Cos}\gamma+2\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta)+c^4(1-4\operatorname{Cos}^2\beta)=0 \quad \ldots \quad 3).$$

Met iedere waarde van c komen dus vier waarden van b en volgens 2) ook vier waarden van a overeen; daar verder deze waarden allen of voor een deel bestaanbaar kunnen zijn, blijkt hieruit dat er hoogstens 4 stelsels van evenwijdige vlakken bestaan, die een willekeurigen drievlakshoek volgens een gelijkzijdigen driehoek snijden. Dus kunnen door elk willekeurig punt P *hoogstens vier vlakken* gaan, die een willekeurigen drievlakshoek volgens een *gelijkzijdigen driehoek* snijden.

II. Is de drievlakshoek gelijkbeenig b.v. $\beta = \gamma$, dan verandert 3) in

$$(b-c)^2\,\{b^2(1-4\operatorname{Cos}^2\beta)+2bc(1-2\operatorname{Cos}^2\beta+4\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}^2\beta)+c^2(1-4\operatorname{Cos}^2\beta)\}=0,$$

wat zich splitst in

$$b = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

en

$$b^2(1-4\operatorname{Cos}^2\beta)+2bc(1-2\operatorname{Cos}^2\beta+4\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}^2\beta)+c^2(1-4\operatorname{Cos}^2\beta)=0 \quad \ldots \quad 5).$$

Elk dezer vergelijkingen geeft aanleiding tot een constructie. Wij leggen daarbij de drie zijden van den drievlakshoek naast elkander in één plat vlak met de zijde YOZ in het midden. De ribbe OX wordt twee keer neergeslagen (OX′ en OX″), zoodat ZOX′ en YOX″ de neergeslagen zijden ZOX en YOX zijn.

1. Met $b = c$ komen volgens 1) twee waarden van a overeen, die als volgt *geconstrueerd* worden. Zet op OY en OZ (fig. 80) gelijke stukken $OB = OC = b$ af, zoodat er een gelijkbeenige driehoek ontstaat; beschrijf uit B en C met BC als straal cirkels, die OX″ in A_1'' en A_2'', OX′ in A_1' en A_2' snijden. Worden nu de neergeslagen zijden in hun oorspronkelijken stand teruggebracht, dan verkrijgen wij twee gelijkzijdige driehoeken A_1BC en A_2BC tot doorsneden.

2. Hoewel 5) rechtstreeks niet ongeschikt is voor constructie, vinden wij toch een eenvoudiger vergelijking op de volgende wijze. Voor $\beta = \gamma$ volgt uit 2), 5), 1)

$$b+c=2a\,\mathrm{Cos}\beta,\quad bc(1+2\,\mathrm{Cos}\,\alpha)=a^2(4\,\mathrm{Cos}^2\beta-1),\quad x^2=a^2\frac{\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Cos}2\beta}{\frac{1}{2}+\mathrm{Cos}\,\alpha}.$$

Zetten wij nu op OX′ (fig. 81) een willekeurig stuk $OA' = a$ af, trekken wij uit A′ een lijn A′K loodrecht op OZ, welke OZ in K en de lijn, die $\angle$ YOZ middendoordeelt, in M snijdt, dan liggen de hoekpunten B_1, B_2, C_1, C_2 van twee gelijkzijdige doorsneden AB_1C_1 en AB_2C_2 op een cirkel, die M tot middelpunt heeft. Is r de straal van dien cirkel, dan is verder

$$OM^2 - r^2 = OC_1 \,.\, OC_2,\quad OM\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = a\,\mathrm{Cos}\,\beta = OK,$$

$$OC_1 = a\,\mathrm{Cos}\,\beta - y,\quad OC_2 = a\,\mathrm{Cos}\,\beta + y,\quad y^2 = x^2 - a^2\,\mathrm{Sin}^2\,\beta,$$

waaruit volgt

$$r^2 = \frac{a^2\,(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,2\,\beta)}{(1+\mathrm{Cos}\,\alpha)\,(1+2\mathrm{Cos}\,\alpha)} = \frac{x^2}{4\,\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}$$

d. i.

$$x = 2r\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha,\ \text{of}\ x : r = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha : 1 = 2OK : OM \ldots\ 6).$$

Zetten wij nu op OM aan weerszijden van O de stukken $OL = OL_1 = 2OK$ af, trekken wij A′L en $A'L_1$, daarna OQ en OQ_1 evenwijdig aan A′L en $A'L_1$ (welke A′M in Q en Q_1 snijden), beschrijven wij op QQ_1 als middellijn een cirkel, dan zal deze de lijn OZ in C_1 en C_2 snijden. De cirkel uit

M met MC_1 als straal beschreven snijdt verder OY in B_2 en B_1, waarvan $OB_2 = OC_1$, $OB_1 = OC_2$ is. Nemen wij eindelijk op OX″ het stuk $OA'' = OA'$ en trekken wij de gebrokene lijnen $A''B_1C_1A'$, $A''B_2C_2A'$, dan zijn deze de neergeslagen zijden van twee gelijkzijdige driehoeken AB_1C_1 en AB_2C_2.

Bewijs. Volgens de constructie is

$$QA' : QM = Q_1A' : Q_1M = 2OK : OM.$$

Dus is cirkel QQ_1 de meetkundige plaats van alle punten, waarvan de afstanden tot A′ en M zich verhouden als $2OK : OM$, zoodat we ook vinden

$$C_1A' : C_1M = 2OK : OM$$

en in verband met 6) dus

$$C_1A' = x.$$

Wil men nu de vlakken construeeren, die door P gaan en den drievlakshoek volgens een gelijkzijdigen driehoek snijden, dan behoeft men slechts door dit punt vlakken te brengen, evenwijdig aan de sub II gevondene, wat naar de bekende regels der beschrijvende meetkunde gemakkelijk is uit te voeren, als men daarbij de vlakken YOZ en MOX tot projectievlakken aanneemt.

Uit 1) en 4) volgt, dat de driehoeken A_1BC en A_2BC mogelijk zijn onder de voorwaarde $2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha > \operatorname{Sin} \beta$.

Evenzoo volgt uit 5), dat de driehoeken AB_1C_1 en AB_2C_2 mogelijk zijn, indien

$$1 + 2 \operatorname{Cos} \alpha \gtrless 0 \text{ en } \operatorname{Cos} 2\beta \lessgtr \frac{2 \operatorname{Cos} \alpha - 1}{3 - 2 \operatorname{Cos} \alpha}$$

is, waarbij te gelijk òf de bovenste òf de onderste teekens gelden.

Vraagstuk CLXXIII.

Een veranderlijke cirkel raakt een gegeven parabool in A en snijdt haar in B en C. Gevraagd de meetkundige plaats van eenige merkwaardige punten en de omhullende van de zijden en eenige merkwaardige lijnen van driehoek ABC, als de inhoud ABC standvastig blijft. (T. J. ALLERSMA.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

We stellen het raakpunt A en de beide snijpunten B, C achtereenvolgens door $\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$, $\left(\frac{y_3^2}{2p}, y_3\right)$ voor. Wijl BC antiparallel is met de raaklijn in A ten opzichte van de as der parabool, dat is ten opzichte van de coördinaatassen, is

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1).$$

Verder is

$$\begin{vmatrix} y_1^2, & y_1, & 1 \\ y_2^2, & y_2, & 1 \\ y_3^2, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 2a^2p,$$

of

$$(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + 2a^2p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

de voorwaarde, die uitdrukt, dat driehoek ABC den standvastigen inhoud $\frac{1}{2}a^2$ heeft.

In verband met 1) stellen we

$$y_2 = -y_1 + z \quad , \quad y_3 = -y_1 - z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3).$$

Invoeging hiervan in 2) geeft dan

$$z(z^2 - 4y_1^2) = a^2p \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4).$$

Nemen we de hulpgrootheid z willekeurig aan, dan vinden we y_1 uit 4) en daarna y_2 en y_3 uit 3). Wijl uit 4) twee waarden van y_1 volgen, komt dus met elke waarde van z een tweetal driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ overeen. Gemakkelijk blijkt verder, dat $A_1B_1C_1$ en niet $A_2B_2C_2$ maar $A_2C_2B_2$ elkaars spiegelbeelden zijn met betrekking tot de as der parabool.

Zoo als bekend is, wordt aan den inhoud van driehoek ABC een verschillend teeken toegekend, naarmate men bij het doorloopen van den omtrek ABC zich in den zin van de wijzers van een uurwerk beweegt of niet. Let men alleen op de volstrekte grootte, dan moet $\frac{1}{2}a^2$ met het teeken $\pm$ worden aangedaan. We merken nu echter op, dat omkeering van het teeken van den inhoud gepaard met een omkeering van het teeken van z eenvoudig een verwisseling van B en C ten gevolge heeft. Dit nu voert ons met betrekking tot de gevraagde omhullenden en meetkundige plaatsen tot het onderscheiden van twee gevallen. Is het bij het elimineeren van y_1, y_2, y_3, z

uit de drie vergelijkingen 3), 4) en de twee vergelijkingen, die een omhullende of een meetkundige plaats bepalen, noodzakelijk 4) in het kwadraat te brengen, dan zijn de gevallen $z(z^2 - 4y_1^2) = a^2p$ en $z(z^2 - 4y_1^2) = -a^2p$ niet uit elkaar te houden en bestaat de totale omhullende of meetkundige plaats uit een enkele kromme, van welke de x-as as van symmetrie is. Kan de eliminatie geschieden zonder 4) in het kwadraat te brengen, dan bestaat het resultaat uit twee verschillende krommen, die ieder voor zich door een vergelijking worden voorgesteld en waarvan de eene door de linksdraaiende, de andere door de rechtsdraaiende driehoeken ABC wordt opgeleverd; deze krommen zijn dan elkaars spiegelbeelden met betrekking tot de x-as.

Omhullende van BC. De vergelijking van BC is

$$\frac{2px - y_2^2}{y_3^2 - y_2^2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}$$

of na vereenvoudiging $2px - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0$ of $2px + 2y_1y + y_1^2 - z^2 = 0$. Dus zijn de coördinaten u, v van deze lijn, zoo als blijkt door bovenstaande vergelijking met $ux + vy + 1 = 0$ overeen te brengen,

$$u = \frac{2p}{y_1^2 - z^2}, \quad v = \frac{2y_1}{y_1^2 - z^2}.$$

Hieruit volgt

$$y_1 = \frac{pv}{u}, \quad z^2 = \frac{p^2v^2 - 2pu}{u^2}.$$

Wijl we 4) kwadrateeren moeten, vinden we dus een enkele kromme met de vergelijking

$$p(pv^2 - 2u)(3pv^2 + 2u)^2 - a^4u^6 = 0.$$

De omhullende van BC is dus een kromme van de zesde klasse. Wijl de termen van den laagsten graad derdegraadstermen zijn, is l_∞ drievoudige raaklijn; de drie raakpunten vallen samen met het oneindig ver gelegen punt der x-as. Nabij dit punt is de kromme te vergelijken met de drie parabolen begrepen in de vergelijking $(pv^2 - 2u)(3pv^2 + 2u)^2 = 0$, waarvan er twee met elkaar samenvallen. De zes raaklijnen uit O worden, zoo als uit het dualistisch omkeeren van de bij het zoeken naar de asymptoten gebruikte methode volgt, door

$9p^4v^6 - a^4u^6 = 0$ voorgesteld; van deze zijn er dus twee bestaanbaar.

[Door de vergelijkingen $2px + 2y_1y + y_1^2 - z^2 = 0$ en 4) naar y_1 te differentieeren, waarbij z als functie van y_1 moet worden beschouwd, en daarna $\frac{dz}{dy_1}$ te elimineeren vindt men $3z^2 - 8pxz - 8y_1yz - a^2p = 0$. Blijkens het resultaat van de eliminatie van y_1 en z tusschen deze nieuwe vergelijking en de beide, die we differentieerden, is de omhullende van BC een kromme van den achttienden graad].

Omhullenden van CA en AB. De vergelijking van CA is $2px - (y_3 + y_1)\,y + y_3y_1 = 0$ of $2px + zy - y_1\,(y_1 + z) = 0$. Hieruit volgt

$$u = -\frac{2p}{y_1\,(y_1 + z)},\quad v = -\frac{z}{y_1\,(y_1 + z)}$$

en dus

$$z = \frac{2pv}{u},\ y_1^2 + \frac{2pv}{u}\,y_1 + \frac{2p}{u} = 0.$$

Door eliminatie van z en y_1 uit deze vergelijkingen en 4) vinden we

$$4p^2\,(p^2v^3 - a^2u^3)\,v^3 = (p^2v^3 - a^2u^3 + 2pv^2)^2.$$

Dus is de omhullende van CA een kromme van de zesde klasse, die l_∞ tot viervoudige raaklijn heeft. Van de raaklijnen uit O zijn er weer twee bestaanbaar.

Door het teeken van a^2 om te keeren vindt men de omhullende van AB.

In verband met het feit, dat het bij de eliminatie niet noodig is de vergelijking 4) in het kwadraat te brengen, vinden we voor CA en AB op zich zelf staande omhullenden symmetrisch van elkaar ten opzichte van de x-as.

[Door de vergelijkingen $2px + zy - y_1\,(y_1 + z) = 0$ en 4) als boven te differenteeren enz. vinden we, dat elk der omhullenden van CA en AB van de achtste klasse is].

Omhullende van de loodlijn h_a uit A op BC neergelaten De vergelijking der loodlijn h_a is $4p^2(y - y_1) + (2px - y_1^2)(y_2 + y_3) = 0$ of $-\,2py_1x + 2p^2y + y_1^3 - 2p^2y_1 = 0$. Dus is

$$\frac{u}{-2py_1} = \frac{v}{2p^2} = \frac{1}{y_1(y_1^2 - 2p^2)}.$$

Hieruit blijkt, dat h_a een rationale kromme van de derde klasse omhult. Deze kromme $pu(2v^2 - u^2) - 2v^2 = 0$ heeft de lijn l_∞ tot buigraaklijn en het oneindig verre punt der y-as tot buigpunt; zij moet dus ook van den derden graad zijn. Werkelijk geeft eliminatie van y_1 uit de vergelijking van h_a en haar differentiaalquotient naar y_1 de uitkomst $27py^2 - 8(x+p)^3 = 0$. Hieruit blijkt, dat de kromme congruent is met de ontwondene der parabool en door een verschuiving over een afstand $2p$ in de richting der x-as met deze ontwondene samenvalt.

Merkwaardig is, dat de gevonden omhullende niet afhangt van de voor den inhoud van driehoek ABC aangenomen waarde; in verband hiermee geven de links- en rechtsdraaiende driehoeken hier dezelfde kromme.

Het zoeken naar een meetkundige verklaring van deze eigenschap brengt ons tevens tot een meetkundige afleiding der bedoelde omhullende.

Elke cirkel, die de parabool in een gegeven punt A (fig. 82) aanraakt, snijdt deze kromme zoo als bekend is, verder in twee punten B en C, waarvan de verbindingslijn antiparallel is met de raaklijn in A ten opzichte van de as. Dus is de bij A behoorende loodlijn AE op BC evenwijdig aan de normaal der parabool in het symmetrisch met A gelegen punt A′. Wijl nu de subnormaal DE′ $= \frac{1}{2}p$ en dus EE′ $= p$ is, valt de lijn h_a door verschuiving over een afstand p in de richting van de as met de normaal in A′ samen.

Omhullenden van h_b en h_c. De vergelijking van h_b is

$$4p^2(y - y_2) + (2px - y_2^2)(y_3 + y_1) = 0$$

of

$$4p^2(y + y_1 - z) - z\{2px - (y_1 - z)^2\} = 0,$$

d. i.

$$z^3 - 2z^2y_1 + z(y_1^2 - 2px - 4p^2) + 4p^2(y + y_1) = 0.$$

Hieruit volgt

$$u = \frac{-2pz}{z^3 - 2z^2y_1 + z(y_1^2 - 4p^2) + 4p^2y_1}, \quad v = \frac{4p^2}{z^3 - 2z^2y_1 + z(y_1^2 - 4p^2) + 4p^2y_1}.$$

We vinden dus

$$z = -\frac{2pu}{v}, \quad y_1^2 + \frac{2p}{uv}(u^2 - v^2)\,y_1 - \frac{4p^2}{v^2}(u^2 - v^2) = 0$$

en door eliminatie met behulp van 4)

$$u\,(40p^2u^3-32p^2uv^2+16pv^2-a^2v^3)^2+32p^2\,(2u^2-v^2)^2\,(a^2v^3-8p^2u^3)=0,$$

een kromme van de zevende klasse. Door omkeering van het teeken van a^2 vinden we de vergelijking der omhullende van h_c.

Beide krommen, die weer elkaars spiegelbeelden zijn met betrekking tot de as der parabool, hebben l_∞ tot vijfvoudige raaklijn, enz.

Meetkundige plaats van het zwaartepunt Z. We vinden

$$x=\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{6p},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

d. i.

$$x=\frac{3y_1^2+2z^2}{6p},\ y=-\frac{y_1}{3}.$$

Invoeging van $y_1=-3y$, $z^2=3px-\frac{27}{2}y^2$ in de in het kwadraat gebrachte vergelijking 4) geeft dus

$$27\,(33y^2-2px)^2\,(9y^2-2px)+8p^2a^4=0$$

d. i. een enkele kromme van den zesden graad. Deze kromme gedraagt zich in het oneindige als de vereeniging van de parabool $9y^2-2px=0$ met de dubbelgetelde parabool $33y^2-3px=0$.

Meetkundige plaats van het hoogtepunt H. We beschouwen het hoogtepunt als het snijpunt der loodlijnen h_b, h_c met de vergelijkingen

$$4p^2\,(y+y_1-z)-z\,\{2px-(y_1-z)^2\}=0,$$
$$4p^2\,(y+y_1+z)+z\,\{2px-(y_1+z)^2\}=0$$

en vinden hieruit

$$2p^2\,(y+y_1)-y_1z^2=0,\ 4p^2+2px-y_1^2-z^2=0$$

en dus in verband met de in het vierkant gebrachte vergelijking 4), als $2p+x$ door x' vervangen wordt,

$$\left.\begin{array}{l} z^6-2p\,(x'+2p)\,z^4+4p^3\,(2x'+p)\,z^2+4p^4\,(y^2-2px)=0 \\ 25z^6-80px'z^4+64p^2x'^2z^2-a^4p^2=0 \end{array}\right\}.$$

Door eliminatie van z^2 vindt men voor de vergelijking der meetkundige plaats met weglating van het accent bij de x

$$\begin{vmatrix} 1, & -2p(x+2p), & 4p^3(2x+p), & 4p^4(y^2-2px), & 0 & , & 0 \\ 0, & 1 & , -2p(x+2p), & 4p^3(2x+p), & -4p^4(y^2 2px, & 0 \\ 0, & 0 & , & 1 & , -2p(x+2p), & 4p^3(2x+p), & 4p^4(y^2-2px) \\ 25, & -80px & , & 64p^2x^2 & , & -a^4p^2 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & 25 & , & -80px & , & 64p^2x^2 & , & -a^4p^2, & , & 0 \\ 0, & 0 & , & 25 & , & -80px & , & 64p^2x^2 & , & -a^4p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dus is de kromme, die we zoeken, van den achtsten graad, zoo als blijkt uit den term $a_1 b_2 c_4 d_5 e_6 f_3$.

Meetkundige plaats van het middelpunt O des omgeschreven cirkels. De vergelijking der raaklijn in A is $2yy_1 - 2px - y^2{}_1 = 0$. Dus kan elke kegelsnee, die de parabool in A raakt en door B en C gaat, door de vergelijking

$$(2yy_1 - 2px - y_1^2)(2yy_1 + 2px + y_1^2 - z^2) + k(y^2 - 2px) = 0$$

worden voorgesteld. Voor $4y_1^2 + k = -4p^2$ of $k = -4(p^2 + y_1^2)$ wordt dit de omgeschreven cirkel

$$-4p^2(x^2+y^2) + 2(2y_1^2 + 4p^2 + z^2)px - 2y_1z^2y - y_1^2(y_1^2 - z^2) = 0,$$

waarvan het middelpunt bepaald wordt door de vergelijkingen

$$-4px + 2y_1^2 + 4p^2 + z^2 = 0,\ 4p^2y + y_1z^2 = 0.$$

In verband met 4) vindt men nu, als $x - p$ door x' vervangen wordt,

$$z^6 - 4pxz^4 + 32p^4y^2 = 0,$$
$$9z^6 - 48pxz^4 + 64p^2x^2z^2 - a^4p^2 = 0,$$

wat langs den aangegeven weg eveneens tot een vergelijking van den achtsten graad voert.

Meetkundige plaats van het middelpunt N van den negenpuntscirkels. We vonden voor de coördinaten van H en O

$$H \dots \begin{cases} x = \dfrac{y_1^2 - 4p^2 + z^2}{2p} \\ y = \dfrac{(z^2 - 2p^2)y_1}{2p^2} \end{cases},\quad O \dots \begin{cases} x = \dfrac{2y_1^2 + 4p^2 + z^2}{4p} \\ y = -\dfrac{z^2y_1}{4p^2} \end{cases}.$$

Wijl N midden tusschen H en O in ligt, zijn de coördinaten van N dus

$$x = \frac{4y_1^2 - 4p^2 + 3z^2}{8p}, \quad y = \frac{y_1(z^2 - 4p^2)}{8p^2}.$$

Door uit deze beide vergelijkingen en 4) weer y_1 en z te elimineeren vindt men, dat de meetkundige plaats van N een kromme van den achtsten graad is.

Vraagstuk CLXXIV.

Van twee kwadratische oppervlakken is het aan beiden omgeschreven ontwikkelbaar oppervlak geconstrueerd. De keerkromme van dit oppervlak wordt uit een hoekpunt A van het gemeenschappelijk poolviervlak op een willekeurig vlak φ, dat A niet bevat, geprojecteerd. Te bewijzen, dat deze projectie een kromme van den zesden graad is met drie dubbelraaklijnen en elke dubbelraaklijn raaklijn is in twee door haar verbonden keerpunten.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL.

Oplossing.

Zooals bekend is, heeft de doorsnee van twee kwadratische oppervlakken de volgende kenmerken (vergelijk SALMON-FIEDLER *Analytische Geometrie des Raumes*, II, p. 133, FIEDLER *Darstellende Geometrie*, II, p. 142):

graad (aantal snijpunten met een gegeven vlak) . , ... 4
klasse (aantal kromtevlakken door een gegeven punt) . . . 12
rang (aantal raaklijnen rustende op een gegeven rechte
= graad van het ontwikkelbaar oppervlak der raaklijnen) . . 8
aantal stationaire vlakken (door vier opvolgende punten) . . 16
aantal stationaire punten (in vier opvolgende raakvlakken) . . 0
aantal der door een punt gaande „vlakken door twee lijnen"
= klasse van het ontwikkelbaar oppervak der dubbelraakvlakken 8
aantal der in een vlak gelegen „punten in twee lijnen"
= graad der dubbelkromme van het oppervlak der raaklijnen 16
aantal der in een vlak gelegen „lijnen in twee vlakken"
(snijlijnen van twee opvolgende kromtevlakken) 38
aantal der door een punt gaande „lijnen door twee punten"
(koorden) 2

Hieraan moet worden toegevoegd, dat het oppervlak F^8 der raaklijnen door ieder der zijvlakken van het gemeenschappelijk poolviervlak ABCD volgens een dubbelkromme van den vierden graad gesneden wordt, wijl uit de harmonische eigenschappen van pool en poolvlak volgt, dat ieder punt van F^8 in zulk een zijvlak een punt in twee lijnen is. Deze vier krommen vormen gezamenlijk de dubbelkromme van F^8. Verder bestaat het ontwikkelbaar oppervlak der dubbelraakvlakken uit vier kwadratische kegels met de hoekpunten van het poolviervlak tot toppen.

Keeren we het bovenstaande dualistisch om, dan vinden we, dat het ontwikkelbare oppervlak $F_1{}^8$, omgeschreven aan twee kwadratische oppervlakken, de volgende kenmerken bezit:

klasse (aantal raakvlakken door een gegeven punt) 4
graad der keerkromme 12
graad van het oppervlak 8
aantal keerpunten der keerkromme 16
aantal stationaire vlakken der keerkromme 0
graad der dubbelkromme 8
klasse van het ontwikkelbaar oppervlak der dubbelraakvlakken aan de keerkromme 16
aantal der door een punt gaande koorden der keerkromme . . . 38
aantal der in een vlak liggende snijlijnen van twee kromtevlakken 2

Hier bestaat de dubbelkromme uit vier kegelsneden gelegen in de zijvlakken van het poolviervlak, terwijl het ontwikkelbaar oppervlak der dubbelraakvlakken aan de keerkromme zich splitst in vier kegels van de vierde klasse, die de hoekpunten van het poolviervlak tot toppen hebben.

Uit de harmonische eigenschappen van pool en poolvlak volgt nu onmiddellijk, dat elke lijn uit A naar een punt P der keerkromme tevens het punt P′ bevat, dat door A en het tegenoverliggende zijvlak α van het poolviervlak harmonisch gescheiden is van P. Dus wordt de keerkromme uit A op een willekeurig vlak ϕ geprojecteerd door een kegel van den zesden graad, en moet de centrale projectie der keerkromme uit A dus een kromme C^6 van den zesden graad zijn. Dit kegelvlak van den zesden graad valt echter samen met den boven aangewezen kegel van de vierde klasse, die deel uitmaakt van het door de dubbelraakvlakken omhulde ontwikkelbaar oppervlak. Want het raakvlak aan den kegel van den

zesden graad langs APP′ bevat de raaklijnen in P en P′ aan de keerkromme en is dus werkelijk dubbelraakvlak aan de keerkromme.

Onderzoeken we nu of de kegel K_4^6 ook dubbelraakvlakken heeft. Zij β een der door A gaande zijvlakken van het poolviervlak. Volgens het bovenstaande bevat dit vlak een kegelsnee C^2, die deel uitmaakt van de dubbelkromme van het oppervlak F_1^8. Daar het oppervlak van den achtsten graad is, zoo moet er nog een doorsnee van den vierden graad in β overblijven. Deze kan op de volgende wijze gevonden worden:

Laat de kegelsnee in het mede door A gaande zijvlak γ van het poolviervlak de ribbe AD in de punten D_1 en D_2 snijden, dan behooren de raaklijnen t_1, t_2, t_3, t_4 uit D_1 en D_2 aan C^2 getrokken tot de beschrijvende rechten van F_1^8; de raakpunten T_1, T_2, T_3, T_4 kunnen dan beschouwd worden als punten van samenkomst met een tweede beschrijvende rechte van F_1^8. Deze raaklijnen zijn echter de eenige beschrijvende rechten t van F_1^8, die in β gelegen zijn, daar zij met elkander de ontaarde kromme van den vierden graad vormen; zij moeten dus ook gaan door de snijpunten van de in α en δ gelegen en tot de dubbelkromme behoorende kegelsneden met het zijvlak β, waaruit volgt dat ACD de diagonalendriehoek is van de vierzij $t_1t_2t_3t_4$. Daar nu β een vlak is door A gaande en dat vier beschrijvende rechten van F_1^8 bevat, terwijl de andere raakvlakken uit A aan de keerkromme gebracht er slechts twee bevatten, zoo is β een dubbelraakvlak van den kegel K_4^6. Hetzelfde geldt van de andere zijvlakken γ en δ. De kegel K_4^6 heeft dus drie dubbelraakvlakken en de geprojecteerde kromme C^6 drie dubbelraaklijnen. Daar de graad van C^6 zes is en de klasse vier, zoo kunnen er niet meer dan drie dubbelraaklijnen zijn.

Thans kunnen de keerpunten der keerkromme van F_1^8 worden opgespoord. Men onderstelle een raaklijn t' aan de in β gelegen dubbelkegelsnee C^2 getrokken; uit het snijpunt M van t' met AD kan men twee raaklijnen trekken aan de in γ gelegen dubbelkegelsnee. Elk dezer raaklijnen bepaalt met t' een vlak en in elk dezer vlakken ligt een beschrijvende rechte (l_1 en l_2) van F_1^8; terwijl het vlak l_1 l_2 door het tegenover β liggende hoekpunt B gaat en het snijpunt van l_1 en l_2 ligt op de dubbelkegelsnee C^2. Gaat nu t' over in een der boven-

genoemde raaklijnen t_1, t_2, t_3, t_4, dan vallen de twee oorspronkelijk verschillende vlakken samen, dus ook de beide rechten l_1 en l_2, die in een vlak door B liggen; daar het beschrijvende rechten van $F_1{}^8$ zijn en elkander in een punt van C^2 ontmoeten, zoo gaan l_1 en l_2 over in een der raaklijnen t_1, t_2, t_3, t_4.

Daar verder de tweetallen van vlakken door raaklijnen aan C^2 ontstaan, zoo kan elk punt van C^2 beschouwd worden als snijpunt van twee paren vlakken, waarbij twee vlakken van elk paar zijn samengevallen. In de raakpunten T_1, T_2, T_3, T_4 komen alzoo vier beschrijvende vlakken van $F_1{}^8$ samen; deze punten zijn dus keerpunten der keerkromme. Hetzelfde geldt van elk der zijvlakken α, β, γ, δ.

Vat men nu het bovenstaande samen, dan vindt men: De raaklijnen in de kegelsnee in α worden uit A geprojecteerd door vlakken, die tevens raakvlakken van $K_4{}^6$ zijn en wel, daar de keerraaklijn in het raakvlak ligt, door vlakken die geen bijzondere doorsnede met het vlak ϕ geven.

Anders is het met de keerpunten in β. Deze punten (T_1, T_2, T_3, T_4) zijn de raakpunten van een kegelsnee met een daaraan omgeschreven vierzij; hun verbindingslijnen twee aan twee gaan dus door de diagonaalpunten van de vierzij. Daar nu A een dezer diagonaalpunten is, zoo gaan er twee stralen door A, die ieder twee keerpunten projecteeren en in β liggen; deze geven dus als doorsnijding met het vlak ϕ twee keerpunten, die de snijlijn van β met ϕ tot gemeenschappelijke raaklijn hebben. Dit is een der in de opgave bedoelde gemeenschappelijke raaklijnen. De twee andere vindt men door ten opzichte van de vlakken γ en δ dezelfde constructie uit te voeren.

Vraagstuk CLXXV.

Men legt een kwadratisch oppervlak F^2 door de enkelvoudige rechte l van een kubisch regelvlak F^3 en construeert de vlakken, gaande door de rechten van F^3 en F^2, die in een zelfde punt van l samenkomen; het aldus opstaande ontwikkelbare oppervlak snijdt men door een raakvlak van F^2. Te bewijzen, dat de verkregen snijkromme van den zesden graad is en een drievoudige raaklijn bezit. (J. CARDINAAL).

Opgelost *door* J. CARDINAAL.

Oplossing.

Het kubisch regelvlak is van den derden graad en de derde klasse; hieruit volgt, dat het ontwikkelbaar oppervlak F omgeschreven aan F^2 en F^3 in het algemeen van de zesde klasse is. De oppervlakken F^2 en F^3 hebben echter de rechte l gemeen en alle vlakken door l zijn dubbelraakvlakken van F^3 en enkelvoudige raakvlakken van F^2; construeert men dus door een punt P van de ruimte de raakvlakken aan F, dan gaat er altijd een door l, hetwelk dubbel telt, en dus blijven er nog vier raakvlakken aan F over. Dus is F een ontwikkelbaar oppervlak van de vierde klasse. Dit oppervlak F nu is het in het vraagstuk omschrevene, want het aldaar onderstelde oppervlak wordt geconstrueerd door vlakken te leggen door rechten op F^3 en F^2; deze vlakken nu voldoen aan de voorwaarden van gemeenschappelijke raakvlakken.

Neemt men nu, in plaats van een willekeurig punt P der ruimte, een punt A van F^2, dan zullen de door A aan F geconstrueerde raakvlakken door een der beide beschrijvende rechten a_1 en a_2 van F^2 moeten gaan, die in A samenkomen. Van deze rechten snijdt de eene, bijv. a_1, de rechte l in een punt P; de andere a_2 snijdt haar niet. Legt men de raakvlakken door A, dan ziet men, dat er een bepaald wordt door de beide elkaar snijdende rechten l en a_1. Dit vlak zal F^3 behalve in l in nog twee rechten l_1 en l_2 snijden; de laatste twee geven het dubbelraakvlak $a_1 l$. Door het punt P gaat verder een gemeenschappelijk raakvlak. Nu blijven er dus nog drie raakvlakken door a_2 over; zoo blijkt dan, dat a_2 tot die rechten behoort, door welke men aan F een raakvlak kan brengen. Opdat echter aan een ontwikkelbaar oppervlak een raakvlak door een rechte mogelijk zij, moet de rechte een raaklijn van het oppervlak zijn, en daar er nu door a_2 drie raakvlakken gaan, zoo is a_2 een drievoudige raaklijn. Neemt men nu een raakvlak α van F^2 aan, dan zal dit vlak altijd een raakpunt bezitten; dus kan men onderstellen, dat dit raakpunt het bovengenoemde punt A is. In het vlak α ligt dan een rechte van F^2, die de rechte l kruist en drievoudige raaklijn is van het oppervlak F en dus ook van de doorsnee van F met α. Van deze kromme kan men nu, wijl ze van de vierde klasse is, den graad volgens de formules van PLÜCKER

bepalen. Hierbij telt de drievoudige raaklijn voor drie dubbelraaklijnen; wijl de doorsnee in het algemeen geen buigpunten bezit, vindt men voor den graad $4 \times 3 - 3 \times 2$ of 6.

Vraagstuk CLXXVI.

Aan welke voorwaarden zijn de complexe voerstralen (a, b, c), (x, y, z) van de hoekpunten der driehoeken ABC, XYZ gebonden, als deze driehoeken rechtstreeks of bij tegenoverstand gelijkvormig zijn? (Dr. W. Kapteyn).

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn *en* A. A. Nijland.

Oplossing *van* Dr. W. Kapteyn.

Zijn ABC en XYZ rechtstreeks gelijkvormig, dan is

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{z-x}{y-x}.$$

Want deze vergelijking zegt, dat de zijden om de gelijkstandige hoekpunten A en X heen evenredig zijn, als we op de moduli letten, en met elkaar in denzelfden zin genomen gelijke hoeken maken, als we letten op het argument.

Zijn ABC en XYZ bij tegenoverstand gelijkvormig en is X′Y′Z′ het spiegelbeeld van XYZ ten opzichte van de as der abscissen, dan zijn ABC en X′Y′Z′ rechtstreeks gelijkvormig en vindt men dus de betrekking

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{z'-x'}{y'-x'},$$

waarin x', y', z' de geconjugeerde waarden van x, y, z voorstellen.

De gevonden voorwaarden kunnen ook in de gedaante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ x' & y' & z' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

geschreven worden; want een eenvoudige herleiding dezer determinanten voert tot de verkregen vergelijkingen terug.

Aanmerking van den heer Nyland. Zijn ABC en XYZ rechtstreeks gelijkvormig, dan moet de eene driehoek door een lineaire substitutie der complexe voerstralen in den anderen

overgaan kunnen en er dus grootheden p, q te vinden zijn, die aan de betrekkingen

$$x = pa + q,\ y = pb + q,\ z = pc + q$$

voldoen. Door eliminatie van p en q vindt men de gevraagde voorwaarde in den boven gegeven determinantenvorm.

Vraagstuk CLXXVII.

In het vlak van den driehoek ABC de punten X, Y zoo te bepalen, dat de driehoeken AXY, YBX, XYC en ABC rechtstreeks gelijkvormig zijn. (DR. W. KAPTEYN).

Opgelost *door* DR. W. KAPTEYN, W. MANTEL *en* A. A. NYLAND.

Oplossingen.

I. Uit de ondersteelde gelijkvormigheid van de driehoeken AXY, YBX, XYC met driehoek ABC volgt, dat er tusschen de vijf complexe voerstralen a, b, c, x, y, zooals uit de oplossing van het vorige vraagstuk blijkt, de betrekkingen

$$\begin{aligned}(a-c)\,x + (b-a)\,y &= a\,(b-c)\ ,\\ (b-a)\,x + (c-b)\,y &= b\,(c-a)\ ,\\ (c-b)\,x + (a-c)\,y &= c\,(a-b)\end{aligned}$$

bestaan. Door optelling overtuigt men zich er van, dat deze drie vergelijkingen tusschen x en y slechts twee onderling onafhankelijke vergelijkingen vertegenwoordigen. Telt men deze vergelijkingen bij elkaar, eerst nadat men ze achtereenvolgens met c, a, b, daarna nadat men ze achtereenvolgens met b, c, a vermenigvuldigd heeft, dan vindt men

$$x = \frac{3abc - a^2b - b^2c - c^2a}{bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2} \equiv \frac{T_1}{N}\,,$$

$$y = \frac{3abc - a^2c - b^2a - c^2b}{bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2} \equiv \frac{T_2}{N}.$$

Hieruit zijn x en y te construeeren.

Nemen we tot vereenvouding aan, dat a, b, c de wortels der vergelijking

$$p_0t^3 + 3p_1t^2 + 3p_2t + p_3 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ 1).$$

zijn, dan is

$$N = \frac{9\,(p_0 p_2 - p_1^2)}{p_0^2}\ ,\ T_1 + T_2 = \frac{9\,(p_1 p_2 - p_0 p_3)}{p_0^2},$$

$$T_1 T_2 = \frac{27}{p_0^4}\,(p_1^3 p_3 - 3p_0 p_1 p_2 p_3 + p_0 p_2^3 + p_0^2 p_3^2).$$

Dus zijn x en y de wortelpunten van de vergelijking

$$3P_1 t^2 + 3P_2 t + P_3 = 0,$$

als gesteld is

$$(p_0 p_2 - p_1^2)^2 = P_1\ ,\ (p_0 p_2 - p_1^2)\,(p_0 p_3 - p_1 p_2) = P_2,$$

$$p_1^3 p_3 - 3p_0 p_1 p_2 p_3 + p_0 p_2^3 + p_0^2 p_3^2 = P_3.$$

Derhalve zijn x, y, ∞ de wortelpunten der vergelijking

$$P_0 t^3 + 3P_1 t^2 + 3P_2 t + P_3 = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 2)$$

waarin $P_0 = 0$ is. Bepaalt men nu de vergelijking

$$(P_0 P_2 - P_1^2)t^2 + (P_0 P_3 - P_1 P_2)t + (P_1 P_3 - P_2^2) = 0,$$

d. i. de HESSE'sche covariant van het eerste lid van 2) gelijk nul gesteld, dan vindt men

$$(p_0 p_2 - p_1^2)t^2 + (p_0 p_3 - p_1 p_2)t + (p_1 p_3 - p_2^2) = 0\ .\ .\ .\ .\ 3),$$

waarvan het eerste lid juist de HESSE'sche covariant van het eerste lid van 1) is. Wijl de HESSE'sche punten van een driehoek de isodynamische centra zijn, kan men dus beweren, dat de driehoeken ABC en XYZ, waarbij Z het punt in het oneindige voorstelt, dezelfde isodynamische centra hebben (W. K.)

II. De gelijkvormigheid van AXY, YBX en XYC wordt uitgedrukt door de equipollenties

$$\frac{AX}{AY} = \frac{YB}{YX} = \frac{XY}{XC}.$$

Elke reden is gelijk aan de verhouding van de som der voorgaande termen tot de som der volgende, dat is gelijk aan AB : AC; dus zijn deze driehoeken van zelf aan ABC gelijkvormig, als zij het onderling zijn.

Stellen wij de waarde van elke reden door q voor, dan hebben wij

$$AX = qAX + qXY\ ,\ -XY - AX + AB = -qXY.$$

Hieruit lossen wij op

$$AX = \frac{AB}{q + q^{-1} - 1}, \quad XY = \frac{(1-q)AB}{q^2 - q + 1}.$$

Construeer nu ACH (fig. 83) gelijkvormig met ABC en het parallelogram BCHG; dan is $AG = AH + CA + AB = (q^{-1} - 1 + q)AC$. Construeer vervolgens AXC gelijkvormig met ABG; dan is het gevraagde punt X gevonden. Het punt Y kan men dan vinden door AXY gelijkvormig met ABC te maken (W. M).

Aanmerking. Let men op de hoeken tusschen de lijnen, die X en Y met A, B en C verbinden, dan merkt men dadelijk op, dat het voorstel een bijzonder geval is van het problema van Snellius; daaruit volgt echter geen eenvoudiger constructie. Voorts blijkt, als men de figuur omslaat om de lijn, die XY rechthoekig middeldoordeelt, dat de lijnen uit X op die uit Y vallen, en omgekeerd. De punten A, B, C komen in A′, B′, C′; X is het centrum van perspectief voor ABC en C′A′B′, Y dat voor ABC en B′C′A′. De punten A′, B′ en C′ vallen op den cirkel door A, B en C; want $\angle XA'Y = \angle XAY = \angle BAC = \angle BA'C$. Een eigenaardige oplossing zou dus verkregen zijn, als wij die loodlijn door het midden van XY vooraf konden construeeren.

Dit laatste kan bereikt worden door den boven gevonden vorm voor XY geschikt te herleiden; het is voldoende de *richting* van XY te vinden, omdat wij weten, dat de gezochte loodlijn door het middelpunt O van den omgeschreven cirkel gaat. De verlangde herleiding is de volgende.

$$XY = \frac{AB - \dfrac{AB^2}{AC}}{\dfrac{AB^2}{AC^2} - \dfrac{AB}{AC} + 1} = \frac{AB\,.\,AC(AC - AB)}{AB^2 - AB\,.\,AC + AC^2} =$$

$$= \frac{AB\,.\,AC\,.\,BC}{AB(AB - AC) + AC(AC - AB) + AB\,.\,AC}$$

en dus

$$\frac{1}{XY} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}.$$

Vermenigvuldigt men beide leden met het dubbel van den inhoud van ABC, dan heeft men rechts vectoren, die 90° in richting verschillen met de hoogtelijnen, nadat alles om de

nulrichting is omgeslagen. Construeer dus de gebroken lijn Opqr, waarvan de deelen equipollent zijn aan de hoogtelijnen, dan zal Or loodrecht op XY komen te staan; wat grootte aangaat, zal Or . XY gelijk zijn aan tweemaal driehoek ABC.

Door een zuiver meetkundige beschouwing komen wij omtrent de ligging van Or nog meer te weten. De perspectivische ligging van ABC en C′A′B′ met betrekking tot X leert ons, dat de snijpunten van AB en C′A′, van BC en A′B′ en van AC en C′B′ op een lijn x liggen; blijkbaar is x de poollijn van X ten aanzien van den cirkel ABC. In deze perspectivische overeenkomst is de cirkel met zich zelf homoloog. De driehoek $\alpha\beta\gamma$, welks zijden in A, B, C den cirkel raken, is dus homoloog met den driehoek, welks zijden in C′, A′, B′ raken. De lijnen Aα, Bβ, Cγ snijden elkander in het punt L van Lemoine van ABC; dit zal dan homoloog zijn met het Lemoine-punt van C′A′B′. Maar in de overeenkomst van ABC en B′C′A′ met betrekking tot Y is L homoloog met het Lemoine-punt van B′C′A′. Daar nu C′A′B′ en B′C′A′ geen verschillende Lemoine-punten hebben, vallen deze beide in L, en ligt L op de as van symmetrie Or (W. M.).

Vraagstuk CLXXVIII.

Bewijs de betrekking

$$\text{mod.}(z+\sqrt{z^2-c^2})+\text{mod.}(z-\sqrt{z^2-c^2})=\text{mod.}(z+c)+\text{mod.}(z-c).$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn, A. A. Nyland, A. E. Rahusen *en* Dr. J. de Vries.

Oplossingen.

I. Stelt men $z+\sqrt{z^2-c^2}=ct$, dan is $z-\sqrt{z^2-c^2}=\frac{c}{t}$.

Hieruit volgt $\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=z$ en dus

$$\frac{ct}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^2=\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)=z+c,$$

$$\frac{ct}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2=\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}-2\right)=z-c.$$

Zij nu $t = \rho e^{i\phi}$, dan is

$$\text{mod.}\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 = 1 + \frac{2\,\text{Cos}\,\phi}{\rho} + \frac{1}{\rho^2},$$

$$\text{mod.}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2 = 1 - \frac{2\,\text{Cos}\,\phi}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}.$$

Dus geeft optelling

$$\text{mod.}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 + \text{mod.}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2 = 1 + \text{mod.}^2\frac{1}{t}$$

Door deze vergelijking met mod. ct te vermenigvuldigen en weer tot z over te gaan, vindt men de gevraagde betrekking (W. K.).

II. Deze betrekking volgt onmiddellijk uit de tweede oplossing van vraagstuk 154. Voor het geval $c = 1$ — en hiertoe wordt het bovenstaande teruggebracht door de substitutie $z = cz_1$ — is daar aangetoond, dat, als z_1 een ellips met de brandpunten ± 1 beschrijft, $z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - 1}$ twee concentrische cirkels zullen doorloopen, waarvan de stralen de som en het verschil zijn van de halve assen der ellips. Derhalve is mod. $(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1})$ + mod. $(z_1 - \sqrt{z_1^2 - 1})$ gelijk aan de groote as der ellips, dus ook gelijk aan mod. $(z_1 + 1)$ + mod. $(z_1 - 1)$. Door nu weer tot z terug te gaan, is hiermee het gestelde bewezen (A. E. R, J. d. V.).

Vraagstuk CLXXIX.

Aan een balk, welke onder den invloed der zwaartekracht langzame slingeringen uitvoeren kan om een as op eenigen afstand boven het zwaartepunt aangebracht, worden twee slingers van veel korter slingertijd en geringer massa, draaibaar om assen evenwijdig aan de draaiingsas van den balk, opgehangen. Men vraagt naar den aard der principale slingeringen van dit stelsel. Daarbij ook acht te slaan op het geval, dat de slingertijden der beide slingers uiterst weinig verschillen (vergelijk CHR. HUYGENS, *Oeuvres complètes*, d. V, p. 247 en 256). (Dr. D. J. KORTEWEG.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

NOTATIE. Wij gebruiken een rechthoekig coördinatenstelsel met de as van den balk tot z-as en met de y-as in de richting der zwaartekracht. De afstanden der zwaartepunten van den balk en van de slingers tot de assen noemen wij a_0, a_1, a_2, de slingerlengten l_0, l_1, l_2, de massa's m_0, m_1, m_2. Voor den stand van evenwicht stellen wij de coördinaten van de zwaartepunten (x_0, y_0), $(x_1, y_1 + a_1)$, $(x_2, y_2 + a_2)$. Een willekeurige stand van het stelsel wordt aangewezen door de hoeken θ_0, θ_1, θ_2, die de balk en de slingers uit den stand van evenwicht zijn gedraaid. De tijd is t.

Tusschen de gegevens bestaan de betrekkingen:

$$x_0^2 + y_0^2 = a_0^2, \quad m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0.$$

Wij voeren nog grootheden a, l, m in door te stellen:

$$m_0 + m_1 + m_2 = m,$$
$$m_0 y_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2 = am,$$
$$a_0 l_0 m_0 + m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) = alm.$$

Men zal opmerken, dat deze a, l, m behooren bij den slinger, dien men zou verkrijgen door de massa's der kleine slingers in hun assen te leggen.

BEREKENING VAN HET ARBEIDSVERMOGEN. In een willekeurigen stand zijn de coördinaten van de zwaartepunten der drie lichamen:

$$x_0 \operatorname{Cos} \theta_0 - y_0 \operatorname{Sin} \theta_0 \qquad x_0 \operatorname{Sin} \theta_0 + y_0 \operatorname{Cos} \theta_0;$$
$$x_1 \operatorname{Cos} \theta_0 - y_1 \operatorname{Sin} \theta_0 - a_1 \operatorname{Sin} \theta_1, \quad x_1 \operatorname{Sin} \theta_0 + y_1 \operatorname{Cos} \theta_0 + a_1 \operatorname{Cos} \theta_1;$$
$$x_2 \operatorname{Cos} \theta_0 - y_2 \operatorname{Sin} \theta_0 - a_2 \operatorname{Sin} \theta_2, \quad x_2 \operatorname{Sin} \theta_0 + y_2 \operatorname{Cos} \theta_0 + a_2 \operatorname{Cos} \theta_2.$$

Het arbeidsvermogen van beweging wordt uitgedrukt door:

$$\tfrac{1}{2} a_0 l_0 m_0 \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a_1 (l_1 - a_1) m_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a_2 (l_2 - a_2) m_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} m_1 \left\{ \left(- x_1 \operatorname{Sin} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - y_1 \operatorname{Cos} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - a_1 \operatorname{Cos} \theta_1 \frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(x_1 \operatorname{Cos} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - y_1 \operatorname{Sin} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - a_1 \operatorname{Sin} \theta_1 \frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 \right\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} m_2 \left\{ \left(- x_2 \operatorname{Sin} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - y_2 \operatorname{Cos} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - a_2 \operatorname{Cos} \theta_2 \frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(x_2 \operatorname{Cos} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - y_2 \operatorname{Sin} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} - a_2 \operatorname{Sin} \theta_2 \frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 \right\}.$$

In eerste benadering is dit:

$$B = \frac{1}{2}alm\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}a_1l_1m_1\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}a_2l_2m_2\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 +$$
$$+ a_1m_1y_1\frac{d\theta_0}{dt}\frac{d\theta_1}{dt} + a_2m_2y_2\frac{d\theta_0}{dt}\frac{d\theta_2}{dt}.$$

Het arbeidsvermogen van plaats wordt uitgedrukt door

$$-g\,m_0(x_0\sin\theta_0 + y_0\cos\theta_0) - g\,m_1(x_1\sin\theta_0 + y_1\cos\theta_0 + a_1\cos\theta_1) -$$
$$-gm_2(x_2\sin\theta_0 + y_2\cos\theta_0 + a_2\cos\theta_2).$$

Bij ontwikkeling volgens klimmende machten der θ's kunnen wij de standvastige termen, als overbodig, weglaten; de eerste machten vallen weg, en wij vinden als eerste benadering

$$P = \frac{1}{2}agm\,\theta_0^2 + \frac{1}{2}a_1gm_1\,\theta_1^2 + \frac{1}{2}a_2gm_2\,\theta_2^2.$$

Oplossing van een bijzonder geval. Als $y_1 = y_2 = 0$ is, dan vallen uit de formule voor B de producten van hoeksnelheden weg. Onze methode der bewegingsmomenten leert dan dadelijk de integralen aldus op te schrijven:

$$\frac{1}{2}alm\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}agm\,\theta_0^2 = \text{standv.}$$
$$\frac{1}{2}a_1l_1m_1\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}a_1gm_1\,\theta_1^2 = \text{standv.}$$
$$\frac{1}{2}a_2l_2m_2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}a_2gm_2\,\theta_2^2 = \text{standv.}$$

Hieruit blijkt, dat de slingers zich bewegen, alsof hun assen vast waren, en de balk zich beweegt, alsof de massa's der slingers in hun assen gelegd waren.

De tweede van deze integralen zou nog gelden, als $y_1 = 0$ en niet $y_2 = 0$ was.

Oplossing van het algemeene geval. Door een lineaire substitutie

$$\theta_0 = \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z,$$
$$\theta_1 = \beta_1x + \beta_2y + \beta_3z,$$
$$\theta_2 = \gamma_1x + \gamma_2y + \gamma_3z$$

kunnen wij tegelijk B en P herleiden tot sommen van tweedemachten; dan wordt

$$B \equiv \frac{1}{2}L_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}L_2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}L_3\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$P \equiv \frac{1}{2}gx^2 + \frac{1}{2}gy^2 + \frac{1}{2}gz^2.$$

Dus leert onze methode, dat

$$L_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + gx^2 = \text{standv.}$$

een integraal is en x als uitwijking van een slinger ter lengte L_1 kan worden opgevat; evenzoo kunnen y en z geacht worden te behooren bij slingers met de lengten L_2 en L_3. Het gegeven stelsel ondergaat dus drie gelijktijdige slingeringen, van welke de hoeken θ_0, θ_1, θ_2 elk hun deel ontvangen; deze deelen worden aangewezen door de negen substitutiecoëfficiënten α, β, γ.

De berekening der negen coëfficiënten en der drie slingerlengten is af te leiden uit de identiteiten:

$$L_1x^2 + L_2y^2 + L_3z^2 = alm\theta_0^2 + a_1l_1m_1\theta_1^2 + a_2l_2m_2\theta_2 +$$
$$+ 2a_1m_1y_1\,\theta_0\theta_1 + 2a_2m_2y_2\,\theta_0\theta_2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = am\theta_0^2 + a_1m_1\theta_1^2 + a_2m_2\theta_2^2.$$

Deze zijn verkregen door de tweeërlei uitdrukkingen voor B en voor P aan elkander gelijk te stellen; bij B zijn de veranderlijken in de plaats van haar afgeleiden gesteld, hetgeen geoorloofd is, omdat de substituties voor beide dezelfde zijn.

Door in de tweede van deze identiteiten θ_0, θ_1, θ_2 te vervangen door hun waarden en de coëfficiënten van x^2 gelijk te stellen, hebben wij de betrekking

$$1 = am\alpha_1^2 + a_1m_1\beta_1^2 + a_2m_2\gamma_2^2,$$

bij welke er nog vijf zouden gevoegd kunnen worden.

Trekt men de tweede L_1 maal, of L_2 of L_3 maal, van de eerste af, dan blijven in het eerste lid slechts twee tweedemachten staan, zoodat de discriminant van het tweede lid dan ook nul moet worden; derhalve zijn L_1, L_2 en L_3 de wortels van de vergelijking

$$\begin{vmatrix} am(l-L) & a_1m_1y_1 & a_2m_2y_2 \\ a_1m_1y_1 & a_1m_1(l_1-L) & 0 \\ a_2m_2y_2 & 0 & a_2m_2(l_2-L) \end{vmatrix} = 0.$$

Na ontwikkeling wordt dit

$$am(l-L)(l_1-L)(l_2-L) - a_2m_2y_2^2(l_1-L) - a_1m_1y_1^2(l_2-L) = 0.$$

Wanneer $l > l_1 > l_2$ is, dan is er een wortel kleiner dan l_2, een tusschen l_1 en l_2 gelegen, en een grooter dan l. Wanneer am zeer groot is in vergelijking met a_1m_1 en a_2m_2, dan kunnen de wortels weinig van l, l_1 en l_2 verschillen. In het geval der opgave is dus één slingertijd slechts weinig meer dan die van den balk, en die der twee anderen zijn slechts weinig minder dan die van de slingers.

Als wij de vergelijking

$$(L_2 - L_1)y^2 + (L_3 - L_1)z^2 = am(l - L_1)\theta_0^2 + \text{enz.}$$

differentiëeren ten opzichte van x, dan verkrijgen wij links nul en rechts termen met θ_0, met θ_1 en met θ_2; deze groepen moeten afzonderlijk nul zijn, omdat de vergelijking identiek is. Dit geeft de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 0 &= am(l-L_1)\alpha_1 + a_1m_1y_1\beta_1 + a_2m_2y_2\gamma_1, \\ 0 &= a_1m_1y_1\alpha_1 + a_1m_1(l_1-L_1)\beta_1, \\ 0 &= a_2m_2y_2\alpha_1 + a_2m_2(l_2-L_1)\gamma_1. \end{aligned}$$

Met de vroeger gevonden vergelijking

$$1 = am\alpha_1^2 + a_1m_1\beta_1^2 + a_2m_2\gamma_1^2$$

leveren deze ons de coëfficiënten der substitutie

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (l_1 - L_1)(l_2 - L_1) : H, \\ \beta_1 &= -y_1(l_2 - L_1) : H, \\ \gamma_1 &= -y_2(l_1 - L_1) : H, \end{aligned}$$

voor

$$H^2 = am(l_1-L_1)^2(l_2-L_1)^2 + a_1m_1y_1^2(l_2-L_1)^2 + a_2m_2y_2^2(l_1 - L_1)^2.$$

Vervangt men L_1 door L_2 of L_3, dan gaan deze formules over in die voor α_2, β_2, γ_2, of α_3, β_3, γ_3.

Zij L_1 de grootste wortel van onze derdemachts-vergelijking; zooals wij weten is deze iets meer dan de slingerlengte van den balk. De formules voor $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ toonen ons, dat de hiermede overeenstemmende schommeling zich op alle drie deelen van het stelsel doet gevoelen; de uitwijking is voor alle drie in denzelfden zin gericht, omdat α_1, β_1, γ_1 alle drie positief zijn.

Als L_2 de tusschen l_1 en l_2 gelegen wortel is, alzoo nagenoeg $= l_1$, de lengte van den grootsten der kleine slingers, dan doen de formules voor α_2, β_2, γ_2 ons zien, dat $\alpha_2 < 0$,

$\beta_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$ is, terwijl α_2 en γ_2 zeer klein zijn. De grootste der kleine slingers wordt dus een weinig versneld en deelt aan den balk en aan den anderen slinger geringe schommelingen mede, van welke de uitwijkingen tegengesteld zijn aan zijn eigene.

Als eindelijk L_3 de kleinste wortel, dus nagenoeg gelijk l_2 is, dan leeren de formules voor α_3, β_3, γ_3, dat $\alpha_3 > 0$, $\beta_3 < 0$, $\gamma_3 < 0$ is, terwijl α_3 en β_3 zeer klein zijn. De kleinste slinger wordt dus zelve een weinig versneld en deelt geringe schommelingen mede aan den balk en aan den anderen slinger; bij den balk is de uitwijking tegengesteld, bij den anderen slinger gelijk gericht met zijn eigene.

Bij de beoordeeling der teekens is hier gerekend, dat y_1 en y_2 positief zouden zijn. Als y_1 negatief is, dan is alles wat van de uitwijking van den grootsten slinger gezegd is om te keeren; overeenkomstig is het bij den kleinsten slinger, als $y_2 < 0$ is.

Voorbeeld. Denkende aan een vier meter langen balk van 50 kilogram, aan welks einden slingers van een hectogram hangen, terwijl de balk een as heeft, die een decimeter van het midden verwijderd, en zoo gekozen is, dat de balk in vertikalen stand in evenwicht is, nemen wij de volgende getallen aan:

$$m = 500 \qquad a = 0,1 \qquad l = 10$$
$$m_1 = 1 \qquad a_1 = l_1 = 0,3 \qquad y_1 = -1,9$$
$$m_2 = 1 \qquad a_2 = l_2 = 0,2 \qquad y_2 = 2,1.$$

De wortels der derdemachts-vergelijking zijn dan

$$L_1 = 10,0040\ldots,\ L_2 = 0,2978\ldots,\ L_3 = 0,1982\ldots.$$

Van de coëfficiënten der substitutie zijn slechts de verhoudingen van belang; wij vinden:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 1 : -0,01958 : 0,02142;$$
$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = 0,00116 : 1 : 0,02486;$$
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = -0,00086 : -0,01590 : 1.$$

Verstaan wij thans door x, y, z gelijktijdige uitwijkingen, welke slingers van de lengten L_1, L_2, L_3 kunnen hebben, dan zijn de uitwijkingen van onze drie slingers:

$$\theta_0 = x - 0,01958\,y + 0,02142\,z,$$
$$\theta_1 = 0,00116\,x + y + 0,02486\,z,$$
$$\theta_2 = -0,00086\,x - 0,01590\,y + z.$$

Of wel, met voldoende benadering:

$$\theta_0 = x - 0{,}01958\,\theta_1 + 0{,}02142\,\theta_2,$$
$$\theta_1 = y + 0{,}00116\,\theta_0 + 0{,}02486\,\theta_2,$$
$$\theta_2 = z - 0{,}00086\,\theta_0 - 0{,}01590\,\theta_1.$$

Vraagstuk CLXXX.

Men vraagt de vergelijking met eindige differenties

$$2u_n u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

op te lossen. (H. J. KRANTZ).

Opgelost *door* H. J. KRANTZ, W. MANTEL, W. A. POORT *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossingen.

I. Men berekene achtereenvolgens

$$u_1 = \frac{u_0^2+1}{2u_0},\quad u_2 = \frac{(u_0^2+1)^2+(2u_0)^2}{2\,.\,2u_0(u_0^2+1)} = \frac{u_0^4+6u_0^2+1}{4u_0^3+4u_0},\quad \text{enz.}$$

Men merkt dan spoedig, dat u_n gelijk is aan een breuk, die men verkrijgt door uit de ontwikkeling van $(u_0^2+1)^{2^n}$ de termen om den andere in den teller en in den noemer te zetten. In formule is dit voor te stellen door

$$u_n = \frac{(u_0^2+1)^{2^n}+(u_0^2-1)^{2^n}}{(u_0^2+1)^{2^n}-(u_0^2-1)^{2^n}},\ \text{d. i.}\ u_n = \frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}-1}.$$

Door de sluitrede van n op $n+1$ wordt deze uitkomst bevestigd (W. M.).

II. Stel $u_n = e^x$, dan levert de vergelijking onmiddellijk $u_{n+1} = \text{Cosh.}\, x$. Dus is de oplossing $u_n = (\text{Cosh. log.})^n\, u_0$ (W. M.).

III. Uit de gegeven vergelijking volgt

$$\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1} = \left(\frac{u_n+1}{u_n-1}\right)^2.$$

Volgens de methode van vraagstuk 165 vindt men dus

$$\frac{u_n+1}{u_n-1} = \left(\frac{u_0+1}{u_0-1}\right)^{2^n}.$$

Hieruit volgt dan de boven verkregen uitkomst (W. A. P, J. D. V.).

AANMERKINGEN. I. De algemeene vorm voor de vergelijkingen, waarvan die der vraagstukken 165 en 180 bijzondere gevallen zijn, is blijkbaar

$$u_{n+1} \Sigma p_{2k+1} u_n^{p-2k-1} = \Sigma p_{2k} u_n^{p-2k},$$

waarin het somteeken van $k = 0$ tot $k = \frac{p-1}{2}$ of $\frac{p}{2}$ reikt(J.D.V.)

II. We zijn tot het bovenstaande vraagstuk gekomen naar aanleiding van een mededeeling van N. ALEXEEFF in de *Comptes rendus* (Augustus, 1879, deel 89, blz. 403) en het volgende daarmee verband houdende vraagstuk van ED. LUCAS (*Nouv. Ann.*, September 1879):

„Men neemt de rekenkundig middenevenredige p_1 tusschen twee getallen p en q, alsmede de harmonisch middenevenredige q_1; door deze bewerking op p_1 en q_1 te herhalen vindt men p_2 en q_2, daarna op overeenkomstige wijs p_3 en q_3, enz. Men vraagt p_n in functie van p en q te bepalen en de betrekkingen

$$p_1 > p_2 > p_3 \ldots\ldots > \sqrt{pq} > \ldots\ldots q_3 > q_2 > q_1$$

te bewijzen."

Uit de betrekkingen

$$p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}, \quad q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$$

vindt men nl. $p_{n+1}q_{n+1} = p_nq_n = \ldots = pq$ en dus $2p_{n+1} = p_n + \frac{pq}{p_n}$ of, als men $p_n = u_n \sqrt{pq}$ stelt, $2u_n u_{n+1} = u_n^2 + 1$ (H. J. K.).

Vraagstuk CLXXXI.

De omhullende te vinden van een onveranderlijke ellips, die de beenen van een vasten rechten hoek aanraakt. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL.

Oplossing.

Ten aanzien van de beenen van den gegeven hoek als coördinaatassen noemen wij de coördinaten van het middelpunt der ellips (x_0, y_0). De raakkoorde moet door de middellijn van O

middendoorgedeeld worden; haar vergelijking is dan van den vorm

$$xy_0 + x_0 y - p^2 = 0.$$

De ellips is voor te stellen door

$$(xy_0 + x_0 y - p^2)^2 - 2k\,xy = 0\,;$$

dat (x_0, y_0) haar middelpunt is, wordt uitgedrukt door de enkele voorwaarde

$$2x_0 y_0 - p^2 = k.$$

Hiermede gaat de vergelijking over in

$$(xy_0 + x_0 y - p^2)^2 - 2\,(2x_0 y_0 - p^2)\,xy = 0\,.\,.\,.\,.\,.\quad 1)$$

Wij moeten nu de betrekkingen kennen, die tusschen x_0, y_0, p bestaan, opdat de halve assen der ellips gegeven waarden a en b hebben. Daartoe verplaatsen wij den oorsprong naar het middelpunt en vinden als nieuwe vergelijking

$$(xy_0 + x_0 y)^2 - 2\,(2x_0 y_0 - p^2)xy - p^2\,(2x_0 y_0 - p^2) = 0.$$

Hoe men verder door assendraaiing deze vergelijking terugbrengt tot den vorm

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

is bekend; de bewerking leidt tot

$$x_0^{\,2} + y_0^{\,2} = a^2 + b^2,\ p^2\,(2x_0 y_0 - p^2) = a^2b^2.$$

Uit deze losse men x_0 en y_0 op; voert men de uitkomsten in 1) in, dan wordt verkregen

$$\tfrac{1}{2}(x+y)\sqrt{(a^2+p^2)(p^2+b^2)} - \tfrac{1}{2}(x-y)\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)} + ab\sqrt{2xy} - p^2 = 0.$$

Verdrijft men de wortelteekens, onder welke p staat, dan komt men tot de vergelijking

$$p^{12} - 2p^{10}xy - 4p^9ab\sqrt{2xy} + \tfrac{1}{4}p^8(x^2+y^2)\,(x^2+y^2-4a^2-4b^2) +$$
$$+ 4p^7abxy\sqrt{2xy} + p^6xy\,\{(x^2+y^2)(a^2+b^2) + 10a^2b^2\} +$$
$$+ 2p^5ab\,(a^2+b^2)\,(x+y)^2\sqrt{2xy} + \tfrac{1}{2}p^4a^2b^2\,(x^2-y^2)^2 -$$
$$- 8p^3a^3b^3xy\sqrt{2xy} - p^2a^2b^2(a^2+b^2)\,xy\,(x^2+y^2) + \tfrac{1}{4}a^4b^4\,(x^2+y^2)^2 = 0.$$

De gevraagde omhullende (fig. 84) wordt nu voorgesteld door den discriminant dezer vergelijking in p. Terwijl in het algemeen de discriminant van een twaalfdemachts-vergelijking de resultant is van twee elfdemachts-vergelijkingen, zijn deze laatste hier slechts van den tienden graad, omdat de tweede en de voorlaatste term ontbreekt. De discriminant komt dus te voor-

schijn als een determinant van den twintigsten graad met termen, die van den vierden graad zijn in x en y; de omhullende is alzoo van den 80[sten] graad.

Men zou kunnen meenen, dat deze graad nog verdubbeld moet worden wegens het optreden van $\sqrt{2xy}$. Echter valt deze wortel van zelf weg, omdat hij slechts als factor bij de oneven machten van p staat; wanneer de vergelijking in p gelijke wortels heeft, dan heeft die in $-p$ ze ook.

Vraagstuk CLXXXII.

Men vraagt den coëfficiënt van x^n in de ontwikkeling van

$$(1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C^n_{2n} x^n + \dots)^m$$

te bepalen. (A. E. RAHUSEN).

Opgelost *door* W. MANTEL, A. E. RAHUSEN *en* DR. C. STOLP.

Oplossingen.

I. Men heeft

$$C^n_{2n} = \frac{(n+1)^{n/1}}{1^{n/1}} = \frac{1^{2n/1}}{(1^{n/1})^2} = \frac{1^{n/2}\,.\,2^{n/2}}{(1^{n/1})^2} = \frac{1^{n/2}\,.\,2^n}{1^{n/1}} = \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}}\,.\,4^n.$$

Dus kan men voor

$$y = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots \frac{1}{n+1} C^n_{2n} x^n \dots$$

ook schrijven

$$y = 1 + \frac{1}{2}\,.\,4\,.\,\frac{x}{2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,4^2\,.\,\frac{x^2}{3} + \dots +$$

$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\dots 2n}(4x)^n + \dots$$

Vermenigvuldigt men beide leden dezer vergelijking met x en differentieert men ze vervolgens naar deze veranderlijke, dan komt er

$$\frac{d(xy)}{dx} = 1 + \frac{1}{2}(4x) + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}(4x)^2 + \dots \frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\dots\ 2n}(4x)^n + \dots$$

Het tweede lid dezer laatste vergelijking is de ontwikkeling

van $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$. Door integratie van $d(xy) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ vindt men dan verder $xy = C - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}$. Voor $x = 0$ blijkt $C = \frac{1}{2}$ te zijn. Dus is ten slotte $y = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Hiermee is dan de vraag teruggebracht naar den coëfficiënt van x^{2n} in $\dfrac{1}{2^n}(1-\sqrt{1-4x})^m$.

Uit de gevonden betrekking $2xy = 1-\sqrt{1-4x}$ volgt $xy^2 - y + 1 = 0$ en dus $y^{m+1} = \dfrac{y^m - y^{m-1}}{x}$. Stelt P_n^m de coëfficiënt van x^n in y^m voor, dan geldt dus de recurrente betrekking $P_n^{m+1} = P_{n+1}^m - P_{n+1}^{m-1}$. Uit $P_n^0 = 0$ en $P_n^1 = \dfrac{2n(2n-1)\,.\,.\,(n+3)(n-2)}{1\,.\,2\quad....\quad n}$ volgt dus P_n^2, uit P_n^1 en P_n^2 weer P_n^3, enz. Zoo vindt men

$$P_n^m = m\,.\,\frac{(2n+m-1)(2n+m-2)\,....\,(n+m+1)}{1\,.\quad 2\,.\quad ....\quad n}\,.....1).$$

De juistheid dezer voor alle geheele positieve waarden van m geldende uitkomst wordt door de sluitrede van m op $m+1$ aangetoond (C. S.)

II. Stelt men den gevraagden coëfficiënt door P_n^m voor, zoodat $P_n^1 = \dfrac{1}{n+1}\,C_{2n}^n$ is, dan is

$$P_n^m = \Sigma P_{l_1}^1 P_{l_2}^1 \,.....\, P_{l_m}^1 ,$$

welke som zich uitstrekt over alle geheele waarden van de getallen l, positief op nul, welke voldoen aan de betrekking

$$l_1 + l_2 + \,......\, + l_m = n.$$

Voor de bepaling van de waarde dezer som kan men van de volgende meetkundige beschouwing gebruik maken.

In LUCAS' *Theorie des nombres*, blz. 84, vindt men aangetoond, dat het aantal wegen, volgens welke men uitgaande van O een willekeurig knooppunt van het daar gegeven diagram of échiquier triangulaire (fig. 85) met de coördinaten x en y kan bereiken door telkens een pas naar beneden of naar rechts te doen, voorgesteld kan worden door

$$T_x^y = \frac{x-y+1}{x+1}\,C_{x+y}^y.$$

Zoo heeft men bijv. voor het punt B (7,4)

$$T_7^4 = \frac{4}{8} C_{11}^4 = 165.$$

Men stelle zich nu de vraag, langs hoeveel wegen men uitgaande van O het punt B (x, y) kan bereiken, als behalve O i diagonaalpunten, d. w. z. punten van de diagonaal OA aangedaan moeten worden. Dit aantal zij voorgesteld door ${}_iT_x^y$. Blijkbaar heeft men

$${}_0T_x^y = T_{x-1}^y.$$

De wegen toch, die van O naar B gaan en met OA alleen het punt O gemeen hebben, zijn als men den eersten pas OD weglaat, juist de wegen die van D naar B voeren, zonder de diagonaal DE te overschrijden. Wij zullen nu aantoonen, dat in het algemeen de betrekking

$${}_iT_x^y = T_{x-1}^{y-i}$$

geldt.

Het aantal wegen, die van O naar B (x, y) voeren en daarbij i diagonaalpunten aandoen, komt overeen met het aantal wegen, die van O naar C (x, $y - 1$) gaan en $i - 1$ diagonaalpunten bevatten.

Om dit te bewijzen beschouwe men een weg OB met i diagonaalpunten. Door den horizontalen pas onmiddellijk links van het laatste diagonaalpunt uit te lichten en de volgorde der overige passen onveranderd te laten, verkrijgt men een weg OC met $i - 1$ diagonaalpunten, terwijl de aldus verkregen wegen OC alle verschillend zijn. Gaat men omgekeerd uit van een weg OC met $i - 1$ diagonaalpunten, dan verkrijgt men door onmiddellijk rechts van het onderste punt, dat deze weg met DE gemeen heeft, een horizontalen pas in te voegen en de volgorde der overige passen onveranderd te laten, een weg OB met i diagonaalpunten, terwijl de aldus verkregen wegen OB alle verschillend zijn. Hieruit blijkt, dat het aantal wegen OB met i diagonaalpunten overeenkomt met het aantal wegen OC met $i - 1$ diagonaalpunten, of dat men heeft

$${}_iT_x^y = {}_{i-1}T_x^{y-1}.$$

Men heeft dus in het algemeen

$${}_iT_x^y = {}_{i-1}T_x^{y-1} = {}_{i-2}T_x^{y-2} = \dots = {}_0T_x^{y-i} = T_{x-1}^{y-i} = \frac{x-y+i}{x} C_{x+y-i-1}^{y-i}.$$

Ligt het punt (x, y) in de diagonaal OA, is m. a. w. $y = x$, dan vindt men

$$ {}_iT_x^x = \frac{i}{x} C_{2x-i-1}^{x-i} \dots \dots \dots \dots \dots \quad 1). $$

Hiermede is gevonden het aantal wegen met i diagonaalpunten, die van O naar het knooppunt (x, x) voeren, waarbij wel dit knooppunt doch niet O als diagonaalpunt is meegeteld.

Dit aantal kan echter ook op andere wijze bepaald worden. Men berekene daartoe eerst het aantal wegen, die van O naar A voeren en daarbij i *bepaald aangewezen* diagonaalpunten aandoen. De afstanden dezer diagonaalpunten mogen voorgesteld worden door k_1, $k_2 \dots k_i$, waarbij dan

$$ k_1 + k_2 + \dots + k_i = x \dots \dots \dots \dots \quad 2) $$

is. Het aantal wegen, die twee op den afstand k gelegen diagonaalpunten verbinden zonder een tusschengelegen diagonaalpunt aan te doen, is

$$ {}_1T_k^k = \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} = P'_{k-1} $$

Voor het aantal wegen OA, die de aangewezen diagonaalpunten aandoen, vindt men dus

$$ P'_{k_1-1} \cdot P'_{k_2-1} \dots \dots P'_{k_i-1} $$

en voor het totale aantal wegen OA met i diagonaalpunten

$$ {}_iT_x^x = \Sigma P'_{k_1-1} \cdot P'_{k_2-1} \dots \dots P'_{k_i-1} \dots \dots \dots \quad 3), $$

waarbij de som zich uitstrekt over alle geheele positieve waarden van de getallen k, welke voldoen aan de betrekking 2).

Door de uitkomsten 1) en 3) te verbinden vindt men de identieke betrekking

$$ \Sigma P'_{k_1-1} \cdot P'_{k_2-1} \dots \dots P'_{k_i-1} = \frac{i}{x} C_{2x-i-1}^{x-i} \dots \quad 4). $$

Stelt men

$$ k_a - 1 = l_a, \; i = m, \; x = m + n, $$

dan voldoen de getallen l (die in tegenstelling met de getallen k ook nul kunnen zijn) aan de betrekking

$$ l_1 + l_2 + \dots + l_m = n $$

en gaat 4) over in

$$ \Sigma P'_{l_1} \cdot P'_{l_2} \dots P'_{l_m} = \frac{m}{n+m} C_{2n+m-1}^{n}. $$

Voor den coëfficiënt van x^n in de ontwikkeling van den gegeven vorm vindt men dus ten slotte:

$$P_n^m = \frac{m}{n+m} C_{2n+m-1}^n \qquad \text{(A. E. R.)}$$

Aanmerking van den heer W. Mantel. Met behulp van de formule

$$P_n^{m+1} = P_{n+1}^m - P_{n+1}^{m-1}$$

leidt men de volgende tabel van coëfficiënten af

m	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
— 4	1	— 4	+ 2	0	— 1	— 4
— 3	1	— 3	0	— 1	— 3	— 9
— 2	1	— 2	— 1	— 2	— 5	— 14
— 1	1	— 1	— 1	— 2	— 5	— 14
0	1	0	0	0	0	0
+ 1	1	1	2	5	14	42
+ 2	1	2	5	14	42	132
+ 3	1	3	9	28	90	297
+ 4	1	4	14	48	165	572

Vergelijkt men deze lijst met die van deel IV, blz. 63, dan ziet men dat de betrekking $P_n^m = G_{x,y}$ geldt, als men $m + n + 1 = x$ en $n + 1 = y$ stelt. Uit de ter aangehaalder plaatse gevonden waarde van $G_{x,y}$ volgt dan weer de oplossing.

Aanmerkingen van Dr. Stolp. I. De verkregen uitkomst geldt niet alleen voor geheele positieve, maar ook voor willekeurige waarden van m. Stellen we nl.

$$1 + P_1^m x + P_2^m x^2 + \ldots . = F_{(m)},$$

dan volgt uit de gelijkstelling der coëfficiënten van x^n in $F(m_1 + m_2)$ en het product van $F(m_1)$ en $F(m_2)$, als m_1 en m_2 geheele positieve getallen zijn, onmiddellijk

$$P_n^{m_1+m_2} = P_n^{m_1} + P_{n-1}^{m_1} P_1^{m_2} + P_{n-2}^{m_1} P_2^{m_2} + \ldots P_n^{m_2}.$$

Deze vergelijking is dus een identiteit. Dus is ook voor geheel willekeurige waarden van m_1 en m_2 aan deze verge-

lijking voldaan, wat insluit, dat de gevonden betrekking $F(m_1) . F(m_2) = F(m_1 + m_2)$ voor alle willekeurige waarden van m_1 en m_2 geldt. Hieruit volgt dan algemeen (zie SMAASEN, *Gronden der hoogere algebra*, § 6) de betrekking $F(m) = \{F(1)\}^m = y^m$.

II. Wil men uitgaan van de onderstelling, dat m willekeurig is, dan staan ter bepaling van den gevraagden coëfficiënt verschillende wegen open. Leidt men bijv. uit de reeksen voor y en y^m door differentieering nieuwe reeksen voor $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d(y^m)}{dx}$ af en substitueert men deze in de identieke vergelijking

$$y\frac{d(y^m)}{dx} - my^m\frac{dy}{dx} = 0,$$

dan vindt men door den coëfficiënt van x^n gelijk nul te stellen de herleidingsformule

$$P_n = \frac{m-n+1}{n}P_{n-1} + 2\frac{2m-n+2}{n}P_{n-2} + 5\frac{3m-n+3}{n}P_{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}\frac{km-n+k}{n}P_{n-k} + \ldots \frac{m}{n+1}C_{2n}^{n},$$

waarin voor P_n^m kortweg P_n geschreven is.

Een geheel andere herleidingsformule verkrijgt men door in de reeks van y^m de substitutie $x = z(1-z)$ te doen. Bij rangschikking naar de machten van z heeft men dan

$$y^m = 1 + P_1 z + (P_2 - P_1)z^2 + (P_3 - 2P_2)z^3 + (P_4 - 3P_3 + P_2)z^4 + \text{enz.}$$

Wijl hier $y = (1-z)^{-1}$ is, is eveneens

$$y^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m+1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}z^3 + \text{enz.}$$

Dus geeft gelijkstelling der coëfficiënten van z^n de herleidingsformule

$$P_n - \binom{n-1}{1}P_{n-1} + \binom{n-2}{2}P_{n-2} - \text{enz.} = \binom{m}{n},$$

die voor $n > 2$ uit minder termen bestaat [1]) dan de voorgaande.

Beide herleidingsformules geven achtereenvolgens

$$P_1 = m,\ P_2 = \frac{m(m+3)}{1.2},\ P_3 = \frac{m(m+4)(m+5)}{1.2.3},\ \text{enz.},$$

[1]) Voor $n = 2p$ of $2p+1$ bestaat het eerste lid uit $p+1$ termen.

waaruit men door inductie tot de algemeene uitkomst opklimt. In dit geval moet echter de juistheid der formule voor alle geheele waarden van n aangetoond zijn.

III. Een afzonderlijke beschouwing verdient het geval, waarin m een geheel negatief getal is. Verandert men m in $-\mu$, dan vindt men

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{\mu}=1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-3)}{1\,.\,2}x^2-\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1\,.\,2\,.\,3}+\text{enz.}$$

Is $\mu>2$, dan worden wel een of meer termen nul, doch de reeks houdt niet op; want altijd is

$$P_{\mu}^{-\mu}=-1,\quad P_{\mu+1}^{-\mu}=-\mu,\quad P_{\mu+2}^{-\mu}=-\frac{\mu(\mu+3)}{1\,.\,2},\ \text{enz.}$$

Door vervorming der vergelijking

$$P_{\mu+p}^{-\mu}=-\mu\frac{(\mu+2p-1)(\mu+2p-2)\ldots\ldots(p+1)}{1\quad.\quad2\quad\ldots\ldots(\mu+p)}$$

vindt men

$$P_{\mu+p}^{-\mu}=-\mu\frac{(\mu+2p+1)(\mu+2p-2)\ldots\ldots(\mu+p+1)}{1\quad.\quad2\quad\ldots\ldots\quad p}=-P_{p}^{\mu},$$

een merkwaardige betrekking, die ons in staat stelt het deel der reeks, dat met $P_{\mu}^{-\mu}x^{m}$ begint, afzonderlijk te sommeeren. Deze sommatie geeft

$$P_{\mu}^{-\mu}x^{\mu}+P_{\mu+1}^{-\mu}x^{\mu+1}+\text{enz.}=-x^{\mu}\left\{1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1\,.\,2}x^2+\text{enz.}\right\}=$$

$$=-x^{\mu}y^{\mu}=-\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{\mu}.$$

Dus is

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{\mu}+\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^{\mu}=1-\frac{\mu}{1}x+\ldots\ldots+P_{n}^{-\mu}x^{n}+\ldots\ldots(n<m).$$

Meer bekend is de vorm, dien men verkrijgt door $x=\frac{1}{u^2}$ te stellen en de beide leden met u^m te vermenigvuldigen. De vergelijking wordt dan

$$\left(\frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2}\right)^\mu + \left(\frac{u-\sqrt{u^2-4}}{2}\right)^\mu = u^\mu - \frac{\mu}{1}u^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu+3)}{1\,.\,2}u^{\mu-4} - \text{enz.}$$

Door de substitutie $u = 2\,\mathrm{Cos}\,\phi$ gaat het eerste lid over in $2\,\mathrm{Cos}\,m\phi$ en komt men terecht op een bekende goniometrische formule. Stelt men $u = x + \frac{1}{x}$, dan wordt het eerste lid $x^\mu + \frac{1}{x^\mu}$ en heeft men met de vergelijking te doen, die een toepassing vindt bij de oplossing van wederkeerige vergelijkingen (LOBATTO-RAHUSEN, *Hoogere Algebra*, blz. 149).

Vraagstuk CLXXXIII.

Op blz. 148 en 149 van LUCAS' *Théorie des nombres* wordt gezegd, dat de getrapte breuk (fraction étagée):

$$\cfrac{a_0}{\cfrac{a_1}{\cfrac{a_2}{\cfrac{\vdots}{a_n}}}}$$

op een aantal $t_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ verschillende wijzen kan worden opgevat. Er wordt echter niet opgemerkt, dat deze t_n opvattingen slechts tot 2^{n-1} verschillende uitkomsten voeren, zoodat elke uitkomst het resultaat is van een zeker aantal verschillende opvattingen der breuk. Zoo kan bijv. voor $n = 10$ de uitkomst

$$\frac{a_0 a_2 a_5 a_7 a_8}{a_1 a_3 a_4 a_6 a_9 a_{10}}$$

op 91 verschillende wijzen worden verkregen. Men vraagt dit aantal voor een gegeven uitkomst te bepalen. (A. E. RAHUSEN.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* A. E. RAHUSEN.

Oplossing van A. E. RAHUSEN.

1. In deel XV van het *Giornale di Matematiche*, uitgegeven door Prof. BATTAGLINI, behandelt G. DE LONGCHAMPS in een opstel „Des fractions étagées" eenige eigenschappen van getrapte breuken, en wordt aan het slot ook het hier gestelde vraag-

stuk ter sprake gebracht, doch niet opgelost. Het geheele aantal opvattingen, waarvoor een getrapte breuk vatbaar is, wordt door DE LONGCHAMPS $n!$ gesteld, terwijl LUCAS hiervoor $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ vindt. Dit verschil wordt verklaard, doordat LUCAS op het verschil in lengte van twee deelstrepen slechts dan let, als dit verschil invloed kan hebben op de waarde der breuk, dus niet als zij gescheiden zijn door een grootere deelstreep. Daarentegen denkt DE LONGCHAMPS zich de n deelstrepen alle verschillend in lengte, en houdt dus bijv. bij de breuk

$$\cfrac{\frac{a_0}{a_1}}{\frac{a_2}{a_3}},$$

waar de tweede deelstreep de grootste ondersteld is, rekening met de vraag of de eerste deelstreep kleiner dan wel grooter dan de derde is, alhoewel het antwoord op deze vraag slechts een formeele beteekenis kan hebben.

In overeenstemming met LUCAS zal in het volgende op het verschil in grootte der deelstrepen slechts gelet worden, voorzoover dit invloed heeft op de waarde der breuk, in welk geval, zooals LUCAS heeft aangetoond, het aantal opvattingen $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ bedraagt.

2. Merkt men op, dat na herleiding a_0 steeds in den teller, a_1 steeds in den noemer voorkomt en elk der overige elementen zoowel in den teller als in den noemer van de herleide breuk kan optreden, dan blijkt dat het aantal verschillende uitkomsten 2^{n-1} bedraagt.

Daar $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} > 2^{n-1}$ is voor $n > 2$, zal in het algemeen elke uitkomst het resultaat der herleiding zijn van verschillende opvattingen der breuk. Zoo wordt, voor $n = 3$, $\frac{a_0 a_2}{a_1 a_3}$ gevonden uit de herleiding zoowel van

$$\cfrac{a_0}{\cfrac{a_1}{\cfrac{a_2}{a_3}}} \quad \text{als van} \quad \cfrac{\cfrac{a_0}{\cfrac{a_1}{a_2}}}{a_3}$$

3. Onder een hoofddeelstreep moge een deelstreep verstaan worden, die grooter is dan alle volgende deelstrepen en die m. a. w. over alle volgende deelstrepen heen reikt. Het aantal hoofddeelstrepen eener breuk zal door p voorgesteld en de aanwijzer der breuk genoemd worden. Onder een B^p_n zal verstaan worden een getrapte breuk, met den aanwijzer p, die uit $n+1$ elementen bestaat. Zoo staan hierboven opgeschreven een B^3_3 en een B^1_3.

Het laatste element eener breuk komt na herleiding in den teller of in den noemer, naarmate de aanwijzer van de breuk even of oneven is.

Het bewijs van deze stelling kan gegeven worden door aan te toonen, dat als zij geldt voor een waarde $p = p_1$ zij ook geldt voor een waarde $p = p_1 + 1$, waaruit, daar de stelling blijkbaar juist is voor $p = 1$, volgt, dat zij algemeen geldig is.

Met behulp van deze stelling kan men voor elk element bepalen, of het in den teller dan wel in den noemer van de herleide breuk zal optreden. Men heeft zich daartoe slechts het deel der breuk, dat onder het beschouwde element is gelegen, weg te denken, en voor het overblijvend deel den aanwijzer te bepalen Gemakkelijk ziet men in, dat het weglaten of bijvoegen van eenige elementen onder aan een getrapte breuk geen invloed heeft op de plaats, die de overige elementen in de herleide breuk verkrijgen.

4. Letten wij nu op het aantal wijzen, waarop men onder aan een getrapte breuk, waarvan de beteekenis der deelstrepen is vastgesteld, een nieuw element kan toevoegen. Dit kan, als p de aanwijzer der gegeven breuk is, blijkbaar op $p+1$ verschillende wijzen geschieden. De aldus verkregen $p+1$ nieuwe breuken hebben respectievelijk de aanwijzers 1, 2, 3, $\ldots p+1$.

De lengte van de deelstreep toch kan zoodanig gekozen worden, dat van de p hoofddeelstrepen der gegeven breuk er k over de nieuwe deelstreep heenreiken, waardoor de nieuwe breuk $k+1$ hoofddeelstrepen verkrijgt. Daar nu voor k achtereenvolgens $0, 1, 2, \ldots p$ genomen kan worden, vindt men de bovenstaande uitkomst.

Zoo kan bijv. bij de eerste der twee hiernaast afgedrukte breuken ($p = 3$) het element a_4 op vier verschillende

wijzen aangehangen worden en zullen de nieuwe breuken respectievelijk de aanwijzers 1, 2, 3 en 4 hebben. Bij de tweede dezer breuken ($p = 1$) kan a_4 slechts op twee wijzen worden aangehangen en hebben de nieuwe breuken de aanwijzers 1 en 2.

Wenscht men, dat het nieuwe element in den teller van de herleide breuk zal optreden, dan moet de aanhanging zoodanig geschieden, dat de aanwijzer van de nieuwe breuk even is De nieuwe breuken hebben dus tot aanwijzers 2, 4, 6...p of $(p+1)$, terwijl hun aantal $\frac{p}{2}$ of $\left(\frac{p+1}{2}\right)$ bedraagt. Wenscht men daarentegen het nieuwe element in den noemer der herleide breuk te brengen, zoo moet de aanwijzer der nieuwe breuk oneven zijn. De nieuwe breuken hebben dan tot aanwijzers 1, 3, 5... $p+1$ of (p), terwijl hun aantal $\frac{p+2}{2}$ of $\left(\frac{p+1}{2}\right)$bedraagt. Hierbij hebben de tusschen haakjes geplaatste getallen betrekking op het geval, dat p oneven is.

5. Met behulp van het voorgaande kan men nu gemakkelijk een getrapte breuk opschrijven, die na herleiding een gegeven uitkomst zal opleveren. Uitgaande van de breuk $\frac{a_0}{a_1}$ hangt men telkens een volgend element op zoodanige wijze aan, dat dit de verlangde plaats in teller of noemer der herleide breuk verkrijgt.

Het aantal wijzen, waarop men hierbij te werk kan gaan, kan met behulp van den volgenden regel bepaald worden.

Men verdeele de elementen a_1 a_2 ... a_n in groepen, zoodanig dat men een nieuwe groep begint bij elk element in den noemer, dat volgt op een element in den teller. Voor het in de opgaaf gegeven voorbeeld $\frac{a_0\ a_2\ a_5\ a_7\ a_8}{a_1\ a_3\ a_4\ a_6\ a_9\ a_{10}}$ worden deze groepen:

$$(a_1\ a_2),\ (a_3\ a_4\ a_5),\ (a_6\ a_7\ a_8),\ (a_9\ a_{10}).$$

Er zijn dus hier vier groepen, respectievelijk bestaande uit 2, 3, 3, 2 elementen. Het aantal groepen moge in het algemeen door k en het aantal elementen in elke groep door m_1, m_2 ... m_k voorgesteld worden.

Men teekene nu een schaakbord aan de boven- en rechterzijde door een rechte lijn en verder door een gebroken lijn

begrensd, van zoodanigen vorm, dat de eerste m_1 kolommen één veld, de volgende m_2 kolommen twee velden enz. en eindelijk de laatste m_k kolommen k velden bevatten. Voor het bovenaangehaalde voorbeeld verkrijgt dit bord dus dezen vorm:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8
					4	9	15	22	30
								22	52

In elk veld wordt nu het getal geplaatst, dat aangeeft het aantal wegen, waarop men van het beschouwde veld uit het linkerbovenveld kan bereiken door telkens een stap naar links of naar boven te doen. Voor elk der velden in de bovenste rij is dit getal blijkbaar één, terwijl voor elk der overige velden dit getal gevonden wordt als de som der getallen geplaatst in de beide velden, die boven en links van het beschouwde veld zijn gelegen. Ook wordt elk getal gevonden door bij het getal geplaatst in het links gelegen veld alle boven dit getal in dezelfde kolom voorkomende getallen op te tellen.

De som der getallen voorkomende in de laatste kolom (1 + 8 + 30 + 52) geeft nu het gezochte aantal aan, dus hier het aantal wijzen, waarop de uitkomst $\dfrac{a_0a_2a_5a_7a_8}{a_1a_3a_4a_6a_9a_{10}}$ uit de getrapte breuk kan worden afgeleid.

Tevens leert het diagram de aanwijzers kennen van deze 91 breuken.

De achtereenvolgende getallen in de laatste kolom, van onder naar boven genomen, doen namelijk het aantal oplossingen kennen respectievelijk met de aanwijzers 1, 3, 5, enz. als het laatste element in den noemer voorkomt, of met de aanwijzers 2, 4, 6, enz. als dit element in den teller staat. Er zijn dus hier 52 B_{10}^1, 30 B_{10}^3, 8 B_{10}^5 en 1 B_{10}^7, die na herleiding de gegeven breuk opleveren.

6. Van de juistheid van den hier gegeven regel overtuigt men zich gemakkelijk, door uitgaande van de breuk $\dfrac{a_0}{a_1}$ elk der overige elementen achtereenvolgens aan te hangen met inachtneming van de aanwijzers der breuken.

Zij bijv. gevonden, dat de breuk $\frac{a_0a_2a_5a_7}{a_1a_3a_4a_6}$ het resultaat is van de herleiding van $9\,B_7^2$, van $5\,B_7^4$ en van $1\,B_7^6$.

Om nu de breuk $\frac{a_0a_2a_5a_7a_9}{a_1a_3a_4a_6}$ te verkrijgen moet men aan de eerste breuk het element a_8 toevoegen en wel zoodanig dat de nieuwe breuk een even aanwijzer verkrijgt.

Volgens het hierboven gevondene levert

elke B_7^2: één B_8^2,

elke B_7^4: één B_8^2 en één B_8^4,

elke B_7^6: één B_8^2, één B_8^4 en één B_8^6.

Men vindt dus in het geheel $(9 + 5 + 1)\,B_8^2$, $(5 + 1)\,B_8^4$ en $1\,B_8^6$. En dit zijn, blijkens de wijze, waarop de getallen in het diagram zijn bepaald, juist de getallen voorkomende in de 8ste kolom.

In het voorgaande kwam zoowel het laatste element van de gegeven breuk als het nieuw aangehangen element in den teller der herleide breuk voor. Staan deze elementen beide in den noemer, dan blijft het betoog onveranderd; slechts zullen de aanwijzers der breuken dan alle oneven zijn. Komt het laatste element van de gegeven breuk in den noemer, het nieuwe element daarentegen in den teller voor, dan zullen de getrapte breuken die de gegeven breuk opleveren oneven, die welke de nieuwe breuk opleveren daarentegen even aanwijzers bezitten.

Elke B_n^1 levert één B_{n+1}^2 op, elke B_n^3 één B_{n+1}^2 en één B_{n+1}^4 enz. Het resultaat, dat men verkrijgt, blijft echter onveranderd.

Het geval dat het laatste element van de gegeven breuk in den teller, het nieuw toegevoegde element daarentegen in den noemer voorkomt, verdient echter nadere beschouwing.

Zij gevonden, dat de breuk $\frac{a_0a_{\cdot}a_5a_7a_8}{a_1a_3a_4a_6}$ het resultaat is van de herleiding van $15\,B_8^2$, van $6\,B_8^4$ en van $1\,B_8^6$. Om nu de breuk $\frac{a_0a_2a_5a_7a_8}{a_1a_3a_4a_6a_9}$ te verkrijgen moet het element a_9 zoodanig aangehangen worden, dat de nieuwe breuk een oneven aanwijzer verkrijgt. Daarbij levert

elke B_8^2: één B_9^1 en één B_9^3,

elke B_8^4: één B_9^1, één B_9^3 en één B_9^5,

elke B_8^6: één B_9^1, één B_9^3, één B_9^5 en één B_9^7.

De nieuwe breuk is dus het resultaat van de herleiding van $(15+6+1)\,B_9^1$, van $(15+6+1)\,B_9^3$, van $(6+1)\,B_9^5$ en van $1\,B_9^7$. welke getallen juist die zijn, voorkomende in de negende kolom van het diagram.

Hieruit blijkt, dat het aantal regels van het diagram met één verminderd moet worden, telkens als een element in den noemer volgt op een element, dat in den teller voorkomt.

Vraagstuk CLXXXIV.

Twee punten P en Q doorloopen een zelfden grooten cirkel van een bol met snelheden v en $-2v$ ($2v$ in tegengestelde richting). Gevraagd de meetkundige plaats der lijn l door Q evenwijdig getrokken aan de verbindingslijn van een der polen O van dien cirkel met den overeenkomstigen stand van P (scheef oppervlak van den zesden graad). Aan te toonen, dat de dubbelkromme van dit oppervlak zich splitst in vier kegelsneden. De schijnbare omtrek van dit oppervlak met betrekking tot O te onderzoeken (vergelijk STEINER's beroemde verhandeling „Ueber eine besondere Curve dritter Classe und vierten Grades", Crelle's *Journal*, deel 53, blz. 231). (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing.

1. Beschouwen we de rechte lijn l als de verbindingslijn van Q (fig. 86) met het oneindig ver gelegen punt R van OP, dan is het gevraagde oppervlak de meetkundige plaats van de verbindingslijn QR van overeenkomstige punten Q en R van twee cirkels, nl. van de punten Q van den gegeven grooten cirkel en de punten R van den cirkel volgens welken de kegel met O tot top en den gegeven cirkel, van den bol tot richtlijn het vlak in het oneindige snijdt. Wijl bij een willekeurig aangenomen punt P één bepaald punt Q behoort, omgekeerd echter een willekeurig punt Q twee diametraal tegenover elkaar liggende punten P doet vinden, bestaat er tusschen de punten Q, R een overeenkomst (1, 2). Boven-

dien hebben de twee cirkels, waarlangs Q en R zich bewegen, twee onbestaanbare punten I en J in het oneindige met elkaar gemeen en vallen de beide punten R in J of I samen, als men Q in I of J aanneemt. Door projectieve overbrenging neemt het onderzoek naar de meetkundige plaats van l den volgenden vorm aan:

„Gegeven twee kegelsneden K_q en K_r (fig. 87) in verschil„lende vlakken ϕ en ρ, die de snijlijn hunner vlakken in „dezelfde punten I en J ontmoeten, en op K_q een puntenreeks „(Q), op K_r een met deze puntenreeks projectieve kwadra„tische involutie (R_1, R_2) met de dubbelpunten I en J. Ge„vraagd de meetkundige plaats der verbindingslijnen QR_1, QR_2, „als Q in I of J valt, wanneer R_1 en R_2 in J of I vereenigd „liggen."

De graad dezer meetkundige plaats volgt onmiddellijk uit haar doorsnee met ϕ of ρ. Wijl door een willekeurig punt Q twee beschrijvende lijnen QR_1 en QR_2 gaan, is K_q een dubbelkromme van het oppervlak en bestaat de doorsnee met ϕ uit deze dubbel tellende kegelsnee en de eveneens dubbel tellende rechte I, J. Wijl door een willekeurig punt R een enkele beschrijvende lijn gaat, is K_r een enkelvoudige kromme van het oppervlak en bestaat de doorsnee met ρ uit deze eenmaal tellende kegelsnee en de viermaal tellende rechte I, J. Beide doorsneden zijn van den zesden graad; dus is het gevraagde oppervlak dit ook.

2. Natuurlijk maakt de kromme K_q deel uit van de dubbelkromme van het oppervlak. Verder is het duidelijk, dat twee beschrijvende lijnen $Q'R'$ en $Q''R''$ elkaar buiten ϕ snijden of elkaar kruisen zullen, naarmate $Q'Q''$ en $P'P''$ evenwijdig zijn of niet. Is nu S (fig. 88) een der drie punten van samenvalling van P en Q en zijn P', Q' willekeurige standen van P, Q, dan zullen de spiegelbeelden P'', Q'' van P', Q' met betrekking tot de middellijn MS eveneens bij elkaar behoorende standen van P, Q zijn en hiermee twee standen $Q'R'$ en $Q''R''$ in verband staan, waarvoor $Q'Q''$ en $P'P''$ evenwijdig loopen. Het snijpunt der elkaar snijdende beschrijvende lijnen ligt dan in het vlak OMS. Dit vlak bevat dus een tweede dubbelkromme en behalve deze twee beschrijvende lijnen; dus is de dubbelkromme een kegelsnee. Op deze wijze vinden we nog drie dubbelkegelsneden gelegen in de vlakken OMS_1, OMS_2, OMS_3.

3. Beschouwt men O (fig. 86) als centrum van centrale projectie, en het vlak van den grooten cirkel des bols als tafreel, dan is l de lijn, die PQ tot projectie en daarin P tot vluchtpunt, Q tot snijpunt heeft. De door O gaande raakvlakken aan de meetkundige plaats der lijnen l snijden het tafreel dan volgens de lijnen PQ; de door PQ omhulde hypocycloïde met drie keerpunten is dus de richtlijn van den kegel, die voor O de schijnbare omtrek bepaalt.

AANMERKING. Het is niet moeielijk de bovenstaande synthetisch verkregen uitkomsten door berekening te bevestigen. Neemt men M tot oorsprong, MO tot z-as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan en legt men de x-as door een der drie coïncidentiepunten S van P en Q, dan is, als hoek PMX door ϕ voorgesteld wordt, de vergelijking van QR

$$\frac{x - a \operatorname{Cos} 2\phi}{\operatorname{Cos} \phi} = \frac{y + a \operatorname{Sin} 2\phi}{\operatorname{Sin} \phi} = -\frac{z}{1}$$

en vindt men dus de vergelijking der meetkundige plaats door ϕ te elimineeren uit

$$x - a \operatorname{Cos} 2\phi + z \cos \phi = 0, \quad y + a \operatorname{Sin} 2\phi + z \operatorname{Sin} \phi = 0$$

of, als t voor $e^{i\phi}$ gesubstitueerd wordt, uit

$$x + iy + zt - at^{-2} = 0, \quad x - iy + zt^{-1} - at^2 = 0.$$

Leiden we hieruit eerst de betrekkingen

$$a(x+iy)t^2+z(x-iy)t+z^2-a^2=0, \; (z^2-a^2)t^2+z(x+iy)t+a(x-iy)=0$$

af, dan geeft verder de gewone eliminatiemethode de uitkomst

$$\begin{vmatrix} a(x+iy) & z(x-iy) & z^2-a^2 & 0 \\ 0 & a(x+iy) & z(x-iy) & z^2-a^2 \\ z^2-a^2 & z(x+iy) & a(x-iy) & 0 \\ 0 & z^2-a^2 & z(x+iy) & a(x-iy) \end{vmatrix} = 0.$$

Dit herleidt zich na deeling door $(z^2 - a^2)$ tot

$$(z^2-a^2)^3-(z^2-a^2)(z^2+2a^2)(x^2+y^2)+2axz^2(x^2-3y^2)-a^2(x^2+y^2)^2=0.$$

Vraagstuk CLXXXV.

Voor welke punten P in het vlak van driehoek ABC is het product AP . BP . CP een minimum? (N. CH. SPYKER.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* A. A. NYLAND.

Oplossingen.

I. Natuurlijk voldoen de hoekpunten aan de vraag. Zoekt men naar andere punten P, dan moeten deze voldoen aan de vergelijking

$$\partial\,(\log\ AP + \log\ BP + \log\ CP) = 0\,,$$

of

$$\frac{\partial\,.\,AP}{AP} + \frac{\partial\,.\,BP}{BP} + \frac{\partial\,.\,CP}{CP} = 0$$

en vindt men dus de bekende twee evenwichtspunten voor krachten, die volgens PA, PB, PC gericht en omgekeerd evenredig zijn met PA, PB, PC. Als men de tweede differentiaal van $\log AP + \log BP + \log CP$ in rechthoekige coördinaten berekent, blijkt echter spoedig, dat deze punten geen minima opleveren.

Men kan dit laatste ook als volgt duidelijk maken. De uitdrukking $u = \log AP\,.\,BP\,.\,CP$ is het bestaanbare deel van $\log \overline{AP}\,.\,\overline{BP}\,.\,\overline{CP}$, waarin $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ vectoren aanduiden. Dus is u het bestaanbare deel eener functie van de complexe veranderlijke $x + iy$, die de ligging van P aanwijst, en voldoet zij als zoodanig aan de bekende differentiaalvergelijking $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Wijl $\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$ dus tegengestelde teekens hebben, kan u onmogelijk maximum of minium zijn (W. M.)

II. We nemen A tot oorsprong aan van een willekeurig rechthoekig coördinatenstelsel AX, AY (fig. 89) en duiden de complexe vectoren van AB, AC, AP door β, γ, z, de complexe vectoren van hun spiegelbeelden AB′, AC′, AP′ met betrekking tot de x-as door β', γ', z' aan. Dan is

$$z(z - \beta)\,(z - \gamma)\ .\ z'(z' - \beta')\,(z' - \gamma')$$

het vierkant van den modulus van AP . BP . CP en dus het vierkant van het product der afstanden AP, BP, CP.

Voorwaarde van het vraagstuk is dus, dat

$$u = z(z - \beta)\,(z - \gamma)\ .\ z'(z' - \beta')\,(z' - \gamma')$$

minimum is, met betrekking tot de beide veranderlijken x en y, waarvoor men ook wel z en z' mag aannemen. Wijl $\log u$ eveneens minimum moet zijn, vinden we dus de beide voorwaarden:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-\beta} + \frac{1}{z-\gamma} = 0, \quad \frac{1}{z'} + \frac{1}{z'-\beta'} + \frac{1}{z'-\gamma'} = 0,$$

die, zoo als gemakkelijk blijkt, tot de twee zelfde punten P voeren. De eerste geeft

$$3z^2 - 2(\beta + \gamma)z + \beta\gamma = 0$$

d. i.

$$3z = \beta + \gamma \pm \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + \beta\gamma}.$$

Voor $\xi^2 = (\beta - \gamma)^2 + \beta\gamma$ is P dus het zwaartepunt van een der drietallen (B, C, Z_1), (B, C, Z_2), waarbij Z_1 en Z_2 de punten met de complexe vectoren ξ en $-\xi$ zijn.

Stellen we $\beta - \gamma = \alpha$ d. i. de complexe vector van AC_1 gelijk en evenwijdig aan CB, $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ d. i. de complexe vector van het punt D, waarvoor de driehoeken AC_1B en ACD gelijkvormig zijn, en $\varepsilon = \alpha + \delta$ d. i. de complexe vector van het vierde hoekpunt E van het parallelogram C_1ADE, dan gaat $\xi^2 = (\beta - \gamma)^2 + \beta\gamma$ over in $\xi^2 = \alpha^2 + \alpha\delta = \alpha\varepsilon$ en wordt Z dus bepaald door de voorwaarde, dat de driehoeken C_1AZ en ZAE gelijkvormig zijn. Dus is Z gelegen op de deellijn van hoek C_1AE op een afstand middenevenredig tusschen de afstanden AC_1 en AE, waardoor de twee punten Z_1 en Z_2 gevonden worden. Uit deze leidt men dan weder de beide punten P_1 en P_2 af, die oplossingen van de vraag kunnen wezen. Of ze dit zijn, moeten de tweede differentiaalquotienten beslissen (A. A. N.).

Aanmerkingen I. Door gewone toepassing der differentiaalrekening vindt men na een vrij ingewikkelde herleiding de betrekking

$$AP \,.\, \text{Sin}\, BPC = BP \,.\, \text{Sin}\, CPA = CP \,.\, \text{Sin}\, APB,$$

waaraan de brandpunten van Steiner voldoen. Deze uitkomst stemt met de beide boven gevondene overeen. Eerstens is in Vraagstuk 92 van deel IV aangetoond, dat het punt Z in evenwicht onder de werking van drie krachten gericht naar P, Q, R en omgekeerd evenredig met PZ, QZ, RZ een der beide brandpunten van Steiner is. En ten tweede is daar aangewezen, dat deze punten aan de betrekking $\frac{1}{PZ} + \frac{1}{QZ} + \frac{1}{RZ} = 0$ voldoen (N. Ch. S.).

II. Maken we gebruik van de notatie van vraagstuk 136 dezer reeks, dan vinden we, dat de voorwaarde

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{BP} + \frac{1}{CP} = 0$$

overgaat in

$$\frac{1}{z - (\xi_1 + i\eta_1)} + \frac{1}{z - (\xi_2 + i\eta_2)} + \frac{1}{z - (\xi_3 + i\eta_3)} = 0$$

of

$$3z^2 + (\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2) - (\eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 + \eta_1\eta_2) = 0.$$

Hieruit volgt dadelijk, dat in $z = \xi + i\eta$ de η nul is, P_1 en P_2 dus liggen op de groote as der ellips van STEINER, enz.

(RED.)

Vraagstuk CLXXXVI.

Zet men op de raaklijnen uit een punt P aan een kegelsnee getrokken van P af naar het raakpunt toe stukken PG en PG′ uit, die gelijk zijn aan de afstanden PF en PF′ van P tot de brandpunten der kegelsnee, dan stelt GG′ de lengte der brandpuntenas van de kegelsnee voor. Men vraagt het bewijs. (N. CH. SPIJKER.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* N. CH. SPIJKER.

Oplossing.

Zijn R en R′ (fig. 90) de raakpunten en is H het spiegelbeeld van F′ ten opzichte van PR′, dan liggen F, R′, H in een rechte lijn en is FH = FR′ ± F′R′ de brandpuntenas der kegelsnee. Uit de onmiddellijk aanwijsbare congruentie der driehoeken GPG′ en FPH volgt dan het gestelde.

AANMERKING. Deze stelling rechtvaardigt de constructie in de oplossing van Vraagstuk 114 der vorige reeks voor de isoptische kromme gegeven (N. CH. S.).

Vraagstuk CLXXXVII.

De projectie van een kegelsnee K uit een punt C buiten haar vlak V op een ander vlak V′ is K′. Gevraagd de punten

van V, die zich als middelpunt, toppen en brandpunten van K′ projecteeren. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. DE VRIES.

Oplossing.

Door C brengen wij een vlak aan evenwijdig aan het projectievlak. Snijdt dit vlak het vlak van K volgens de rechte r en is R de pool van r ten opzichte van K, dan is de centrale projectie R′ van R het middelpunt van K′, want de poollijn r' van R′ ligt in het oneindige. Zoeken wij verder de poolinvolutie van r ten opzichte van K en in deze involutie het paar R_1R_2, dat uit C onder een rechten hoek wordt gezien, dan zijn de projecties der lijnen RR_1, RR_2 de assen en de projecties van haar snijpunten met K de toppen van K′.

Ten einde de punten te vinden, wier projecties de brandpunten van K′ zijn, hebben wij de punten op te sporen, die de eigenschap hebben, dat de projectie hunner poollijneninvolutie rechthoekig wordt, m. a. w. dat de involutie, die op r ontstaat, wanneer wij de poollijneninvolutie door deze rechte snijden, uit C door een rechthoekige involutie geprojecteerd wordt. Is te dien einde A_1 een willekeurig punt van r en A_2 een tweede punt van r zoodanig, dat hoek A_1CA_2 recht is, en trekt men door A_1 een willekeurigen straal g, dan zal de verbindingslijn van A_2 met de pool G van g den straal g in een punt P snijden met de eigenschap, dat van zijn poollijneninvolutie één stralenpaar, nl. g, A_2G, door de punten A_1 en A_2 gaat en dus als rechthoekig paar wordt geprojecteerd. De verwantschap tusschen de stralen g en A_2G is wederkeerig; draait g om A_1, dan zal P dus een kegelsnee doorloopen, die door A_1 en A_2 gaat en in deze punten de lijnen A_1R, A_2R tot raaklijnen heeft; alle punten van deze kegelsnee deelen de eigenschap van het punt P. Is B_1, B_2 een tweede puntenpaar op r zoodanig, dat hoek B_1CB_2 recht is, dan zal, wanneer men de zooeven beschreven constructie herhaalt, een tweede kegelsnee ontstaan, die door B_1 en B_2 gaat, in deze punten de lijnen B_1R, B_2R aanraakt en waarvan alle punten de eigenschap bezitten, dat één stralenpaar van hun poollijneninvolutie door B_1, B_2 gaat en dus uit C als rechthoekig paar wordt geprojecteerd. De vier snijpunten dezer twee kegelsneden ver-

eenigen beide eigenschappen en zijn dus de gezochte punten. Zij kunnen met passer en liniaal worden geconstrueerd, omdat zij paarsgewijze op de lijnen RR_1, RR_2 moeten liggen. Twee zijn steeds reëel, de beide andere steeds toegevoegd onbestaanbaar en dus door een elliptische involutie bepaald. De projecties hunner poollijnen, welke laatste elkaar paarsgewijze in R_1 en R_2 snijden, zijn de vier richtlijnen van K'.

Vraagstuk CLXXXVIII.

Gegeven een kwadratisch oppervlak F^2, een punt P en een vlak V. Gevraagd alle vlakken, die F^2 snijden volgens kegelsneden, welke zich uit P op V projecteeren als

a) cirkels,

b) gelijkzijdige hyperbolen. (H. DE VRIES.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Moest de projectie door twee gegeven punten M en N van V gaan, dan zou men PM en PN trekken en de snijpunten M_1, M_2 en N_1, N_2 van deze lijnen met F^2 zoeken. Elk vlak door M_1N_1, M_2N_1, M_1N_2, of M_2N_2 zou dan aan de vraag voldoen.

a). Hier zijn M en N de onbestaanbare cirkelpunten van V en de punten M_1, M_2 en N_1, N_2 dus onbestaanbaar. Deze punten zijn echter twee aan twee toegevoegd onbestaanbaar, bijv. M_1 en N_1, M_2 en N_2, zoodat de verbindingslijnen M_1N_1, M_2N_2 bestaanbaar zijn. Elk vlak door een dezer beide bestaanbare rechten voldoet aan de vraag. Omtrent de constructie der lijnen M_1N_1 en M_2M_2 vergelijke men Vraagstuk 86 van deel IV.

b) Hier zijn M en N een paar oneindig verre punten van V in onderling loodrechte richtingen en omhullen de lijnen M_1N_1, M_2N_1, M_1N_2, M_2N_2 in het vlak door P evenwijdig aan V een kegelsnee *k*. Elk raakvlak aan *k* voldoet aan de vraag. Omtrent de kegelsnee *k* vergelijke men Vraagstuk 68 van deel II.

Vraagstuk CLXXXIX.

Van een kromme van den vijfden graad met drievoudig punt D gaan, in het algemeen, acht raaklijnen door D. Men vraagt te bewijzen, dat men door de raakpunten dier raaklijnen drie kubische krommen kan brengen, die in D een buigpunt hebben en daar door de raaklijn aan een der drie takken worden aangeraakt.

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

Wordt de coördinaten-driehoek zoo gekozen, dat $x=0$, $y=0$ twee der raaklijnen in D voorstellen, terwijl $z=0$ de vijfde snijpunten d_1 en d_2 dier raaklijnen en de kromme met elkaar verbindt, dan neemt de vergelijking der kromme den vorm

$$\Phi_5 \equiv (ax+by)\,xyz^2 + 2zu_4 + xyu_3 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 1)$$

aan, waarin u_3 en u_4 in x en y gelijkslachtige vormen van de graden der indices aanduiden. Schrijft men hiervoor

$$(ax+by)\,xy\Phi_5 \equiv [(ax+by)\,xyz + u_4]^2 + (ax+by)\,x^2y^2u_3 - u_4{}^2 = 0,$$

dan blijkt, dat de gelijkslachtige achtstemachts-vergelijking $(ax+by)\,x^2y^2u_3 - u_4{}^2 = 0$ de acht raaklijnen voorstelt, die men uit D aan Φ_5 kan trekken, terwijl de raakpunten ρ_k worden ingesneden door de kromme

$$\Pi_4 \equiv (ax+by)\,xyz + u_4 = 0,$$

die dus de eerste poolkromme van D voorstelt, zooals dit trouwens ook uit 1) volgt.

Nu stelt $\Phi_5 + \lambda z\Pi_4 = 0$ een bundel krommen van den vijfden graad voor, die in D een gemeenschappelijk drievoudig punt met gemeenschappelijke raaklijnen ($x=0$, $y=0$, $ax+by=0$) hebben, door de acht punten ρ_k en de beide punten d_1, d_2 gaan en nog drie op $z=0$ gelegen gemeenschappelijke punten d_3, d_4, d_5 bezitten, die door $u_3=0$ en $z=0$ bepaald zijn. Voor $\lambda=-2$ vindt men een kromme van den vijfden graad, die uit $x=0$, $y=0$ en de kubische kromme

$$\Psi_3 \equiv u_3 - (ax+by)\,z^2 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 2)$$

is samengesteld. Deze Ψ_3 gaat door ρ_k, d_3, d_4, d_5 en heeft

in D een buigpunt met $ax + by = 0$ tot buigraaklijn. Door herhaling van deze redeneering na verwisseling van de raaklijn $ax + by = 0$ met een der andere, vindt men, dat er drie krommen Ψ_3 gaan door D en de acht punten ρ_k, die D tot buigpunt hebben, en de overeenkomstige drie buigraaklijnen met de raaklijnen van Φ_5 in D samenvallen. Anders gezegd, de bundel van kubische krommen met de negen vaste punten D, ρ_k bevat drie krommen, waarvoor D een buigpunt is, enz.

Uit de vergelijking 2) volgt, dat de eerste kromme Ψ_3 door de punten $z = 0$, $u_3 = 0$, d. i. door de punten d_3, d_4, d_5 gaat. Dus zijn we in staat de 15 snijpunten van Ψ_3 met de oorspronkelijke Φ_5 volledig aan te wijzen. Het punt D telt voor vier snijpunten, wijl het drievoudig punt is van Φ_5, enkelvoudig punt van Ψ_3 en de buigraaklijn van Ψ_3 in dit punt met een der drie raaklijnen van Φ_5 in D samenvalt. Behalve dit punt D en de acht punten ρ_k zijn d_3, d_4, d_5 nog aan Φ_5 en Ψ_3 gemeen; dus zijn de vijftien gemeenschappelijke punten verantwoord.

Vraagstuk CXC.

Aan te toonen, dat een ruimtekromme van den vijfden graad en het tweede geslacht slechts één involutie van puntenparen draagt en er bijzondere krommen zijn, waarop elk paar dier involutie met elk ander paar door een vlak kan vereenigd worden.

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

Een ruimtekromme $R_{5,2}$ wordt uit een op haar gelegen punt geprojecteerd in eene vlakke kromme $C_{4,2}$ met een dubbelpunt; bijgevolg gaat door elk van haar punten één trisecante T. De vlakken door T snijden een involutie van puntenparen in, welke zes dubbelpunten heeft, overeenkomende met de zes raaklijnen aan $C_{4,2}$ uit haar dubbelpunt.

Een tweede pareninvolutie zou den vlakkenbundel door T rangschikken in een symmetrische (2, 2)-overeenkomst, die, blijkens het bovenstaande, zes vertakkingsvlakken zou bezitten, dus twee meer dan bij zulk een verwantschap mogelijk is.

De boven gevonden involutie wordt dus door elken vlakkenbundel ingesneden, die een trisecante tot as heeft. De verbindingskoorden harer paren zijn de beschrijvende lijnen, de trisecanten de richtlijnen van een hyperboloide, waarop de kromme ligt.

Brengt men een kubisch oppervlak door T en 15 punten van R, dan bevat dit de geheele kromme. Men kan dus R beschouwen als doorsnede van een kwadratisch en een kubisch oppervlak, die een rechte gemeen hebben.

Neemt men een kwadratisch kegelvlak, dan ontstaat een $R_{5,4}$ waarvan alle trisecanten door den top gaan en elk een paar der involutie dragen. Dan liggen dus elke twee paren in één vlak.

Vraagstuk CXCI.

Gegeven de betrekkingen

$$\mathrm{Tg}(y+z).(\mathrm{Tg}y+\mathrm{Tg}z)=\mathrm{Tg}(z+x).(\mathrm{Tg}z+\mathrm{Tg}x)=\mathrm{Tg}(x+y).(\mathrm{Tg}x+\mathrm{Tg}y).$$

Door oplossing leidt men hieruit $f(x)=f(y)=f(z)$ af. Welken vorm heeft $f(x)$? (G. DE LONGCHAMPS).

Opgelost *door* G. DE LONGCHAMPS.

Oplossing.

1. Onmiddellijk vindt men

$$\frac{\mathrm{Sin}^2(z+x)}{\mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,(z+x)}=\frac{\mathrm{Sin}^2(x+y)}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,(x+y)}$$

of

$$\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,(x+y)-\mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Cos}\,(x+z)=$$
$$=\mathrm{Cos}\,(x+y)\,\mathrm{Cos}\,(x+z)\,\{\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Cos}\,(x+z)-\mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Cos}\,(x+y)\},$$

d.i.

$$\mathrm{Cos}\,(x+2y)-\mathrm{Cos}\,(x+2z)=$$
$$=\mathrm{Cos}\,(x+y)\,\mathrm{Cos}\,(x+z)\,\{\mathrm{Cos}\,(x-y+z)-\mathrm{Cos}\,(x+y-z)\},$$

wat zich herleidt tot

$$\frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,(y+z)}=-\frac{\mathrm{Sin}\,(x+y+z)}{\mathrm{Cos}\,(y+z)\,\mathrm{Cos}\,(z+x)\,\mathrm{Cos}\,(x+y)}\;..\;1).$$

Wijl het tweede lid symmetrisch is, volgt hieruit

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos}(y+z)} = \frac{\operatorname{Sin} y}{\operatorname{Cos}(z+x)} = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos}(x+y)} \quad \ldots . \; 2),$$

wat een eerste transformatie der gegeven vergelijkingen voorstelt.

2. Uit 1) volgt

$$\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin}(x+y+z) =$$

$$= \operatorname{Cos}^2 x \operatorname{Cos}(x+y) \operatorname{Cos}(x+z) - \operatorname{Cos}(x+y) \operatorname{Cos}(x+z)$$

of

$$\operatorname{Cos}(y+z) + \operatorname{Cos}(y-z) = 2\operatorname{Cos}^2 x \operatorname{Cos}(x+y) \operatorname{Cos}(x+z),$$

d.i.

$$\operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} z = \operatorname{Cos}^2 x \;\; \operatorname{Cos}(x+y) \operatorname{Cos}(x+z).$$

Hieruit volgt

$$\frac{\operatorname{Cos}^3 x}{\operatorname{Cos}(y+z)} = \frac{\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos}(y+z) \operatorname{Cos}(z+x) \operatorname{Cos}(x+y)}$$

en dus ook

$$\frac{\operatorname{Cos}^3 x}{\operatorname{Cos}(y+z)} = \frac{\operatorname{Cos}^3 y}{\operatorname{Cos}(z+x)} = \frac{\operatorname{Cos}^3 z}{\operatorname{Cos}(x+y)} \quad \ldots \ldots \; 3).$$

3. Uit de beide transformaties 2) en 3) volgt nu onmiddellijk

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos}^3 x} = \frac{\operatorname{Sin} y}{\operatorname{Cos}^3 y} = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos}^3 z} \quad \ldots \ldots \; 4),$$

of, als men wil,

$$\frac{d\,(\operatorname{Tg}^2 x)}{dx} = \frac{d\,(\operatorname{Tg}^2 y)}{dy} = \frac{d\,(\operatorname{Tg}^2 z)}{dz} \quad \ldots . \; 5).$$

In de vergelijkingen 4) en 5) zijn de veranderlijken gescheiden.

Aanmerking van Dr. P. H. Schoute. Is het de vraag de gegeven vergelijkingen op te lossen, dan kan men als volgt redeneeren:

1. Stellen we eenvoudigheidshalve $\operatorname{Tg} x = a$, $\operatorname{Tg} y = b$, $\operatorname{Tg} z = c$, dan gaan de gegeven betrekkingen over in

$$\frac{(b+c)^2}{1-bc} = \frac{(c+a)^2}{1-ca} = \frac{(a+b)^2}{1-ab}$$

en herleidt het vraagstuk zich dus tot het zoeken van den vorm der functie f in de gelijkwaardige vergelijkingen $f(a) = f(b) = f(c)$.

Door voorloopig de laatste breuk weg te laten vinden we

$$(b+c)^2(1-ca) = (c+a)^2(1-bc),$$

of

$$b^2 - a^2 + 2c(b-a) + c^3(b-a) - abc(b-a) = 0,$$

d. i.

$$(b-a)\{a+b+2c+c^3-abc\} = 0.$$

We hebben dus achtereenvolgens rekening te houden met de beide mogelijkheden $a=b$ en $a+b+2c+c^3-abc=0$.

2. Is $a=b$, dan geeft de weglating der eerste breuk

$$(b+c)^2(1-b^2) = 4b^2(1-bc)$$

en dus

$$(1-b^2)c^2 + 2b(1+b^2)c - b^2(3+b^2) = 0,$$

of

$$(1-b^2)c = -b(1+b^2) \pm 2b.$$

We vinden ook hier dus weer twee gevallen. Het plusteeken voert tot $c=b$, wat met het bovenstaande de op zich zelf duidelijke symmetrische oplossing $\text{Tg}x = \text{Tg}y = \text{Tg}z$ oplevert. Het minusteeken geeft

$$c = \frac{b(b^2+3)}{b^2-1}.$$

Hieruit volgen de drie asymmetrische oplossingen

$$\text{Tg}\,x = \text{Tg}\,y = \frac{\text{Tg}\,z(\text{Tg}^2 z + 3)}{\text{Tg}^2 z - 1},$$

$$\text{Tg}\,x = \frac{\text{Tg}\,y(\text{Tg}^2 y + 3)}{\text{Tg}^2 y - 1} = \text{Tg}\,z,$$

$$\frac{\text{Tg}\,x(\text{Tg}^2 x + 3)}{\text{Tg}^2 x - 1} = \text{Tg}\,y = \text{Tg}\,z.$$

3. Zijn geen twee der drie grootheden x, y, z aan elkaar gelijk, dan vinden we

$$\left.\begin{aligned} a + b + 2c + c^3 - abc &= 0 \\ a + 2b + c + b^3 - abc &= 0 \\ 2a + b + c + a^3 - abc &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Trekken we de tweede vergelijking van de eerste af, dan komt er

$$(c-b)\{1 + c^2 + cb + b^2\} = 0.$$

Wijl $c=b$ enz. afgehandeld is, vinden we hier dus

$$\left.\begin{array}{l} b^2 + bc + c^2 = -1 \\ c^2 + ca + a^2 = -1 \\ a^2 + ab + b^2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Trekken we de tweede vergelijking van de eerste af, dan is

$$(b - c)(a + b + c) = 0,$$

waaruit dus volgt

$$a + b + c = 0.$$

Uit $b + c = -a$ volgt $b^2 + 2bc + c^2 = a^2$. Wijl $b^2 + bc + c^2$ de waarde -1 heeft, is dus

$$bc = a^2 + 1, \quad ca = b^2 + 1, \quad ab = c^2 + 1$$

zoodat de drie gegeven breuken de waarde -1 hebben. Hieraan voldoen, zoo als door oplossing van b uit $b^2 + bc + c^2 = -1$ blijkt, geen bestaanbare vormen. We vinden dus in het geheel een symmetrische en drie asymmetrische oplossingen.

Vraagstuk CXCII.

Is van een stangenvierhoek ABCD met de zijden $AB = AD = c$ en $CB = CD = a$ het paar hoekpunten A, B vast, dan zal het brandpunt der ingeschreven parabool bij beweging van den vierhoek in zijn vlak een cirkel doorloopen. Men vraagt het bewijs.

(J. NEUBERG).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, E. JENSEMA, J. NEUBERG *en* W. A. VERSLUYS.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Uit de symmetrie volgt, dat de as der parabool (fig. 91) langs de diagonaal AC valt. Is het punt F van AC het brandpunt, dan is de vereenigingslijn PQ van de voetpunten der uit F op BC en AD neergelaten loodlijnen de topraaklijn, het snijpunt H van PQ met AC de top. Duidt men door ϕ, ψ de in de figuur aangewezen hoeken aan, en is AF door ρ voorgesteld, dan is

$$HF = PF \operatorname{Sin} \psi = CF \operatorname{Sin}^2 \psi, \; HF = QF \operatorname{Sin} \phi = \rho \operatorname{Sin}^2 \phi$$

en dus

$$\mathrm{CF} = \rho \frac{\mathrm{Sin}^2 \phi}{\mathrm{Sin}^2 \psi} = \frac{a^2}{c^2} \rho,$$

waaruit volgt

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AF} - \mathrm{CF} = \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \rho.$$

Voegen we deze waarde van AC in de betrekking

$$a^2 = c^2 + \mathrm{AC}^2 - 2c \,.\, \mathrm{AC} \,.\, \mathrm{Cos}\, \phi$$

in, dan vinden we voor de vergelijking van de meetkundige plaats in poolcoördinaten

$$a^2 c^4 = c^6 + (c^2 - a^2)^2 \rho^2 - 2c^3 (c^2 - a^2) \rho \,\mathrm{Cos}\, \phi$$

en dus na deeling door $c^2 - a^2$ voor rechthoekige coördinaten met A tot oorsprong en AB tot x-as

$$(c^2 - a^2)(x^2 + y^2) - 2c^3 x + c(c^2 + a^2) = 0,$$

een cirkel, enz.

Oplossing *van* J. NEUBERG. [1])

Zijn E en F (fig. 92) de snijpunten der paren overstaande zijden (AD, BC) en (AB, CD) van een willekeurigen stangenvierhoek, dan zullen de cirkels omschreven aan de driehoeken EAB, ECD, FBC, FAD elkaar snijden in het brandpunt P van de in den vierhoek beschreven parabool. Dus zijn de driehoeken PAD en PBC gelijkvormig; want de hoekenparen (PAE, PBE) en (PDE, PCE) onderspannen in de cirkels EABP en EDCP dezelfde bogen. Hieruit volgt $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}}$ en dus, dat de verhouding van PA tot PB standvastig is en P, als A en B vast zijn, een cirkel beschrijft, waarvan het middelpunt op AB ligt.

AANMERKINGEN VAN DEN HEER NEUBERG. I. Men kan bij het bewijs ook als volgt te werk gaan. Als de raaklijn in P aan den cirkel EAB de lijn AB in X snijdt, volgt uit de gelijkvormigheid der gelijkhoekige driehoeken XPA en XBP

---

[1]) Het bijzondere geval, in het vraagstuk bedoeld, is door den inzender gevonden voor het hem bekend was, dat L. BURMESTER in het *Zeitschrift von* SCHÖMILCH *und* CANTOR (1893, p. 193–223) de overeenkomstige stelling voor een willekeurigen stangenvierhoek reeds bewezen had. Hier volgt een eenvoudige rechtstreeksche oplossing van het algemeene geval.

$$\frac{PA}{PB} = \frac{XA}{XP} = \frac{XP}{XB} = \sqrt{\frac{XA}{XP} \cdot \frac{XP}{XB}} = \sqrt{\frac{XA}{XB}}$$

en dus, zoo als bekend is,

$$\frac{XA}{XB} = \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{BC}^2}, \ \overline{XP}^2 = XA \, . \, XB;$$

derhalve zijn $\frac{XA}{XB}$ en XP beide standvastig en beschrijft P bij de vervorming van den stangenvierhoek dus een cirkel om het vaste punt X als middelpunt.

Evenzoo verdeelt de raaklijn in P aan den cirkel ECD de zijde CD in Y in twee stukken CY en DY, die tot elkaar staan als BC^2 tot AD^2, en is YP onveranderlijk. En als de raaklijnen in P aan de cirkels FBC, FAD de zijden BC en AD achtereenvolgens in U en V ontmoeten, zijn ook deze punten op die zijden vast en de afstanden PU en PV onveranderlijk van lengte.

Brengt men dus vier stangen PX, PY, PU, PV aan, die in P met elkaar en in X, Y, U, V met de zijden AB, CD, BC, AD verbonden zijn, dan wordt de bewegelijkheid van den stangenvierhoek ABCD hierdoor niet in het minst geschaad. Het punt P blijft dan steeds het brandpunt van de ingeschreven parabool, de stangen PX, PY, PU, PV blijven steeds raaklijnen aan de cirkels PAB, PCD, PBC, PAD.

II. Stelt men

$$AB = a, \ BC = b, \ CD = c, \ DA = d,$$
$$PX = x, \ PY = y, \ PU = u, \ PV = v,$$

dan vindt men onmiddellijk:

$$XA = \frac{ad^2}{d^2 - b^2}, \ XB = \frac{ab^2}{d^2 - b^2}, \ x = \frac{abd}{d^2 - b^2},$$

$$\frac{a}{x} = \frac{d}{b} - \frac{b}{d} = \frac{c}{y}, \ \frac{b}{u} = \frac{a}{c} - \frac{c}{a} = \frac{d}{v} \ \ldots\ldots \ 1).$$

Omdat de verbindingslijnen XY en UV de zijdenparen (AB, CD) en (BC, AD) in evenredige stukken verdeelen, zijn ze raaklijnen aan de parabool. Dus gaan de cirkels FXY en EUV door P; trouwens men bewijst ook ligt, dat de

hoekenparen (FXP, FYP) en (EUP, EVP) gelijk zijn. Verder is XY evenwijdig aan PE; want men heeft achtereenvolgens $\angle YXP = \angle YFP = \angle DFP = \angle DAP = \angle EAP = \angle EPX'$. En evenzoo bewijst men de evenwijdigheid van UV en FP.

Zijn de lijnen YA′ en YB′ achtereenvolgens gelijk en evenwijdig aan, d. i. equipollent met DA en CB, dan gaat A′B′ door X. Want, terwijl AA′ en BB′ aan DF en dus ook onderling evenwijdig zijn, heeft men $\frac{AA'}{BB'} = \frac{DY}{CY} = \frac{AD}{BC} = \frac{AX}{BX}$. Dus zijn de figuren P(ABX) en Y(A′B′X) gelijkvormig, waaruit volgt dat YX in Y raaklijn moet zijn aan den cirkel YA′B′, evenals PX dit in X aan cirkel PAB is. In verband met 1) vinden we dan nog

$$\frac{A'B'}{XY} = \frac{d}{b} - \frac{b}{d}, \quad \frac{A''D''}{UV} = \frac{a}{c} - \frac{c}{a},$$

waarbij A″D″ op overeenkomstige wijs gevonden wordt.

III. Zijn M en N de snijpunten van de meetkundige plaats van P met AB, dan verdeelen deze punten AB in- en uitwendig in de verhouding van PA tot PB, d. i. van DA tot CB, d i. van de aangrenzende zijden des vierhoeks. Hieruit volgt de stelling, welke die omtrent de cirkels van Apollonius bij een driehoek in herinnering brengt:

Verdeelt men de zijden van een willekeurigen vierhoek in- en uitwendig in reden van de aanliggende zijden en beschrijft men op de door deze deelpunten begrensde segmenten der zijden als middellijnen cirkels, dan gaan deze cirkels door een zelfde punt P, het brandpunt van de in den vierhoek beschreven parabool π. De afstanden van dit punt P tot de hoekpunten A, B, C, D zijn dan evenredig met de producten AD . AB, BA . BC, CB . CD, DC . DA der aanliggende zijden.

De middelpunten X, Y, U, V der vier *cirkels van* Apollonius van den vierhoek ABCD liggen op een cirkel. Is I nl. het snijpunt van XY en UV, dan vindt men, wijl de raaklijnen UV, DC, AB van π de raaklijnen XY en BC in evenredige stukken verdeelen, $\frac{IY}{IX} = \frac{UC}{UB} = \frac{c^2}{a^2}$ en langs overeenkomstigen weg $\frac{IU}{IV} = \frac{YC}{YD} = \frac{b^2}{d^2}$. Drukt men nu XY en UV, met be-

hulp van de gelijkvormige figuren P (ABX), Y (A'B'X) en P (ADV), P (A″D″V), in AP = ρ als onbekende uit, dan vindt men verder $XY = \frac{abd^2}{\rho(d^2 - b^2)}$, $UV = \frac{a^2cd}{\rho(a^2 - c^2)}$ en hieruit weer in verband met het gevondene

$$IX = \frac{a^3bd^2}{\rho(d^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad IY = \frac{abc^2d^2}{\rho(d^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

$$IU = \frac{a^2b^2cd}{\rho(d^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad IV = \frac{a^2cd^3}{\rho(d^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

Dus is IX . IY = IU . IV. De cirkel XYUV nu kan beschouwd worden bij den vierhoek in de plaats te treden van de lijn van LEMOINE bij den driehoek, waarop daar de middelpunten der drie cirkels van APOLLONIUS gelegen zijn.

Let men nu op de drie enkelvoudige vierhoeken, die de zijden a, b, c, d van ABCD tot zijden hebben, dan kan men nog de volgende stelling uitspreken:

Vier willekeurig gegeven lijnen a, b, c, d vormen drie aan drie genomen vier driehoeken. De omgeschreven cirkels α, β, γ, δ van deze driehoeken hebben een punt P gemeen. Ontmoet nu de raaklijn in P

aan α de rechten b, c, d in B_a, C_a, D_a,
„ β „ „ c, d, a „ C_b, D_b, A_b,
„ γ „ „ d, a, b „ D_c, A_c, B_c,
„ δ „ „ a, b, c „ A_d, B_d, C_d,

dan zijn $A_bB_aC_dD_c$, $A_cC_aB_dD_b$, $A_dD_aB_cC_b$ koordenvierhoeken.

Bestaat er een eenvoudige betrekking tusschen de vierde snijpunten dezer raaklijnen met de zijden van vierhoek *abcd*?

Vraagstuk CXCIII.

Gegeven een driehoek ABC en een punt P in zijn vlak. Nu construeert men de snijpunten D, E, F van de lijnenparen (AP, BC), (BP, CA), (CP, AB) en bepaalt men verder de snijpunten

B_d, C_d van lijnen door D evenwijdig aan BP, CP met CA, AB,
C_e, A_e „ „ „ E „ „ CP, AP „ AB, BC,
A_f, B_f „ „ „ F „ „ AP, BP „ BC, CA,

waardoor zes op een kegelsnee P^2 liggende punten zijn verkregen.

Gevraagd de trilineaire vergelijking van P^2 met betrekking tot driehoek ABC in functie van de coördinaten van P en het bewijs, dat elk der drie lijnen B_dC_d, C_eA_e, A_fB_f door twee van de drie middens der zijden van driehoek DEF gaat. (J. NEUBERG).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, E. JENSEMA, J. NEUBERG *en* W. A. VERSLUYS.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

1. We toonen eerst meetkundig aan, dat de lijn B_dC_d (fig. 93) door de middens der segmenten DE, DF gaat.

Uit de evenredigheden $\frac{AP}{AD} = \frac{AE}{AB_d}$ en $\frac{AP}{AD} = \frac{AF}{AC_d}$ volgt $\frac{AE}{AB_d} = \frac{AF}{AC_d}$ en dus de evenwijdigheid van EF en B_dC_d.

Verder wordt de diagonaal AP van de vierzij AFPE harmonisch verdeeld door de beide andere diagonalen BC en EF. Dus vormen de vier stralen (EA, EP), (ED, EF) een harmonischen bundel. Snijdt men nu den bundel der stralen uit B_d evenwijdig aan deze door DE, dan vindt men de vier punten (E, D), (P_∞, X), als P_∞ het oneindig ver gelegen punt van DE beduidt. Dus moet het snijpunt X van DE met de lijn door B_d evenwijdig aan EF, d. i. met B_dC_d, het midden van DE zijn.

2. Zijn p, q, r de barycentrische coördinaten van P, waartusschen derhalve de betrekking $p+q+r=1$ bestaat, dan heeft men

$$\frac{AC_e}{C_eF} = \frac{AE}{EC} = \frac{r}{p}\,,\quad \frac{AF}{q} = \frac{BF}{p} = \frac{AB}{p+q}\,,$$

$$AC_e = \frac{r}{p+r}\,AF = \frac{qr}{(p+r)(p+q)}\,,$$

$$C_eB = \frac{(p+r)(p+q)-qr}{(p+r)(p+q)}\,AD = \frac{p}{(p+r)(p+q)}\,AB.$$

Evenzoo vindt men $AB_f = \frac{p}{(p+r)(q+r)}\,AC$. Dus zijn de vergelijkingen der lijnen B_fC_e, C_dA_f, A_eB_d, die achtereenvolgens met BC, CA, AB evenwijdig loopen,

$$x = \frac{p}{(p+q)(p+r)},\ y = \frac{q}{(q+r)(q+p)},\ z = \frac{r}{(r+p)(r+q)}$$

en blijkt onmiddellijk, dat de zes punten A_e, A_f, B_f, B_d, C_d, C_e gelegen zijn op de kegelsnee met de vergelijking

$$xyz - \left[x - \frac{p}{(p+q)(p+r)}\right]\left[y - \frac{q}{(q+r)(q+p)}\right]\left[z - \frac{r}{(r+p)(r+q)}\right] = 0$$

of

$$\sum \frac{pyz}{(p+q)(p+r)} - \sum \frac{qrx}{(p+q)(p+r)(q+r)} +$$
$$+ \frac{pqr}{(q+r)^2(r+p)^2(p+q)^2} = 0,$$

die gemakkelijk homogeen gemaakt wordt door de drie termen achtereenvolgens met de waarden 1, $x+y+z$, $(x+y+z)^2$ te vermenigvuldigen.

3. De gevonden kegelsnee ontmoet de lijn $x+y+z=0$ in het oneindige in de punten gelegen op de kromme $\Sigma\, p(q+r)yz=0$. Is deze identisch met $\Sigma\, a^2yz=0$, dan zijn de twee punten de onbestaanbare cirkelpunten en is de kegelsnee dus een cirkel. Dit gebeurt derhalve onder de voorwaarden

$$p(q+r) = \lambda a^2,\ q(r+p) = \lambda b^2,\ r(p+q) = \lambda c^2,$$

waarin λ een evenredigheidsfactor is. Hieruit volgt door combinatie

$$qr = \lambda bc \operatorname{Cos} A,\ rp = \lambda ca \operatorname{Cos} B,\ pq = \lambda ab \operatorname{Cos} C$$

of

$$\frac{p}{\operatorname{Tg} A} = \frac{q}{\operatorname{Tg} B} = \frac{r}{\operatorname{Tg} C},$$

d. w. z. als P het hoogtepunt van driehoek ABC is. Deze uitkomst is bekend; de bedoelde cirkel wordt de cirkel van TAYLOR genoemd.

4. Elimineert men x tusschen $x+y+z=0$ en $\Sigma\, p(q+r)yz=0$, dan vindt men dat de komende vergelijking twee bestaanbare, samenvallende of onbestaanbare lijnen voorstelt, naarmate het product pqr negatief, nul of positief is. Dus in de kegelsnee een hyperbool, parabool of ellips, naarmate P gelegen is in een der drie streken begrensd door een zijde en het verlengde van twee anderen, of op den omtrek, of in een der vier overblijvende streken.

Aanmerkingen. I. Uit de evenredigheden

$$AF : AB = AB_f : AE,$$
$$AC_e : AF = AE \;:\; AC$$

volgt door vermenigvuldiging $AC_e : AB = AB_f : AC$; dus loopen C_eA_f en BC evenwijdig. Wijl dit eveneens met A_fC_d en CA, met B_dA_e en AB het geval is, snijden de paren overstaande zijden van den zeshoek $A_fA_eB_dB_fC_eC_d$ elkaar op de lijn in het oneindige en liggen de zes punten dus op een kegelsnee (E. J.).

II. De boven gevonden vergelijking herleidt zich tot

$$\frac{qrx^2}{p} + \frac{rpy^2}{q} + \frac{pqz^2}{r} + (p^2+1)\,yz + (q^2+1)\,zx + (r^2+1)\,xy = 0.$$

Dit is een tweevoudig oneindig aantal kegelsneden, wijl tusschen de drie parameters p, q, r de betrekking $p+q+r=1$ bestaat. Dus kan niet elke kegelsnee die de zijden van een driehoek ABC snijdt in puntenparen A_fA_e, B_dB_f, C_eC_d, waarvoor C_eB_f en BC, A_fC_d en CA, B_dA_e en AB evenwijdig zijn, tot deze reeks behooren (J. N.)

III. Men vindt voor de barycentrische coördinaten van de volgende punten de daarachter geplaatste waarden

D	0,	$\frac{q}{q+r}$,	$\frac{r}{q+r}$,
E	$\frac{p}{p+r}$,	0,	$\frac{r}{p+r}$,
F	$\frac{p}{p+q}$,	$\frac{q}{p+q}$,	0,
A_f	0,	$\frac{q}{(q+p)(q+r)}$,	$\frac{pr}{(p+q)(r+q)}$,
A_e	0,	$\frac{pr}{(q+p)(q+r)}$,	$\frac{r}{(r+p)(r+q)}$,
B_d	$\frac{pq}{(p+r)(q+r)}$,	0,	$\frac{r}{(r+p)(r+q)}$,
B_f	$\frac{p}{(p+r)(q+r)}$,	0,	$\frac{qr}{(p+q)(p+r)}$,
C_e	$\frac{p}{(p+q)(p+r)}$,	$\frac{qr}{(p+q)(p+r)}$,	0,
C_d	$\frac{pr}{(q+p)(q+r)}$,	$\frac{q}{(q+p)(q+r)}$,	0.

(W. A. V.)

Vraagstuk CXCIV.

Een kubische ellips is gegeven door drie harer in het eindige gelegen punten, een rechte die door haar richting het bestaanbare punt in het oneindige en een elliptische straleninvolutie die door de richting van haar onbestaanbare dubbelstralen de twee andere punten in het oneindige kenmerkt. Hoeveel omwentelingshyperboloïden kunnen door deze kromme worden gebracht en hoe worden ze geconstrueerd? (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL.

Oplossing.

De oplossing van dit vraagstuk moet worden teruggebracht tot het construeeren van een kegelsnee door drie gegeven punten, die een gegeven kegelsnee dubbel aanraakt. Men weet namelijk, dat alle omwentelingsoppervlakken van den tweeden graad een dubbele aanraking hebben met den onbestaanbaren cirkel in het oneindige. Men zal dus hier de constructie uit te voeren hebben onder de volgende voorwaarden:

a. Het vlak der kegelsnee is het vlak in het oneindige.

b. De kegelsnee is onbestaanbaar.

c. Twee der punten, waardoor de gevraagde kegelsnee gelegd moet worden, zijn toegevoegd onbestaanbaar.

De oplossing van dit hulp-vraagstuk, benevens het aantal antwoorden, wordt hier bekend ondersteld; het wordt alleen geresumeerd om den overgang tot het nieuwe vraagstuk aan te geven. Alle bijzonderheden omtrent de oplossing zijn te vinden in: STEINER-SCHROETER, *Theorie der Kegelschnitte*, 2[te] Aufl., bl. 345; CHASLES, *Traité des sections coniques*, bl. 324; FIEDLER, *Darstellende Geometrie*, 3[te] Aufl., 2[ter] Th., bl. 228, HOFFMANN, *Die Constructionen doppelt-berührender Kegelschnitte*, bl. 27.

Vooraf gaat dus een korte aanduiding der oplossing. Laten A, B, C de punten en K^2 de kegelsnee zijn. De van de bestaanbaarheid der gegeven elementen losgemaakte oplossing van het vraagstuk is als volgt:

Vereenig B en C en bepaal de punten P_1, Q_1, harmonisch toegevoegd, zoowel ten opzichte van B en C als ten opzichte van de snijpunten van BC met K^2. Bepaal de poollijn a van

A ten opzichte van K^2. Op deze construeert men de punten P_2, Q, harmonisch toegevoegd aan de snijpunten met de kegelsnede en aan de stralen AB en AC. De raakkoorden, die door P_1 en Q_1 gaan, zijn de stralen, die harmonisch toegevoegd zijn aan P_1A, P_1BC en P_1P_2, P_1Q_2; hetzelfde geldt voor den stralenbundel door het punt Q_1.

Deze constructie is uitvoerbaar, als B en C toegevoegd imaginair en door een elliptische involutie op de rechte BC vervangen zijn, en ook als de kegelsnede K^2 zelf onbestaanbaar en vervangen is door een kwadratisch oppervlak, dat het vlak niet snijdt. In dat geval heeft men nl. te construeeren de gemeenschappelijk toegevoegde punten van twee collineaire of concentrische elliptische involuties en zijn de punten P_1Q_1 en P_2Q_2 dus altijd bestaanbaar te vinden.

Het vraagstuk geeft vier oplossingen als B en C bestaanbaar, twee als B en C toegevoegd onbestaanbaar zijn.

Deze oplossing moet nu met het oog op het vraagstuk gewijzigd worden. Men trekt daartoe uit een der in het eindige gelegen gegeven punten der kubische ellips, dat we T noemen, een rechte lijn a evenwijdig aan de gegeven richting van het punt in het oneindige en construeert tevens in het vlak α door T evenwijdig aan het vlak der gegeven straleninvolutie gebracht een straleninvolutie congruent met de gegevene. Zij tevens een bol M gegeven ter bepaling van den onbestaanbaren cirkel in het oneindige. Beschouwt men nu T ook als middelpunt van een orthogonalen involutorischen stralenbundel en bepaalt men de gemeenschappelijke toegevoegde stralen der beide concentrische involuties door T, dan heeft men de stralen TP_1 en TQ_1 geconstrueerd, die de vroeger bepaalde punten P_1 en Q_1 vervangen.

Bepaal nu het vlak α' toegevoegd aan a ten opzichte van den bol, d. i. dus het vlak door M loodrecht op a, en breng door T een vlak aan hieraan evenwijdig. Beschouwt men nu de beide coaxiale vlakkeninvoluties, bepaald door de vlakken gebracht door a en de stralen der elliptische involutie in α', en bepaalt men de gemeenschappelijke toegevoegde vlakken van de beide involuties, dan zijn daardoor de vlakken aP_2 en aQ_2 bepaald, die de punten P_2 en Q_2 der algemeene constructie vervangen.

Nu zijn construeerbaar de vlakken TP_1P_2, TP_1Q_2 en aP_1,

α; de vlakken, die deze beide paren harmonisch verdeelen, geven de vlakken door TP_1 en zoo ook vindt men de vlakken door TQ_1.

Heeft men eenmaal de vlakken geconstrueerd, die den oneindig ver verwijderden cirkel in de raakpunten snijden, dan komt het vraagstuk neer op het construeeren van een kwadratisch kegelvlak door een bestaanbaren en vier onbestaanbare stralen, een werkstuk, dat geacht kan worden bekend te zijn.

De te construeeren hyperboloide is thans bekend door een kubische ruimtekromme en een kegelsnee in het oneindige, door een richtkegel vertegenwoordigd. Men kan nog een kegelsnee in een bepaald vlak verkrijgen, wanneer men een vlak legt door T en de twee andere in het eindige gelegen punten der kromme. Dit vlak snijdt den richtkegel volgens twee rechte lijnen, welke de asymptootrichtingen zijn van een kegelsnee op de hyperboloïde gelegen; deze kegelsnee is dus construeerbaar, ook al mochten deze asymptootrichtingen onbestaanbaar zijn.

Van het kwadratische oppervlak zijn nu bekend twee daarop gelegen kegelsneden, benevens een of ander willekeurig punt der kubische kromme; het is dus volkomen bepaald en construeerbaar.

Vraagstuk CXCV.

Uit een punt B eener vlakke kubische kromme trekt men de raaklijnen BB_1, BB_2, BB_3, BB_4 naar de kromme. Daarna beweegt B zich over de kromme naar C, waarbij de raakpunten in C_1, C_2, C_3, C_4 overgaan. Te bewijzen dat de *gekruiste* dubbelverhoudingen $B(C_1, C_2, C_3, C_4)$ en $C(B_1, B_2, B_3, B_4)$ gelijk zijn.

(J. C. Kluyver).

Opgelost *door* E. Jensema, J. C. Kluyver *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* E. Jensema.

Door H. Schroeter is een eenvoudig meetkundig bewijs gegeven van de gelijkheid der *rechtstreeksche* dubbelverhoudingen $B(B_1B_2B_3B_4)$ en $C(C_1C_2C_3C_4)$ in zijn *Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung*, blz. 101. Dit bewijs kan onmiddellijk op de *gekruiste* dubbelverhoudingen worden overgebracht.

Zijn A, B, C drie punten van C^3, die op een rechte lijn liggen, en (A_1, A_2, A_3, A_4), (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4) de raakpunten der viertallen van raaklijnen uit deze punten, dan liggen deze twaalf raakpunten drie aan drie op zestien rechte lijnen. Wil men, dat A_iA_j, B_iB_j, C_iC_j drie paren toegevoegde punten van hetzelfde stelsel zijn en de snijpuntenparen (B_iC_i, B_jC_j), (B_iC_j, B_jC_j) enz. weer toegevoegde punten van hetzelfde stelsel zijn, dan kan deze configuratie $(12_4, 16_3)$ door het schema

$A_1B_1C_1$	$A_2B_1C_2$	$A_3B_1C_3$	$A_4B_1C_4$
$A_1B_2C_2$	$A_2B_2C_1$	$A_3B_2C_4$	$A_4B_2C_3$
$A_1B_3C_3$	$A_2B_3C_4$	$A_3B_3C_1$	$A_4B_3C_2$
$A_1B_4C_4$	$A_2B_4C_3$	$A_3B_4C_2$	$A_4B_4C_1$

worden voorgesteld; is bij het eerste viertal de nomenclatuur eenmaal gekozen, dan volgt het andere uit de gestelde eischen.

Zijn verder de snijpunten der lijnenparen BC_i, CB_i door S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ aangeduid, dan bewijzen we nu, dat B en C met de vier punten S op een kegelsnee liggen. Dit sluit dan in, dat de dubbelverhoudingen $B(S_1S_2S_3S_4)$ en $C(S_1S_2S_3S_4)$ of $B(C_1C_2C_3C_4)$ en $C(B_1B_2B_3B_4)$ gelijk zijn.

Hiertoe toonen we eerst aan, dat de vierhoek der punten S (fig. 94) de drie punten A_2, A_3, A_4 tot diagonaalpunten heeft.

Daartoe beschouwen we de negen punten $\left|\begin{array}{c} ABC \\ A_2B_1C_2 \\ A_2B_2C_1 \end{array}\right|$, die volgens het gegeven schema de snijpunten zijn van de kromme met drie rechten ABC, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$. Wijl nu ook AA_2A_2 op een rechte liggen, nl. op de raaklijn in A_2, liggen $BB_1B_2CC_1C_2$ op een kegelsnee en is dus $B_1CB_2C_1BC_2$ een PASCAL'sche zeshoek; derhalve liggen de drie punten

$$(BC_1, CB_1) = S_1, \ (BC_2, CB_2) = S_2, \ (B_1C_2, C_1B_2) = A_2$$

op een rechte. Evenzoo bewijst men dit voor $S_1S_3A_3$ en $S_1S_4A_4$ met behulp van de negentallen $\left|\begin{array}{c} ABC \\ A_3B_1C_3 \\ A_3B_3C_1 \end{array}\right|$ en $\left|\begin{array}{c} ABC \\ A_4B_1C_4 \\ A_4B_4C_1 \end{array}\right|$.

Beschouwen we nu verder nog het negental $\left|\begin{array}{c} ABC \\ A_3B_1C_3 \\ A_3B_2C_4 \end{array}\right|$, dan

blijkt, dat $BB_1B_2CC_3C_4$ op een kegelsnee liggen en $B_1CB_2C_3BC_4$ dus een PASCAL'sche zeshoek is. Derhalve liggen de drie punten

$(BC_3, CB_1) \equiv (BS_3, CS_1)$, $(BC_4, CB_2) \equiv (BS_4, CS_2)$, $(B_1C_4, B_2C_3) = A_4$

op een rechte lijn. En dit bewijst, dat de zeshoek $S_3BS_4S_1CS_2$ een PASCAL'sche zeshoek is.

Oplossing *van* J. C. KLUYVER.

Op dezelfde wijze als in Vraagstuk 94 drukt men de coördinaten van een punt der kromme als elliptische functies van een veranderlijk argument u uit met behulp van de vergelijkingen

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{pu} = \frac{z}{p'u}.$$

Duiden we de argumenten van B en C door u_0 en v_0 aan, dan zijn de argumenten β_i en γ_i van B_i en C_i door het schema

B_1	B_2	B_3	B_4
$-\frac{u_0}{2}+\omega$,	$-\frac{u_0}{2}+\omega''$,	$-\frac{u_0}{2}+\omega'$,	$-\frac{u_0}{2}$,
C_1	C_2	C_3	C_4
$-\frac{v_0}{2}+\omega$,	$-\frac{v_0}{2}+\omega''$,	$-\frac{v_0}{2}+\omega'$,	$-\frac{v_0}{2}$

aangewezen.

De vergelijking der lijn CB_i verschijnt dan in den vorm

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & pv_0 & p'v_0 \\ 1 & p\beta_i & p'\beta_i \end{vmatrix} = 0$$

en met behulp hiervan is het duidelijk, dat de dubbelverhouding

$$D = \frac{\operatorname{Sin} B_2CB_1}{\operatorname{Sin} B_2CB_3} : \frac{\operatorname{Sin} B_4CB_1}{\operatorname{Sin} B_4CB_3}$$

aangegeven wordt door de vergelijking

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 1 & p\beta_2 & p'\beta_2 \\ 1 & pv_0 & p'v_0 \\ 1 & p\beta_1 & p'\beta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p\beta_2 & p'\beta_2 \\ 1 & pv_0 & p'v_0 \\ 1 & p\beta_3 & p'\beta_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & p\beta_4 & p'\beta_4 \\ 1 & pv_0 & p'v_0 \\ 1 & p\beta_1 & p'\beta'_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p\beta_4 & p'\beta_4 \\ 1 & pv_0 & p'v_0 \\ 1 & p\beta_3 & p'\beta_3 \end{vmatrix}},$$

of in σ-functies na weglating der gelijke factoren in teller en noemer

$$D = \frac{\sigma(v_0+\beta_1+\beta_2)\,.\,\sigma(v_0+\beta_3+\beta_4)\,.\,\sigma(\beta_2-\beta_1)\,.\,\sigma(\beta_4-\beta_3)}{\sigma(v_0+\beta_2+\beta_3)\,.\,\sigma(v_0+\beta_4+\beta_1)\,.\,\sigma(\beta_3-\beta_2)\,.\,\sigma(\beta_1-\beta_4)}\,.$$

Als men de waarden der argumenten β_i invoert, wordt dit

$$D = \frac{\sigma(v_0-u_0+\omega''+\omega)\,.\,\sigma(v_0-u_0+\omega''-\omega)\,.\,\sigma^2\omega'\,.\,\sigma^2(v_0-u_0+\omega'')}{\sigma(v_0-u_0+\omega''+\omega')\,.\,\sigma(v_0-u_0+\omega''-\omega')\,.\,\sigma^2\omega\,.\,\sigma^2(v_0-u_0+\omega'')}$$

of met toepassing der formule $\dfrac{\sigma(a+b)\,.\,\sigma(a-b)}{\sigma^2 a\,.\,\sigma^2 b} = \wp b - \wp a$

$$D = \frac{\wp(v_0-u_0+\omega'')-e_1}{\wp(v_0-u_0+\omega'')-e_3} = \frac{e_2-e_1}{e_2-e_3}\cdot\frac{\wp(v_0-u_0)-e_3}{\wp(v_0-u_0)-e_1}\,.$$

Wijl deze vorm niet verandert bij omwisseling van u en v, is hiermee het gestelde bewezen.

Aanmerking. Uit het bewezene volgt nog dit: Laat men de punten B en C zich in dier voege over de kromme bewegen dat de verbindingslijnen BL en CM van B en C met de vaste punten L en M der kromme elkaar in een veranderlijk punt X der kromme snijden, dan blijven de beschouwde dubbelverhoudingen onveranderd. Want, als B en C zich op deze wijze bewegen, verandert $v_0 - u_0$ niet.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

De kubische kromme wordt voortgebracht door twee stralenbundels (B) en (C) in (2, 2)-overeenkomst. Met den vertakkingsstraal BB_1 komt dan overeen de dubbelstraal CB_1 van het stelsel (C), enz. Nu is de gelijkheid der dubbelverhoudingen $B(C_1, C, C_3, C_4)$ en $C(B_1, B, B_3, B_4)$ een onmiddellijk gevolg van de volgende, door Emil Weyr *Ann. di matt.* s. II, t. IV, p. 272) gepubliceerde eigenschap.

De acht singuliere-elementen van het eene stelsel komen, op vier verschillende wijzen, projectief overeen met de acht singuliere elementen van het tweede stelsel; de vertakkingselementen resp. dubbelstralen van het eerste stelsel zijn daarbij aan de vertakkingselementen resp. dubbelstralen van het tweede stelsel toegevoegd.

Vraagstuk CXCVI.

In een kromlijnigen vierhoek ABCD, waarvan de zijden door bogen van confocale kegelsneden worden gevormd, gaat de raaklijn in A aan AB door het overstaande hoekpunt C. Te bewijzen, dat de raaklijn in B aan dezelfde zijde AB door het overstaande hoekpunt D gaat. (J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* J. C. KLUYVER *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* J. C. KLUYVER.

Wij beschouwen u en v als de elliptische coordinaten in het platte vlak en stellen

$$x = a\,\frac{\mathrm{dn}\,u\ \mathrm{sn}\,v}{\mathrm{cn}\,u}\,,\quad y = ak'\,\frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{cn}\,u}\ (\mathrm{mod.}\ k).$$

Blijft u constant, dan doorloopt het punt (x, y) de ellips

$$\frac{x^2}{a^2\,\dfrac{\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}} + \frac{y^2}{a^2\,\dfrac{k'^2}{\mathrm{cn}^2\,u}} = 1\,;$$

bij constante v beschrijft daarentegen dit punt de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2k^2\,\mathrm{sn}^2 v} - \frac{y^2}{a^2k^2\,\mathrm{cn}^2 v} = 1.$$

Al deze kegelsneden hebben den brandpuntsafstand $2ak$. Wij noemen nu de coördinaten u, v der hoekpunten A, B, C, D in volgorde $(o,\ v_1)$, $(o,\ v_2)$, $(u_2,\ v_2)$, $(u_2,\ v_1)$. Tusschen deze argumenten bestaat een betrekking, omdat de raaklijn in A aan AB door C gaat. Blijkbaar is deze van den vorm

$$\mathrm{sn}\,v_1\ \mathrm{sn}\,v_2\,\frac{\mathrm{dn}\,u_2}{\mathrm{cn}\,u_2} + \mathrm{cn}\,v_1\ \mathrm{cn}\,v_2\,\frac{1}{\mathrm{cn}\,u_2} = 1,$$

of

$$\mathrm{cn}\,u_2 = \mathrm{cn}\,v_1\ \mathrm{cn}\,v_2 + \mathrm{sn}\,v_1\ \mathrm{sn}\,v_2\ \mathrm{dn}\,u_2.$$

Daar deze betrekking in v_1 en v_2 volkomen symmetrisch is, kan men omgekeerd besluiten, dat zij ook uitdrukt, dat de raaklijn in B door het overstaande hoekpunt D gaat.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Zij u de helft der som, v de helft van het verschil der afstanden van eenig punt tot de twee brandpunten, $2c$ de afstand tusschen deze; dan is

$$\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2-c^2}=1\,,\ \frac{x^2}{v^2}+\frac{y^2}{v^2-c^2}=1\,;$$

door oplossing van x en y vinden wij als transformatie-formules van rechthoekige tot elliptische coördinaten:

$$x=\frac{uv}{c}\,,\ y=\frac{\sqrt{(u^2-c^2)(c^2-v^2)}}{c}.$$

Zijn nu de coördinaten van A, B, C, D achtereenvolgens (u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_2), (u_2, v_1), dan leiden wij de vergelijking der raaklijn in A aan AB uit die in rechthoekige coördinaten

$$\frac{\mathrm{X}x}{u_1^2}+\frac{\mathrm{Y}y}{u_1^2-c^2}=1$$

af, en vinden als voorwaarde, dat zij door C gaat:

$$\frac{u_2v_2u_1v_1}{c^2u_1^2}+\frac{\sqrt{(u_2^2-c^2)(c^2-v_2^2)(u_1^2-c^2)(c^2-v_1^2)}}{c^2(u_1^2-c^2)}=1.$$

De voorwaarde, dat de raaklijn in B door D gaat, volgt hieruit, als men v_1 met v_2 verwisselt; daardoor verandert echter de vergelijking niet, wat een bewijs is van het gestelde.

Vraagstuk CXCVII.

De kleinste vijfde-macht te vinden, die 2 tot rest laat bij deeling door 641. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W MANTEL.

Oplossing.

Deelt men de vijfde-machten door een ondeelbaar getal, dan vindt men allerlei resten, behalve als de deeler in de formule $10n+1$ begrepen is. Zal in dat geval R een rest van a^5

zijn, dan volgt uit $R \equiv a^5$ ook $R^{2n} \equiv a^{10n}$, dus $R^{2n} \equiv 1$, volgens de stelling van FERMAT.

Om de mogelijkheid van ons vraagstuk te onderzoeken, moeten wij dus zien of $2^{128} \equiv 1$ (mod. 641) is; wij berekenen hiertoe $2^8 \equiv 256$, $2^{16} \equiv 154$, $2^{32} \equiv -1$, $2^{64} \equiv 1$, $2^{128} \equiv 1$. Hierdoor is de mogelijkheid bewezen en tegelijk het middel gevonden om de vraag op te lossen. Want als $x^5 \equiv 2$ is, dan is nu ook $x^5 \equiv 2^{65}$, dus $x \equiv 2^{13} \equiv 300$. De gevraagde vijfde-macht is dus

2 430 000 000 000.

AANMERKING. Andere getallen van de formule $10n + 1$ met 2 tot vijfde-machtsrest, zijn 151, 251, 571. Wie kent de algemeene formule er voor?

Vraagstuk CXCVIII.

Als A, B, C, D de voetpunten en A′, B′, C′, D′ de tweede snijpunten zijn van de normalen uit een punt P aan een ellips getrokken, dan zal de gelijkzijdige hyperbool door A′, B′, C′, D′ de gelijkzijdige hyperbool door A, B, C, D in P aanraken. Gevraagd de meetkundige plaats van P, als A′, B′, C′, D′ op een cirkel liggen. (J. W. TESCH.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. We stellen de kegelsnee (ABCDP) door H, de kegelsnee (A′B′C′D′P) door H′ voor, nemen de assen der gegeven ellips E tot coördinaatassen aan, ten opzichte waarvan x_1, y_1 de coördinaten van P mogen zijn en verstaan onder a, b, c halve assen en excentriciteit van E.

We beschouwen nu vooreerst de perspectivische overeenkomst (involutorische collineatie of homologie), waarvan P het centrum en de poollijn p van P ten opzichte van E de as is. In deze overeenkomst komt A′ met A, B′ met B, C′ met C, D′ met D, E met zich zelf, P met zich zelf en H′ met H overeen. Hieruit volgt, dat H en H′ elkaar in P moeten aanraken.

De vluchtlijn der overeenkomst is de lijn v, die de afstanden van P tot de punten van p middendoordeelt. Haar snijpunten

M_1 en M_2 met H geven met P verbonden de richtingen der asymptoten van H′ aan; we bewijzen nu eerst, dat deze asymptoten loodrecht op elkaar staan en H′ dus evenals H een gelijkzijdige hyperbool is.

De vergelijking van p is $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$; die van de lijn door P evenwijdig aan p wordt dus $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$. Derhalve is die van v

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + 1\right).$$

Verder is

$$b^2x(y - y_1) = a^2y(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

de vergelijking van H, terwijl, als m de richtingscoefficient is van PM_1 of PM_2, de betrekking

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

geldt. Door x en y te elimineeren vinden we ter bepaling van m de vierkantsvergelijking

$$x_1y_1m^2 - \left\{y_1^2 - x_1^2 + \tfrac{1}{2}c^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + 1\right)\right\}m - x_1y_1 = 0;$$

wijl het product der wortels -1 is, is H′ een gelijkzijdige hyperbool.

2. Zal door A′, B′, C′, D′ een cirkel gaan, dan moeten de assen van H′ met die der ellips evenwijdig loopen; want $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \lambda(x^2 + y^2)$ kan alleen in $\mu(px + qy)(qx - py)$ overgaan als p en q gelijk zijn. Dus moeten de wortels m van de gevonden vierkantsvergelijking alleen in teeken verschillen; waaruit volgt, dat

$$y_1^2 - x_1^2 + \tfrac{1}{2}c^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + 1\right) = 0$$

of

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

de vergelijking der meetkundige plaats van P is. Deze is alzoo een hyperbool, waarvan de asymptoten vallen langs de

gelijke toegevoegde middellijnen van E. Zij snijdt de ellips rechthoekig in de punten, waar de raaklijnen gelijke hoeken maken met de assen.

Aanmerking der redactie. In vraagstuk 999 van *Mathesis* (1894, blz. 280) wordt de meetkundige plaats van het middelpunt van H en de omhullende van H gevraagd. In den gedachtengang der bovenstaande oplossing zijn deze gemakkelijk te vinden.

Het middelpunt van H wordt bepaald door de beide vergelijkingen

$$b^2(y - y_1) - a^2 y = 0\,, \quad b^2 x - a^2(x - x_1) = 0$$

of

$$c^2 y = -b^2 y_1\,, \quad c^2 x = a^2 x_1.$$

Invoeging van $x_1 = \frac{c^2}{a^2}x$, $y_1 = -\frac{c^2}{b^2}y$ in 2) doet voor de meetkundige plaats van het middelpunt dus de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^6} - \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{a^4 - b^4}$$

vinden.

Door 1) en 2) naar x_1 en y_1 (als functie van x_1) te differentieeren en tusschen de verkregen vergelijkingen $\frac{dy_1}{dx_1}$ te elimineeren vindt men

$$b^4 x x_1 = a^4 y y_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3).$$

Door x_1 en y_1 tusschen 1), 2), 3) te elimineeren vindt men voor de omhullende van H de kromme

$$(a^4 - b^4)\, x^2 y^2 = a^6 y^2 - b^6 x^2,$$

waaraan wegens den vorm den naam van „Kohlenspitzencurve" gegeven is.

Vraagstuk CXCIX.

Gegeven zijn twee kegels k en k'. De toppen T en T′ hebben (t_1, t_2) en (t_1', t_2') tot projectie, de richtlijnen zijn twee kegelsneden (k_1^2, k_2^2) en (k'^2_1, k'^2_2) gelegen in de vlakken met de doorgangen (v_1, v_2) en (v'_1, v'_2). Gevraagd onder de voorwaarden $t_1 = t'_2$, $t_2 = t'_1$, $v_1 = v'_2$, $v_2 = v'_1$, $k_1^2 = k'^2_2$, $k_2^2 = k'^2_1$ de doorsnee der kegels te construeeren. (H. de Vries.)

Opgelost *door* H. de Vries *en* Dr. P. H. Schoute.

Oplossing *van* Dr. P. H. Schoute.

Klaarblijkelijk is het vlak door de as van projectie loodrecht op TT′, dat TT′ tevens middendoordeelt, een vlak van symmetrie met betrekking tot de figuur door de beide kegels gevormd en moeten deze dit vlak dus volgens een zelfde kegelsnee ρ^2 snijden. Dus moet de doorsnee bestaan uit twee kegelsneden ρ^2 en σ^2, waarvan de laatste gelegen is in een vlak loodrecht op het symmetrievlak.

Werkelijk bewijst men langs eenvoudigen weg, dat het vlak door de as van projectie evenwijdig aan TT′ gebracht beide kegels volgens dezelfde kegelsnee σ^2 snijdt. Is nl. (l_1, l_2) een beschrijvende lijn l van k, dan is $(l'_1 = l_2, l'_2 = l_1)$ een beschrijvende lijn l' van k' en deze hebben klaarblijkelijk het punt P met de samenvallende projecties (p_1, p_2) met elkaar gemeen. Dus snijdt niet alleen het eene vlak door de as, dat den rechten standhoek middendoordeelt (en loodrecht staat op T_1T_2), maar ook het andere evenwijdig aan T_1T_2 beide kegels volgens dezelfde kegelsnee.

Vraagstuk CC.

Twee congruente ellipsen E, E′ zijn zoo geplaatst, dat men ze tot bedekking kan brengen door de eene om het gemeenschappelijk middelpunt een kwartslag te draaien. Aan elk punt P van E met den poolhoek θ voegt men een punt Q van E′ met den poolhoek θ' toe, waarvoor, als e de gemeenschappelijke excentriciteit van E en E′ aanduidt, $\text{Tg}\,\theta = (1 - e^2)\,\text{Tg}\,\theta'$ is. Gevraagd

a) de meetkundige plaats van het midden R van PQ,

b) de omhullende van PQ. (Dr. J. de Vries.)

Opgelost *door* Dr. J. de Vries.

Oplossing.

1. Gebruik makende van de excentrische anomalie kan men de coördinaten van P voorstellen door

$$x = a\,\text{Cos}\,\phi, \quad y = b\,\text{Sin}\,\phi.$$

Dan wordt

$$\text{Tg}\,\theta = \frac{b}{a}\,\text{Tg}\,\phi$$

en, daar gegeven is

$$\text{Tg}\,\theta = \frac{b^2}{a^2}\,\text{Tg}\,\theta',$$

heeft men ook de betrekking

$$\text{Tg}\,\theta' = \frac{a}{b}\,\text{Tg}\,\phi.$$

Derhalve kan men de coördinaten van Q aanduiden door

$$x' = \pm\, b\,\text{Cos}\,\phi\ ,\quad y' = \pm\, a\,\text{Sin}\,\phi,$$

waarbij dezelfde teekens gelden.

a) Volgens de bepaling van R vindt men voor de coördinaten van dit punt

$$x'' = \tfrac{1}{2}(a \pm b)\,\text{Cos}\,\phi\ ,\quad y'' = \tfrac{1}{2}(a \pm b)\,\text{Sin}\,\phi,$$

zoodat de meetkundige plaats van R door de twee cirkels

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2$$

wordt gevormd.

b) De vergelijking der lijn PQ is

$$\frac{x - a\,\text{Cos}\,\phi}{\text{Cos}\,\phi} = \mp \frac{y - b\,\text{Sin}\,\phi}{\text{Sin}\,\phi}$$

of

$$x\,\text{Sin}\,\phi \pm y\,\text{Cos}\,\phi = (a \pm b)\,\text{Sin}\,\phi\,\text{Cos}\,\phi.$$

Door differentiatie naar ϕ vindt men

$$x\,\text{Cos}\,\phi \mp y\,\text{Sin}\,\phi = (a \pm b)(\text{Cos}^2\phi - \text{Sin}^2\phi).$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt voor de coördinaten van het raakpunt

$$x = (a \pm b)\,\text{Cos}^3\phi\ ,\quad y = (a \pm b)\,\text{Sin}^3\phi.$$

Dus bestaat de gevraagde omhullende uit de beide astroïden

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a \pm b)^{\frac{2}{3}}.$$

Aanmerkingen. I. Daar men de vergelijking van PQ in den vorm

$$\frac{x}{(a \pm b)\,\text{Cos}\,\phi} \pm \frac{y}{(a \pm b)\,\text{Sin}\,\phi} = 1$$

kan schrijven, snijden de coördinaatassen van PQ een stuk $(a \pm b)$ af; hierin erkent men een bekende eigenschap der astroïde.

II. De lijnen, welke P met de beide punten Q vereenigen, hebben $\pm$ Tg ϕ tot richtingscoëfficiënten en zijn dus antiparallel ten opzichte van de assen der ellipsen.

III. Voor hun raakpunten met de beide astroïden vindt men

$$x_1 = (a+b) \mathrm{Cos}^3\phi \;,\quad y_1 = (a+b) \mathrm{Sin}^3\phi\,;$$
$$x_2 = (a-b) \mathrm{Cos}^3\phi \;,\quad y_2 = (b-a) \mathrm{Sin}^3\phi.$$

De verbindingslijn der raakpunten wordt dus voorgesteld door

$$\frac{x-(a+b)\,\mathrm{Cos}^3\phi}{2b\,\mathrm{Cos}^3\phi} = \frac{y-(a+b)\,\mathrm{Sin}^3\phi}{2a\,\mathrm{Sin}^3\phi}.$$

Zij raakt haar omhullende in het punt

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\,\mathrm{Cos}^5\phi\,;\; y = \frac{b^2-a^2}{b}\,\mathrm{Sin}^5\phi.$$

De bedoelde rechte omhult derhalve de kromme

$$(ax)^{\frac{2}{5}} + (by)^{\frac{2}{5}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{5}}.$$

Evenals de astroïde, kan zij met behulp van ϕ gemakkelijk punt voor punt geteekend worden.

AANHANGSEL.

AANHANGSEL.

Vraagstuk I.

De heer NEUBERG zond ons naar aanleiding van dit vraagstuk de volgende opmerkingen:

1. Als (C_b, B_c), (A_c, C_a), (B_a, A_b) meer in het algemeen drie isotomische paren van punten zijn, op de zijden van driehoek ABC, dan liggen deze punten op een kegelsnee, terwijl de lijnen, die ze met de overstaande hoekpunten verbinden, een andere kegelsnee omhullen. Met betrekking tot drie paren van isogonale lijnen door de hoekpunten en haar snijpunten met de overstaande zijden gelden dezelfde stellingen.

2. Het bewijs van het gedeelte *b*) op blz. 2 kan in duidelijkheid winnen door uit te gaan van de opmerking, dat twee gelijkvormige, gelijkstandige en gelijkmiddelpuntige kegelsneden op een zelfde lijn twee koorden met een gemeenschappelijk midden bepalen. Liggen de drie willekeurige isotomische paren (C_b, B_c), (A_c, C_a), (B_a, A_b) op de kegelsnee K, dan zal de met K gelijkvormige, gelijkstandige en gelijkmiddelpuntige kegelsnee door A noodzakelijkerwijs door B en C gaan; bovendien zullen de raaklijnen in A, B, C aan deze laatste evenwijdig moeten zijn met de poollijnen van A, B, C ten opzichte van K.

3. De drie parabolen, die door A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b worden omhuld, zijn door H. MANDART bestudeerd (*Mathesis*, 1890, blz. 3).

4. Zijn I_a, I_b, I_c de middelpunten der aangeschreven cirkels van driehoek ABC en is N_aN_bN de driehoek gevormd door verlenging van B_aC_a, C_bA_b, A_cB, dan ziet men onmiddellijk, dat de hoekpunten N_a, N_b, N_c van dezen driehoek bij verandering van den straal *r* der uit A, B, C beschreven cirkels op I_aA_m, I_bB_m, I_cC_m gelijkvormige puntenreeksen doorloopen. Omdat deze lijnen de symedianen van driehoek $I_aI_bI_c$ zijn, zullen de niet homologe zijden van de driehoeken

$I_aI_bI_c$ en $N_aN_bN_c$ elkaar snijden in zes punten, gelegen op een TUCKER-cirkel van driehoek $I_aI_bI_c$.

5. Volgens *d*) omhult de as van homologie van de driehoeken ABC en $N_aN_bN_c$ een parabool. Hier tegenover staat, dat het centrum van homologie N van de beide driehoeken een kegelsnee tot meetkundige plaats heeft, die door A, B, C, het middelpunt van den ingeschreven cirkel van ABC, het punt van LEMOINE van $I_aI_bI_c$ en het snijpunt der lijnen door A, B, C achtereenvolgens evenwijdig aan I_bA_m, I_bB_m, I_cC_m gaat.

6. De poollijn q_a van A met betrekking tot K omhult een kromme van de derde klasse. Snijdt q_a de zijden AC en AB in F en G en is F gegeven, dan zijn C_a en A_c ondubbelzinnig bepaald, wijl de betrekking $B_mC_a = \pm\sqrt{B_mF \,.\, B_mA}$ geldt; doch voor r vindt men twee waarden, nl. AC_a en AA_c. Dus gaan er door een willekeurig op AC gekozen punt F twee met F veranderende lijnen q_a. Doch AC is ook een lijn q_a en wel de lijn q_a die met een waarde $\frac{1}{2}$ AC van r overeenstemt; want voor deze waarde van r gaat K in de vereeniging der lijnen BA, BC over, enz.

7. In barycentrische coördinaten zijn de punten A_b en B_a van het overeenkomstige vraagstuk in de ruimte door

$\left(\frac{c-r}{c}, \frac{r}{c}, 0, 0\right)$ en $\left(\frac{r}{c}, \frac{c-r}{c}, 0, 0\right)$ voorgesteld. Dus

liggen de twaalf punten A_b, enz. op het kwadratisch oppervlak

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - \sum\left(\frac{c-r}{r} + \frac{r}{c-r}\right) xy = 0,$$

of

$$(x + y + z + t)^2 - \sum \frac{c^2}{r(c-r)}\, xy = 0.$$

Door tot normale afstandscoördinaten over te gaan vinden we

$$r(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)^2 - \sum \frac{\alpha\beta c^2}{c-r}\, xy + 0,$$

wat de symmetrie der vergelijking beter doet uitkomen dan de door een drukfout ontsierde vergelijking van blz. 6.

Voor zes willekeurige isotome of isogonale paren blijft de stelling waarheid bevatten.

Vraagstuk 10.

Ziehier een meetkundige beschouwing van het algemeene vraagstuk (vergelijk de derde aanmerking):

We stellen ons voor, dat de orthogonale hyperboloïde voortgebracht wordt door twee projectieve vlakkenbundels, waarvan de overeenkomstige elementen loodrecht op elkaar staan en noemen de assen van die bundels *hoofdlijnen* van het oppervlak; elk der beide voortbrengingswijzen, die door omwisseling van beschrijvende lijnen en richtlijnen in elkaar overgaan, laat dan een enkel paar hoofdlijnen toe.

Door de twee gegeven lijnen a en b gaat een tweevoudig oneindig stel van orthogonale hyperboloïden. Zijn nl. m en m' de tot het van (a, b) verschillende stelsel behoorende hoofdlijnen, dan zijn de vlakkenparen (am, am'), (bm, bm') paren van loodrecht op elkaar staande vlakken. Van deze paren kunnen we am en bm willekeurig aannemen. Of we kunnen door a twee onderling loodrechte vlakken en door b eveneens twee onderling loodrechte vlakken willekeurig aannemen. Zijn (A, A′) de snijpunten van a met de beide vlakken door b, (B, B′) de snijpunten van b met de beide vlakken door a, dan kunnen we voor m en m' de lijnen AB, A′B′ of de lijnen AB′, A′B kiezen.

Bij draaiing van het vlakkenpaar door b om b doorloopen de punten (A, A′) op a een involutie, die de snijpunten (α, α') van a met de raakvlakken door b aan den cirkel, gemeen aan alle bollen, tot dubbelpunten heeft. Evenzoo vormen de punten (B, B′) op b bij draaiing van het vlakkenpaar door a om a een involutie met de snijpunten (β, β') van b met de raakvlakken door a aan dienzelfden cirkel tot dubbelpunten. Verder levert een willekeurig gekozen paar (A, A′) twee door het gegeven punt P gaande orthogonale hyperboloïden op. Want als het nog onbekende paar (B, B′) zijn involutie doorloopt, doorloopen de vlakken (PAB) en (PA′B′) twee projectieve vlakkenbundels en deze leveren, zoo als bekend is, twee paren van loodrecht op elkaar staande vlakken (Pm, Pm') op (J. N.).

Aanmerkingen van de redactie. I. De meetkundige plaats van de niet met a en b tot een zelfde stel behoorende hoofdlijnen der door a en b gaande orthogonale hyperboloïden is de congruentie (1, 1), die a en b tot assen heeft. Want men kan

een willekeurige op a en b rustende lijn als m aannemen en vindt dan de daarbij behoorende m' als snijlijn van het vlak door a loodrecht op (am) met het vlak door b loodrecht op (bm). In deze congruentie (1, 1) zijn de stralen m en m' involutorisch gepaard.

II. We zoeken verder de meetkundige plaats der door een gegeven punt P gaande beschrijvende lijnen van de orthogonale hyperboloïden door a, b en P. Deze is al dadelijk gevonden, als we weten, hoeveel orthogonale hyperboloïden er begrepen zijn in den bundel (a, b, P, Q), die den scheeven vierhoek, gevormd door a, b en de door P en Q gaande stralen p, q der congruentie (1, 1) met de assen a, b tot basiskromme heeft. Wijl dit aantal, zoo als aanstonds blijken zal, drie is, rusten er drie door P gaande beschrijvende lijnen op q en is de gezochte meetkundige plaats een kegel van den derden graad.

Een kwadratisch oppervlak stelt een orthogonale hyperboloïde voor als een der drie wortels van de derdemachts-vergelijking in S gelijk is aan de som der beide anderen. Is deze derdemachts-vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_{11}-S & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-S & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-S \end{vmatrix} = 0$$

kortheidshalve door

$$-S^3 + \alpha S^2 - \beta S + \gamma = 0$$

voorgesteld, dan volgt uit de betrekking $S_1 + S_2 = S_3$ gemakkelijk de voorwaarde $\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma = 0$, wat, als a_{ik} vervangen wordt door $a'_{ik} + \lambda a''_{ik}$, van den derden graad in λ blijkt te zijn. Dus bevat een bundel van kwadratische oppervlakken drie orthogonale hyperboloïden, enz.

III. Het zou kunnen schijnen, dat er naast het tweevoudig oneindig stelsel der boven beschouwde oppervlakken nog een ander stelsel bestaat, waarbij de hoofdlijnen m en m' met de gegeven lijnen a en b tot hetzelfde stel behooren. Natuurlijk is dit stelsel echter identisch met het gegevene, wijl elke orthogonale hyperboloïde twee paar hoofdlijnen toelaat. Daarbij wordt echter de eerste der beide juist gevondene meetkundige plaatsen door een andere vervangen. Welke is deze?

Vraagstuk 24.

Deze stelling is omstreeks 1815 door QUETELET en DANDELIN bewezen in de *Corresp. phys. et math.* en in de *Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles.* Zij wordt daar aangevoerd als een nuttig beginsel in de theorie der stereographische projectie (J. N).

Vraagstuk 44.

Dit vraagstuk en zijn oplossing rusten op een onjuisten grondslag. Want men kan bewijzen, dat het aantal paren van richtingen, waarvoor de verlangde betrekking intreedt, oneindig groot is. Om dit aan te toonen, wijzigen we eerst den vorm van het vraagstuk eenigzins.

Zijn a, b, c en a', b', c' de *richtingen* der zijden BC, CA, AB en B'C', C'A', A'B' en stellen verder f, g, h en f', g', h' achtereenvolgens de vierde harmonische stralen door A, B, C en A', B', C' tot (μ, ν, a'), (μ, ν, b'), (μ, ν, c') en (μ, ν, a), (μ, ν, b), (μ, ν, c) voor, dan behooren de paren van richtingen (a', f), (b', g), (c', h) en (a, f'), (b, g'), (c, h') klaarblijkelijk tot dezelfde involutie van richtingen I, nl. die met de richtingen van μ en ν tot dubbelelementen. Wijl nu f, g, h door een zelfde punt P en eveneens f', g', h' door een zelfde punt P' moeten gaan, leeren de volledige vierhoeken ABCP en A'B'C'P', gesneden door de lijn in het oneindige, dat zoowel de paren van richtingen (a, f), (b, g), (c, h) als de paren van richtingen (a', f'), (b', g'), (c', h') tot nieuwe involuties behooren. We kunnen derhalve de vraag aldus inkleeden:

„Gegeven drie tweetallen van richtingen (a, a'), (b, b'), (c, c'). Gevraagd een involutie van richtingen I zoo te bepalen, dat als (a, f'), (b, g'), (c, h') en (a', f), (b', g), (c', h) tot deze behooren, de drietallen van paren (a, f), (b, g), (c, h) en (a', f'), (b', g'), (c', h') twee nieuwe involuties I' en I'' opleveren."

We duiden nu de richtingsparameter eener lijn aan door de letter, die de richting aangeeft, en zien dus in de vergelijking

$$Kxy + L(x + y) + M = 0$$

de voorstelling eener involutie van paren van richtingen x en y, d. i. hier van de gezochte involutie I. De onderstelling, dat (a, f'), (b, g'), (c, h') en (a', f), (b', g), (c', h) hiertoe behooren,

leidt dan tot de betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} Kaf' + L(a+f') + M = 0 \\ Kbg' + L(b+g') + M = 0 \\ Kch' + L(c+h' + M = 0 \end{array}\right\} \ldots 1), \quad \left.\begin{array}{l} Ka'f + L(a'+f) + M = 0 \\ Kb'g + L(b'+g) + M = 0 \\ Kc'h + L(c'+h) + M = 0 \end{array}\right\} \ldots 2).$$

Omdat (a, f), (b, g), (c, h) en (a', f'), (b', g'), (c', h') twee nieuwe involuties I′ en I″ bepalen, hebben we tevens

$$\left.\begin{array}{l} K'af + L'(a+f) + M' = 0 \\ K'bg + L'(b+g) + M' = 0 \\ K'ch + L'(c+h) + M' = 0 \end{array}\right\} \ldots 3), \quad \left.\begin{array}{l} K''a'f' + L''(a'+f') + M'' = 0 \\ K''b'g' + L''(b'+g') + M'' = 0 \\ K''c'h' + L''(c'+h') + M'' = 0 \end{array}\right\} \ldots 4),$$

of na eliminatie van K′, L′, M′ en K″, L″, M″

$$\begin{vmatrix} af & a+f & 1 \\ bg & b+g & 1 \\ ch & c+h & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots 5), \quad \begin{vmatrix} a'f' & a'+f' & 1 \\ b'g' & b'+g' & 1 \\ c'h' & c'+h' & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots 6).$$

Door eliminatie van f, g, h uit 2) en 5) vindt men verder

$$\begin{vmatrix} a(La'+M), & Kaa' + L(a-a') - M, & Ka' + L \\ b(Lb'+M), & Kbb' + L(b-b') - M, & Kb' + L \\ c(Lc'+M), & Kcc' + L(c-c') - M, & Kc' + L \end{vmatrix} = 0.$$

Ontbinden we dezen determinant in twaalf andere en stellen we kortheidshalve de drie determinanten, waarvan

$$(aa', a, a'), \quad (aa', a-a', 1), \quad (a', a, 1)$$

de eerste regels zijn, door k, l, m voor, dan vinden we

$$kKL^2 + lL^3 - lKLM - kK^2M + mKM^2 + mL^2M = 0$$

of

$$(L^2 - KM)(kK + lL + mM) = 0.$$

Elimineert men nu f', g', h' uit 1) en 6), dan komt men, wijl k, l, m slechts van teekens veranderen, op dezelfde vergelijking terecht. Hieruit volgt, dat aan 6) voldaan is, als men 1), 2) en 5) vooropstelt. In verkorten vorm wordt dit uitgedrukt als volgt:

„Vormen in een straleninvolutie of een punteninvolutie de bij (a, b, c) behoorende elementen een involutie met (a', b', c'), dan vormen ook de bij (a', b', c') behoorende elementen een involutie met (a, b, c)."

Het bewijs dezer stelling vereenvoudigt zich als men de

aangenomen vergelijking in x en y door $xy = k$ of $x + y = 0$ vervangt, wat meetkundig hiermee overeenstemt, dat men de involutie door projectie omzet in een cirkelvormige involutie met onderling loodrecht op elkaar staande stralenparen of in een hyperbolisch gelijkzijdige involutie met loodrecht op elkaar staande dubbelstralen. We herinneren, wat dit eerste aangaat, aan de bekende eigenschap van twee orthologische driehoeken.

Met verwerping van de uit zich zelf duidelijke uitkomst $L^2 - KM = 0$ der parabolische involutie, waarbij een straal van elk paar vast is, vinden we

$$kK + lL + mM = 0.$$

Deze vergelijking doet zien, dat de involutie I, die aan de vraag voldoet, een vast stralenpaar (d, e) bevat, dat door de vergelijkingen

$$\frac{xy}{k} = \frac{x + y}{l} = \frac{1}{m}$$

wordt bepaald. Deze stralen (d, e) zijn de dubbelelementen van de projectieve richtingenbundels $(a, b, c \ldots)$ en $(a', b', c' \ldots)$. Wordt nl. deze projectiviteit door de vergelijking

$$Qxy + Rx + Sy + T = 0$$

uitgedrukt, dan vindt men de betrekking

$$\begin{vmatrix} xy & x & y & 1 \\ aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dus geldt voor de dubbelelementen, wat hieruit ontstaat door de substitutie $y = x$. Dit herleidt zich tot $mx^2 - lx + k = 0$. En hieruit volgt weer

$$\frac{x_1 x_2}{k} = \frac{x_1 + x_2}{l} = \frac{1}{m}.$$

We vinden dus een paar richtingen (μ, ν) door de dubbelelementen (d, e) van (a, a'), (b, b'), (c, c') te construeeren en nu een paar richtingen te zoeken, die door (d, e) harmonisch gescheiden zijn. Dus is het aantal oplossingen oneindig groot (J. N.).

Aanmerking. Uit de bovenstaande afdoende beschouwingen blijkt ten duidelijkste, dat de inzender van het vraagstuk en

de redactie dupe zijn geworden van een overmatig gebruik van symbolen. Want als de tweede voorwaarde wordt uitgewerkt, moet zij blijken van de voorgaanden af te hangen. Op het geheele vraagstuk is dus van toepassing: se non è vero, è ben trovato. En dat dit laatste het geval is, bewijst de verdienstelijke oplossing van ons eerelid ten volle. (RED.)

Vraagstuk 65.

De bedoelde verhandeling van G. STINER vindt men in de Wiener *Monatshefte*, deel IV, blz. 99.

Vraagstukken 66, 67, 85.

Deze vraagstukken zijn ook opgelost door den Heer P. DE CARPENTIER WILDERVANCK JR.

Vraagstuk 88.

1. Men leze blz. 160 en vervolgens in plaats van „1ste, 2de en 3de orde": 1ste, 2de en 3de soort.

2. De gecursiveerde regels blz. 159 onderaan en blz. 160 bovenaan vervange men duidelijkheidshalve door:

„*een* **volledige** *rij van breuken te vormen, die in toenemende* „*mate de kettingbreuk benaderen en waarvan de noemers een* „*opklimmende reeks vormen;* d. w. z. een rij van breuken, „waarin het niet meer mogelijk is een breuk te interpoleeren, „zonder dat òf de opklimming van de noemers òf de volgorde „in nauwkeurigheid van benadering der kettingbreuk wordt „verbroken."

3. Ten einde het onderscheid tusschen de drie soorten van naderende breuken en haar verhouding tot willekeurige breuken nader toe te lichten, zij nog het volgende opgemerkt:

De naderende breuken der drie soorten voldoen aan de eigenschap:

Een naderende breuk heeft eenvoudiger noemer dan elke andere breuk, waarvan de waarde tusschen de beschouwde breuk en de kettingbreuk gelegen is.

Of ook:

Geen breuk met kleineren noemer dan dien van een naderende breuk kan een waarde hebben, die tusschen de naderende breuk en de kettingbreuk gelegen is (zie Lobatto-Rahusen, *Lessen over de Hoogere Algebra* p. 352).

Voor de naderende breuken der 1ste en 2de soort geldt de volgende gemeenschappelijke eigenschap:

Een naderende breuk heeft eenvoudiger noemer dan elke andere breuk, die minder dan de eerste van de kettingbreuk verschilt.

Of ook:

Elke breuk met kleineren noemer dan dien van een naderende breuk verschilt meer van de kettingbreuk dan deze.

Deze eigenschap is bekend voor naderende breuken van de eerste soort en geldt volgens de gegeven bepaling wel voor naderende breuken van de tweede soort, doch niet voor die van de derde soort.

Een eigenschap, die karakteriseerend is voor de naderende breuken der eerste soort is de volgende:

De benadering van de kettingbreuk door een naderende breuk der eerste soort is van dien aard, dat elke breuk, die tusschen deze breuk en de kettingbreuk gelegen is, een noemer moet hebben grooter dan het dubbel van den noemer der naderende breuk.

Ligt nl. een breuk $\frac{p}{q}$ tusschen een naderende breuk van de eerste soort $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ en de kettingbreuk K, dan zal vooreerst $q > \beta_n$ moeten zijn. Is nu $\frac{p}{q}$ ook zelf een naderende breuk van K (1[ste], 2[de] of 3[de] soort), dan moet q kunnen worden verkregen door gebruik te maken van de bekende rekenwijze, volgens welke een noemer van een naderende breuk uit de noemers van de voorafgaande naderende breuken der eerste soort met behulp van het overeenkomstige wijzergetal wordt gevonden. Uitgaande van β_n zal dan die rekenwijze een even aantal malen, dus minstens tweemaal, moeten worden toegepast, omdat we onderstellen dat $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ en $\frac{p}{q}$ aan dezelfde zijde van K liggen; de hierbij gebruikte wijzergetallen zijn op zijn minst gelijk aan 1, zoodat $q > 2\beta_n$ moet zijn. Is $\frac{p}{q}$ geen naderende breuk van K, dan kan men een naderende breuk $\frac{p'}{q'}$ vinden met een noemer $q' > q$, die minder dan $\frac{p}{q}$ en in denzelfden zin van K verschilt; op deze breuk is dan de voorgaande redeneering toepasselijk, zoodat ook nu $q > q' > 2\beta_n$ is.

B.v. de breuken die tusschen $\frac{333}{106}$ en π zijn gelegen en in volgorde een zoo eenvoudig mogelijken noemer hebben, zijn: $\frac{355+333}{113+106}$, $\frac{2.355+333}{2.113+106}$, $\frac{3.355+333}{3.113+106}$ enz.; de noemers dezer breuken zijn alle grooter dan het dubbel van 106.

Is daarentegen een naderende breuk van de tweede of derde soort gegeven, dan is er altijd een breuk mogelijk, die in denzelfden zin de kettingbreuk nauwkeuriger benadert en waarvan de noemer *kleiner* is dan het dubbel van den noemer der naderende breuk. Om zulk een breuk voor een gegeven breuk van de tweede of derde soort aan te wijzen, behoeft men deze slechts op te zoeken in de rij van naderende breuken, die alle grooter of die alle kleiner dan de kettingbreuk zijn en waarvan de noemers naar orde van grootte gerangschikt zijn. De breuk die er onmiddellijk op volgt voldoet dan aan den gezegden eisch. Men vergelijke de rijen breuken op blz. 162. (C. v. A.)

Vraagstuk 98.

Men vergelijke hieromtrent *Mathesis*, IV, 1894, blz. 170.

Vraagstuk 136.

In de „Geometrische Theoreme" (CRELLE's *Journal*, deel 73, blz. 189—194) wordt door JACOBI het volgende vraagstuk opgelost:

„Om een driehoek $P_1P_2P_3$ twee hyperbolen H en H′ te beschrijven, waarvan de brandpuntsafstanden $2c = \sqrt{a^2+b^2}$ en $2c = \sqrt{a'^2+b'^2}$ gelijk zijn en waarvoor tusschen de coördinaten van P, P_2, P_3 met betrekking tot de symmetrieassen van H en H′ de betrekkingen $\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_3}{x_3'} = \frac{a}{a'}$, $\frac{y_1}{y_1'} = \frac{y_2}{y_2'} = \frac{y_3}{y_3'} = \frac{b}{b'}$ bestaan."

Wil men deze oplossing toepassen op het vraagstuk van LEMOINE, dan verplaatst men H′ zoodanig, dat de brandpunten van deze hyperbool met die van H samenvallen; zij gaat dan over in de meetkundige plaats van het punt M′ uit vraagstuk 136 (J. N.)

Vraagstuk 154.

De uit elkaar volgende betrekkingen $z + \sqrt{z^2 - 1} = w$, $2z = w + w^{-1}$ bepalen een verwantschap tusschen de punten

Z en W door de complexe veranderlijken z en w voorgesteld; van deze verwantschap geven we de meetkundige uitdrukking.

Stelt W′ het punt w^{-1} voor, dan komen W en W′ met elkaar overeen in een omgeslagen inversie; anders gezegd, de voerstralen OW en OW′ zijn elkaars spiegelbeelden ten opzichte van de x-as en het product OW. OW′ is de eenheid. Verder is Z het midden van WW′ volgens de tweede betrekking.

Is de modulus ρ van w standvastig, dan beschrijven W en W′ cirkels met O tot middelpunt en ρ en $\frac{1}{\rho}$ tot stralen, terwijl OW en OW′ bij deze beweging altijd elkaars spiegelbeelden blijven ten opzichte van de x-as. Bij die beweging moet Z dan een ellips beschrijven. Want als de lijn door Z evenwijdig aan OW′ de lijnen OW, Ox, Oy in N, P, Q ontmoet, zijn de driehoeken ONQ en ONP gelijkbeenig en is Z dus een vast punt van de lijn PQ = OW van standvastige lengte, die zich tusschen Ox en Oy beweegt.

Is het argument ϕ van w standvastig, dan hebben OW en OW′ onveranderlijke richtingen en is het oppervlak van driehoek OWW′ standvastig; dus omhult WW′ dan een hyperbool, die OW, OW′ tot asymptoten heeft. Wijl het stuk eener raaklijn, tusschen de asymptoten begrepen, door het raakpunt middendoorgedeeld wordt, doorloopt Z deze zelfde hyperbool.

Uit de eerste betrekking volgt, als men op Ox naar weerskanten de segmenten OF = —OF′ = 1 neemt, $w = OZ + \sqrt{ZF . ZF'}$. Dus wordt W gevonden door op de inwendige deellijn van den hoek FZF′ naar de buitenzijde een stuk $\sqrt{ZF . ZF'}$ af te zetten. Hieruit volgt, dat, als Z een ellips met de brandpunten F en F′ doorloopt, W een cirkel beschrijft, die O tot middelpunt en de halve som der assen van de ellips tot assen heeft. Hieromtrent kan men een artikel van E. N. Barisien in *Mathesis* 1895, blz. 129 en een artikel van A. Transon in de *Nouv. Ann.* van 1873, blz. 5—20 vergelijken. (J. N.)

Vraagstuk 179.

Door een misverstand is de oplossing van dit vraagstuk door Dr. D. J. Korteweg bij de samenstelling van het 6e stuk van dit deel niet in handen van de redactie gekomen. Aan die oplossing wordt nog het volgende ontleend, betrekking

hebbende op het bijzondere geval dat de slingertijden der beide slingers nagenoeg gelijk zijn. De notatie van den heer MANTEL is daarbij overgenomen.

Ook in dit bijzondere geval zijn er natuurlijk drie principale slingeringen, waarvan de eerste nagenoeg den slingertijd van den balk bezit, de tweede een slingertijd heeft gelegen tusschen die der beide slingers en de derde een korteren slingertijd dan aan één dier slingers eigen is. Terwijl nu omtrent de eerste dezer slingeringen niets bijzonders te vermelden valt, dragen de beide anderen een ander karakter dan in het algemeene geval. In dit laatste geval toch stemt de ééne slingertijd nagenoeg overeen met dien van den éénen, de andere met dien van den anderen slinger, terwijl de slinger, wiens slingertijd nagenoeg overgenomen is, veel heftiger slingeringen uitvoert dan de andere. Dit nu zal blijken in het bijzondere geval, dat de slingers nagenoeg gelijke slingertijden hebben, anders te zijn. Men zal dan hebben vooreerst een slingering, wier slingertijd tusschen die der beide slingers gelegen is, en waaraan door beiden op zoodanige wijze deelgenomen wordt, dat hun uitslagen van dezelfde orde van hoegrootheid zijn, en ten tweeden een slingering sneller dan die der slingers ieder afzonderlijk en wel zoodanig, dat het verschil in slingertijd met den snelsten slinger veel grooter is dan dat tusschen de beide slingers onderling. De uitslagen van den balk zijn bij de laatstgenoemde slingering veel grooter dan bij de eerstgenoemden.

Om dit aan te toonen hernemen wij (blz. 363) de vergelijking

$$am(l-L)(l_1-L)(l_2-L)-a_2m_2y_2^2(l_1-L)-a_1m_1y_1^2(l_2-L)=0.$$

Wij substitueeren hierin $l_1=l_2+\delta$ en $L=l_2+\eta$, waarin δ en η ondersteld worden klein te zijn. Verwaarloozen wij dan de termen van de derde orde, dan verkrijgen wij ter berekening van η de vierkantsvergelijking:

$$f(\eta)\equiv am(l-l_2)(\eta^2-\delta\eta)+(a_2m_2y_2^2+a_1m_1y_1^2)\eta-a_2m_2y_2^2\delta=0.$$

Nu is hier $f(\delta)$ *positief* en $f(0)$ *negatief*, terwijl de waarden in beide gevallen van dezelfde orde zijn. Er is derhalve ééne wortel η, welke kan worden voorgesteld door $k\delta$, waarin k positief is en kleiner dan één.

Deze wortel stemt overeen met de slingering wier tijd tusschen de slingertijden der beide slingers ligt. De uitslagen van den

balk en van de beide slingers vertoonen de verhoudingen:

$$-k(1-k)\,\delta^2 : k\delta y_1 : -(1-k)\,\delta y_2.$$

Die der beide slingers zijn dus onderling vergelijkbaar, die van den balk is zeer gering.

De tweede wortel heeft nu natuurlijk tot waarde $-\dfrac{a_2 m_2 y_2{}^2}{am(l-l_2)k}$. Ook zij is klein, omdat am ondersteld werd groot te zijn ten opzichte van $a_2 m_2$. Maar als de slingertijden zeer weinig verschillen, dus δ zeer klein is, dan is zij, daar δ er niet in optreedt, zeer vele malen grooter dan de eerste wortel. Zij vertegenwoordigt de snelste slingering, wier slingertijd dus veel meer dan dien van den snelsten slinger verschilt dan deze van dien van den traagsten.

De verhoudingen der uitslagen bedragen, als wij dezen wortel door $-w_1$ voorstellen:

$$(\delta + w_1)\,w_1 : -w_1 y_1 : -(\delta + w_1)\,y_2.$$

Ook hier zijn de uitslagen der slingers vergelijkbaar, die van den balk is grooter dan bij de zoo even beschouwde slingering.

Dit bijzondere geval is van te meer gewicht, omdat het met de waarneming van CHRISTIAAN HUYGENS, waarop in het vraagstuk gezinspeeld wordt, vergelijkbaar is. Twee slinger-uurwerken van nagenoeg gelijken gang waren bevestigd aan stokken, die over éénzelfde paar stoelen waren gelegd. Deze toestand is natuurlijk niet volkomen in overeenstemming met het gestelde vraagstuk; maar het is toch duidelijk, dat zij tot soortgelijke verschijnselen aanleiding geven zal. Van de drie aangegeven slingeringen zal daarbij op den duur alleen *die* blijven bestaan of althans bemerkbaar zijn, waarbij de geringste beweging van den ophangingstoestel plaats vindt; immers deze beweging is aan veel grooter passieve weerstanden onderhevig dan die der slingers. Feitelijk nam HUYGENS dus de slingertijd waar, die gelegen is tusschen die der beide slingers. Hij vermeldt dan ook uitdrukkelijk, dat de beide uitslagen in tegengestelden zin plaats hadden.

Vraagstuk 192.

De inzender is door de oplossingen van dit vraagstuk niet geheel bevredigd; het is opnieuw voorgesteld in het *Journal de math. élémentaires* 1895, blz. 216.

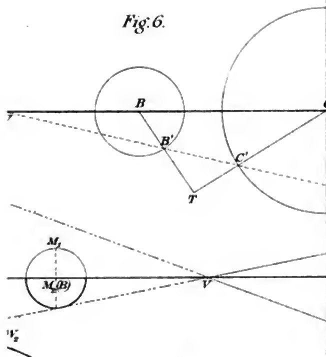
ERRATA.

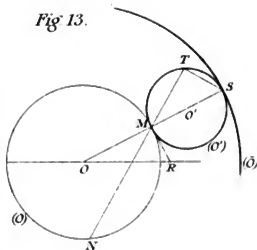
Blz.	regel			staat:	lees:
6,	regel 15	v.	b.	*staat:* $r(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t)$	*lees:* $r(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t)^2$
„ 7,	„ 8	„	„	„ x	„ x^2
„ 65,	„ 4	„	o.	„ $\dots y_2^2-q)$	„ $\dots y_2^2-q^2)$
„ 66,	„ 8	„	b.	„ $-b^4\,\mathrm{Sin}^2\,\omega$	„ $+b^4\,\mathrm{Sin}^2\,\omega$
„ 104,	„ 10	„	o.	„ $4\,l\,\mathrm{Cos}^2\,\nu$	„ $4\,l^2\,\mathrm{Cos}^2\,\nu$
„ 105,	„ 17	„	„	„ $\mathrm{Cos}\,\nu$	„ $\mathrm{Cot}\,\nu$
„ 117,	„ 11	„	b.	„ $n=1$ en $n=2$.	„ $x=1$ en $x=2$.
„ 135,	„ 5	„	„	„ $\begin{vmatrix} a^2 & ac-\mu & c^2 \\ b^2 & bd-\mu & d^2 \\ ab & ad+bc-\mu & cd \end{vmatrix}$	„ $\begin{vmatrix} a^2-\mu & ac & c^2 \\ b^2 & bd & d^2-\mu \\ 2ab & ad+bc-\mu & 2cd \end{vmatrix}$
„ 140,	„ 7	„	„	„ $\sqrt{u'^2+u''^2}$	„ $\sqrt{u^2+u'^2}$
„ „	„ 8	„	„	„ $u+u'$	„ $u+u''$
„ 143,	„ 8	„	„	„ $\mathrm{V}\omega p$	„ $\mathrm{V}\omega\rho$
„ 160,	„ 5	„	o	„ q_{n-1}	„ q_{n+1}
„ 171,	„ 6	„	b.	„ $\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha-1}f(\alpha,\alpha-\beta+2,\gamma,\gamma-k)$	„ $\frac{\beta-1}{\beta-\alpha-1}f(\alpha,\alpha-\beta+2,\gamma,-\gamma-k)$
„ 223,	„ 1	„	o.	„ $\dots(\mathrm{R}^2-\mathrm{S})\,\mathrm{Sin}^2\phi]\,r^2$	„ $\dots(\mathrm{R}^2-\mathrm{S})\,\mathrm{Sin}^2\phi+$ $2\,\mathrm{QR}\,\mathrm{Cos}\,\phi\,\mathrm{Sin}\,\phi]\,r^2$
„ 256,	„ 20	„	b.	„ 5).	„ 4).
„ 257,	„ 7	„	„	„ omgeschreven	„ ingeschreven
„ 295,	„ 9	„	o	„ CHARLES	„ CHASLES
„ 313,	„ 6	„	o.	„ $\frac{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\log n\,\log(n-1)}$	„ $\frac{-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\log n\,\log(n-1)}$
„ 316,	„ 10	„	„	„ $y=$	„ $0=$
„ 320,	„ 2	„	b.	„ $\mathrm{B}g\,\mathrm{Cos}\,\frac{2}{3}$	„ $\mathrm{B}g\,\mathrm{Cos}\left(-\frac{2}{3}\right)$
„ 337,	„ 8	„	o.	„ $-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$	„ $-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2$
„ 369,	„ 5	„	b.	„ $x^{2n}\,in$	„ $x^{m+n}\,in$
„ 373,	„ 4	„	o.	„ $=\binom{m}{n}$	„ $(-1)^n\binom{-m}{n}$
„ 381,	„ 9	„	b.	„ verminderd	„ vermeerderd
„ 395,	„ 11	„	„	„ $c(c^2+a^2)$	„ c^4

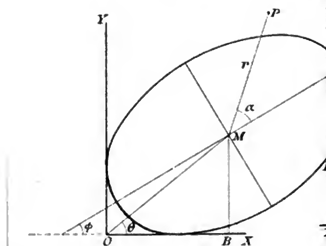
REGISTER

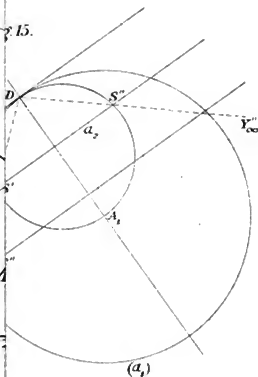
OP DE

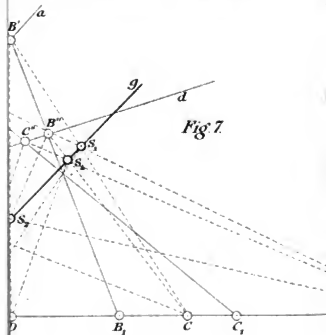
VRAAGSTUKKEN VOORKOMENDE IN DEEL I TOT VI.

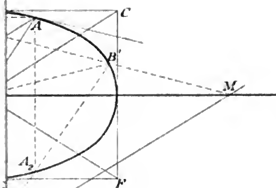












J. Bytel, sculps.





